FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
SoSe 15

DATUM: 26.09.2015
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Aufzeichnungen oder Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Bearbeitet								
max. Punktezahl	10	18	10	8	12	12	10	80
erreichte Punktezahl								
Korrektur								

Prüfergebnis/Note	

Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2015

Klausur am 26.09.2015:

Aufgabenstellungen

Aufgabe 1

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a \leq 1$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $(1+a)^n \leq 1 + (2^n - 1)a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{55}(\mathbb{R})$. Sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ definiert durch $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^5$.

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und von $\mathrm{Bild}(f)$.

[*18 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien U und W Unterräume von V. Seien $u \in U$, $u \neq 0$ und $w \in W$, $w \neq 0$.

Beweisen Sie: Wenn $U \cap W = \{0\}$ ist, dann sind u und w linear unabhängig.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die lokalen Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x + 2\cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Folgende Tabelle könnte für die Bearbeitung der Aufgabe nützlich sein und darf ohne Begründung verwendet werden:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit den beiden folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $x \in (a, b)$ gibt es ein $y \in (x, b]$ mit $f(y) > f(x)$.

(ii) Für a gibt es kein $y \in (a, b]$ mit $f(y) > f(a)$.

Beweisen Sie: Dann gilt

1. f nimmt das Maximum in a an, d.h. für jedes $x \in [a, b]$ gilt $f(x) \leq f(a)$.
2. f nimmt das Maximum in keinem Punkt $c \in (a, b)$ an.
3. f nimmt das Maximum auch in b an.

[*3 + 3 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{(-1)^n}{n})^{n^2}$

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

Aufgabe 7

Bestimmen Sie zu jeder Stelle, an der ein Variablensymbol in den folgenden Formeln steht, ob es dort frei oder gebunden ist. Variablensymbole werden mit x, y bezeichnet.

1. $\forall x P(x) \to P(y)$
2. $\forall x P(x) \to Q(x, y)$
3. $\forall x (P(x) \to Q(x, y))$
4. $Q(x, y) \to \exists y P(x)$

[*2 + 3 + 3 + 2 = 10 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$