FernUniversität in Hagen

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
SoSe 16

DATUM: 24.09.2016
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Aufzeichnungen oder Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Taschenrechner etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Bearbeitet									
max. Punktezahl	10	8	16	8	8	12	10	8	80
erreichte Punktezahl									
Korrektur									

Prüfergebnis/Note	

Klausur am 24.09.2016:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen begründet werden.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$2n + 1 \leq n^2 \leq 2^n$$

für alle $n \geq 4$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 2

Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$?

(a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a^2 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$

(b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$

(c) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{34}(\mathbb{R}).$$

(a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ und bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge.

(b) Ergänzen Sie Ihre in (a) gefundene Basis zu einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^4$.

(c) Sei $\mathcal{B}$ die Basis aus (b) und $\mathcal{C}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie für $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = Ax$ die Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

(Hinweis: Sollten Sie keine Lösung für (a) gefunden haben, ergänzen Sie in (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$. Sollten Sie in (b) keine Basis bestimmt haben, lösen Sie (c) mit einer beliebigen Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^4$, bei der jeder Basisvektor mindestens zwei Einträge ungleich Null besitzt.)

[*8 + 4 + 4 = 16 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ linear. Beweisen Sie, dass genau dann $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$ gilt, wenn $\mathrm{Kern}(f \circ f) = \mathrm{Kern}(f)$ ist.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $0 < b_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \prod_{i=1}^{n} b_i \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

konvergiert.

(Hinweis: Monotonieprinzip)

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

Sei $D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ für alle $x \in D$.

(a) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von f im Intervall $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

(c) Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom von f in $x_0 = 1$.

[*4 + 5 + 3 = 12 Punkte*]

Aufgabe 7

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^7$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3+n}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{3n^n}$

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Bestimmen Sie eine Negationsnormalform der beiden folgenden Formeln:

(a) $\neg((A \vee B) \wedge (\neg B \vee C))$

(b) $\neg(\forall x \exists y (R(x,y) \wedge (\neg Q(y))))$

[*4 + 4 = 8 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$