6 Punkte **Aufgabe 1.**

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen a_n sei rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_n &= 2a_{n-1} + 2^{n-1} \quad \text{falls } n \geq 1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n = n2^{n-1}.$$

Aufgabe 2.

In dieser Aufgabe geht es um Permutationen.

3 Punkte (a) Zerlegen Sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 8 & 12 & 6 & 4 & 17 & 11 & 16 & 7 & 3 & 18 & 9 & 2 & 13 & 5 & 14 & 10 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

in disjunkte Zyklen.

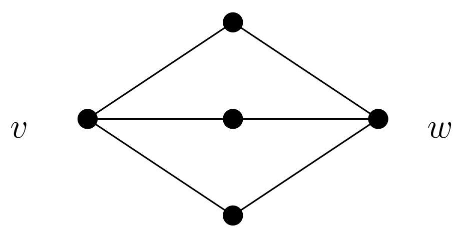
3 Punkte (b) Wie wahrscheinlich ist es, unter der Annahme der Gleichverteilung auf allen Permutationen fixer Länge, dass in der Zyklenzerlegung einer Permutation der Länge 18 mindestens ein Zyklus der Länge ≥ 2 auftritt?

8 Punkte **Aufgabe 3.**

Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt einen Graphen mit genau 10 Knoten, von denen zwei den Grad 8, zwei den Grad 7, zwei den Grad 5, einer den Grad 4 und drei den Grad 2 haben. Geben Sie, falls möglich, einen solchen Graphen explizit an.

5 Punkte **Aufgabe 4.**

Betrachten Sie den folgenden Graphen.

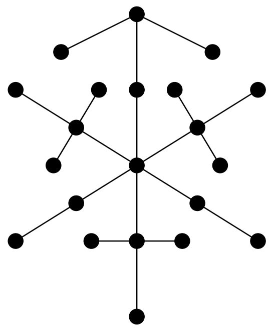


Bestimmen Sie die Anzahl der Spaziergänge der Länge 4 von v nach w.

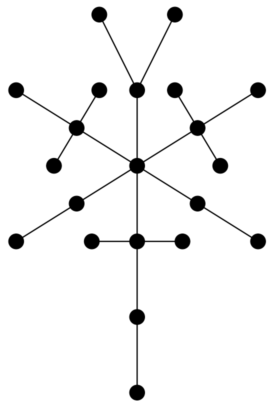
Tipp: Es gibt eine kurze elementare Lösung.

6 Punkte **Aufgabe 5.**

Zeigen oder widerlegen Sie: Die unten abgebildeten Bäume T_1 und T_2 sind isomorph.



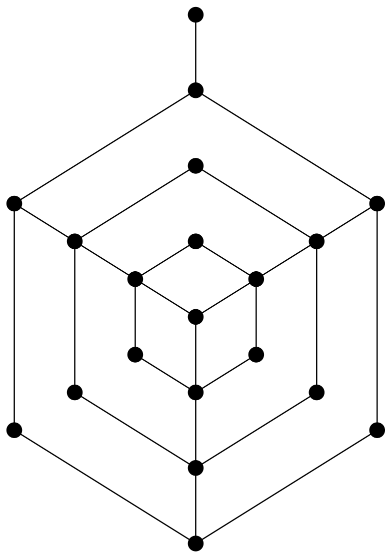
Der Baum T_1



Der Baum T_2

Aufgabe 6.

Betrachten Sie folgenden Graphen G.



2 Punkte (a) Zeigen Sie: Der Graph ist bipartit.

Geben Sie die Bipartitionen an.

8 Punkte (b) Bestimmen Sie ein maximales Matching in G und beweisen Sie dessen Maximalität.

3 Punkte (c) Löschen Sie eine kleinstmögliche Anzahl an Knoten aus G, so dass der entstehende induzierte Teilgraph H ein perfektes Matching hat. Geben Sie die gelöschten Knoten und ein perfektes Matching von H explizit an. Beweisen Sie, dass bei Löschen von weniger Knoten in G nur Graphen entstehen, die kein perfektes Matching besitzen.

5 Punkte **Aufgabe 7.**

Schreiben Sie die Dezimalzahl 14,4 ins 2er-System (d.h. Binärsystem) um.

Aufgabe 8.
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 8 & 25 & -11 \\ 2 & -11 & 75 \end{pmatrix}.$$

und der Vektor $b = (-2, 8, 28)^\top$.

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

3 Punkte (b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

1 Punkt (c) Bestimmen Sie $\|A\|_1$.

8 Punkte **Aufgabe 9.**
Lösen Sie das nichtlineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lccccccc} \min & x^2 & + & y^2 & + & z^2 & & \\ \text{unter} & x & + & y & + & z & = & 1 \\ & x & - & y & & & = & 0. \end{array}$$

Aufgabe 10.
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine reelle $(m \times n)$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ reellwertige Vektoren für $m, n \geq 1$. Sei

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

der Zulässigkeitsbereich und

$$f_c : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_c(x) = c^\top x$$

die Zielfunktion eines linearen Optimierungsproblems. Sei ferner

$$g : [-100, 200] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad g(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \\ \vdots \\ t^2 \end{pmatrix}$$

die Funktion, die zu t in jeder Komponente den Wert t^2 annimmt.

4 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: S ist konvex.

6 Punkte (b) Bestimmen Sie die Menge

$$C_1 = \{c \in \mathbb{R}^n \mid f_c \circ g \text{ ist konvex}\}$$

und die Menge

$$C_2 = \{c \in \mathbb{R}^n \mid f_c \circ g \text{ ist strikt unimodal}\}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

$$C_1 = C_2.$$

Hinweis: Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass die Abbildung $y \longmapsto ay^2$ genau dann konvex ist, wenn $a \geq 0$ ist.

Aufgabe 11.
Sei $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 9y^2 - 3x + 8y + 9.$$

6 Punkte (a) Führen Sie, ausgehend von $(1,0)^\top$, eine Iteration des Newtonverfahrens zur Bestimmung eines stationären Punktes von f durch.

1 Punkt (b) Wieviele Newton-Iterationen sind nötig, bis Sie einen stationären Punkt erreicht haben?

8 Punkte **Aufgabe 12.**
Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & & & y & & \\ \text{unter} & x & + & y & \leq & 4 \\ & x & + & y & \geq & 3 \\ & 2x & + & y & \geq & 5 \\ & & & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

Tipps: Grafische Lösung ist zulässig. Bei Benutzung von Blands Rule tauchen in unseren Rechnungen im Simplextableau keine Nenner größer als 2 auf.