FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
SoSe 2009

DATUM: 29.08.2009
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Aufzeichnungen, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	10	8	12	4	10	10	4	10	12	80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Prüfergebnis/Note	

Klausur am 29.08.2009:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+10)(k+11)} = \frac{1}{10} - \frac{1}{n+11}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Treppennormalform und den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{R}).$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}[T]$ definiert durch $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b)+(a+b)T+(a+b+c+d)T^2$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

1. Beweisen Sie, dass f linear ist.
2. Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

[*4 + 8 = 12 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei X_0 eine fest gewählte Matrix in $\mathrm{M}_{23}(\mathbb{R})$. Sei $V = \{A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \mid AX_0 = 0\}$. Beweisen Sie, dass V ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die Funktion $f : [1, e] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x} - \ln(x)$, im Intervall $[1, e]$ genau eine Nullstelle hat.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = (2x^2 - x - 1)\exp(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie f auf lokale Minima und Maxima.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(-2)^{-n}$ konvergiert.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 8

Die Kommissarin hat drei Tatverdächtige P, Q und R. Die Voruntersuchungen haben ergeben:

1. Wenn Q oder R schuldig sind, dann ist P unschuldig.
2. Ist P unschuldig oder R unschuldig, so ist Q schuldig.
3. Ist R schuldig, dann ist auch P schuldig.

Lässt sich aus den Voruntersuchungen eindeutig ermitteln, wer der/die Täter ist/sind? Falls ja, wer ist schuldig, und wer ist unschuldig?

[*10 Punkte*]

Aufgabe 9

Die reelle Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 88$ und $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 12}$ für alle $n > 1$.

1. Beweisen Sie mit Hilfe des Monotonieprinzips, dass (a_n) konvergent ist.
2. Bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n).

   Hinweis: Hier könnte es nützlich sein, auch die Folge (a_{n+1}^2) zu betrachten.

[*8 + 4 = 12 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$