Lösungsskizzen zu den Klausuraufgaben zum Kurs 1142 Algorithmische Mathematik

1142KSL09

Aufgabe 1.

Zeigen oder widerlegen Sie: Es existiert ein Graph mit Valenzsequenz

$$(8,5,4,4,4,3,1,1,1,1).$$

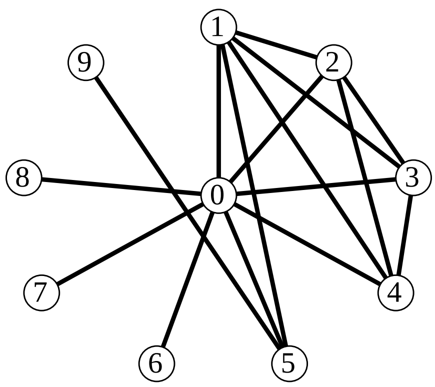
Geben Sie im Falle der Existenz einen solchen Graphen an.

Lösung:

Wir benutzen das Verfahren von Havel-Hakimi:

8	5	4	4	4	3	1	1	1	1
	4	3	3	3	2	0	0	0	1
	4	3	3	3	2	1	0	0	0
		2	2	2	1	1	0	0	0
			1	1	1	1	0	0	0
				0	1	1	0	0	0
				1	1	0	0	0	0
					0	0	0	0	0

Da $(0,0,0,0,0)$ Valenzsequenz eines Graphen ist, nämlich des Graphen aus 5 isolierten Knoten, ist also auch die ursprüngliche Sequenz $(8,5,4,4,4,3,1,1,1,1)$ Valenzsequenz eines Graphen. Einen solchen findet man, wenn man das Verfahren rückwärts durchläuft, hier also:



Aufgabe 2.

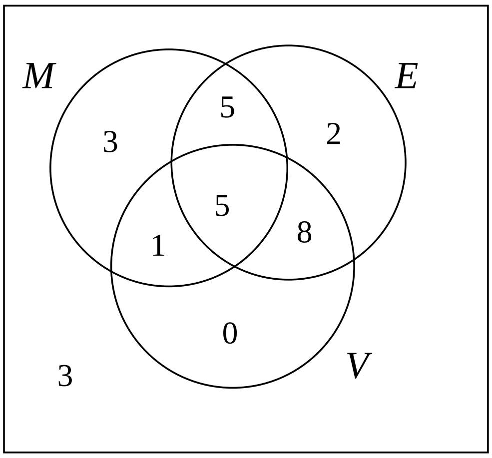
Ein Club hat 27 Mitglieder, die entweder männlich oder weiblich, entweder Erwachsene oder Jugendliche, bzw. entweder Vollmitglied oder Teilmitglied sind. Genau 14 Mitglieder sind männlich, genau 20 sind erwachsen und genau 14 sind Vollmitglied. Genau 10 sind männliche Erwachsene, genau 6 männliche Vollmitglieder gibt es und genau 13 erwachsene Vollmitglieder. Ferner sind genau 5 der männlichen Erwachsenen Vollmitglied. Wieviele weibliche Jugendliche im Club sind Teilmitglied?

Lösung:

Sei C die Menge der Mitglieder des Clubs, M die Menge der Männer, E die Menge der Erwachsenen und V die Menge der Vollmitglieder. Laut Aufgabenstellung gilt $|C| = 27$, $|M| = 14$, $|E| = 20$, $|V| = 14$, $|M \cap E| = 10$, $|M \cap V| = 6$, $|E \cap V| = 13$ und $|M \cap E \cap V| = 5$. Gesucht ist $|C \setminus (M \cup E \cup V)|$. Dies ist nach dem Prinzip von Inklusion-Exklusion gleich

$$\begin{aligned} |C \setminus (M \cup E \cup V)| &= |C| - |M| - |E| - |V| + |M \cap E| + |M \cap V| + |E \cap V| - |M \cap E \cap V| \\ &= 27 - 14 - 20 - 14 + 10 + 6 + 13 - 5 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Die Lösung kann man auch an dem folgenden Venn-Diagramm ablesen, welches man von innen nach außen füllt:



Aufgabe 3.

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} i(3i+1) = n(n+1)^2$$

Lösung:

Wir zeigen dies per Induktion nach n: Falls $n = 0$ ist, so gilt

$$\sum_{i=0}^{0} i(3i+1) = 0 \cdot 1 = 0 = 0 \cdot (0+1)^2,$$

also ist die Behauptung richtig.

Sei die Behauptung nun bereits für $n-1$ gezeigt. Dann folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} i(3i+1) &= \sum_{i=0}^{n-1} i(3i+1) + n(3n+1) \\ &\overset{IV}{=} (n-1)n^2 + n(3n+1) \\ &= n[n(n-1) + (3n+1)] \\ &= n[n^2 - n + 3n + 1] \\ &= n(n^2 + 2n + 1) \\ &= n(n+1)^2 \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung für n und damit nach dem Prinzip der vollständigen Induktion auch allgemein.

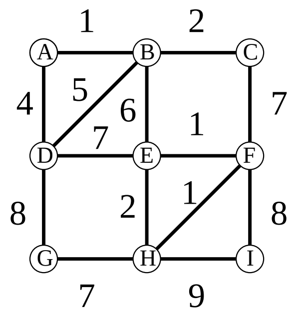
Aufgabe 4.
Schreiben Sie den Bruch $\frac{77}{6}$ von Dezimalzahlen um ins 5er-System.
Lösung:
Es ist $\frac{77}{6} = 12\frac{5}{6}$. Wir rechnen:

$$\begin{array}{rclcl}
12\frac{5}{6} : 5 & & & = & 2 \text{ Rest } 2\frac{5}{6} \\
2\frac{5}{6} : 1 & & & = & 2 \text{ Rest } \frac{5}{6} \\
\frac{5}{6} : \frac{1}{5} & = & \frac{25}{30} : \frac{6}{30} & = & 4 \text{ Rest } \frac{1}{30} \\
\frac{1}{30} : \frac{1}{25} & = & \frac{5}{150} : \frac{6}{150} & = & 0 \text{ Rest } \frac{5}{150} \qquad \left(\frac{5}{150} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{25}\right)
\end{array}$$

Somit haben wir eine Periode der Länge 2 gefunden und $\frac{77}{6}$ lautet im 5er-System

$$22.\overline{40}_{(5)}.$$

Aufgabe 5.
Betrachten Sie folgenden (gewichteten) Graphen:



(a) Ist der Graph eulersch? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

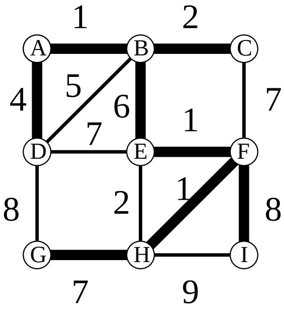
Der Graph ist eulersch. Zwei mögliche richtige Begründungen sind:

- Alle Knoten haben entweder den Grad 2 oder 4, haben also geraden Grad. Außerdem ist der Graph zusammenhängend (wie man auch aus der Lösung von (b) sehen kann). Somit ist der Graph nach einem Satz des Kurses (Satz 3.10.2) eulersch.
- Der Graph besitzt eine Eulertour, z.B. BCFIHGDABDEFHEB. Somit ist der Graph eulersch.

(b) Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum.

Lösung:

Zum Beispiel mit dem Algorithmus von Kruskal findet man folgenden minimalen aufspannenden Baum (fett eingezeichnet):



Dieser ist eindeutig und hat das Gewicht 30.

Aufgabe 6.

(a) Sei $n \geq 3$. Geben Sie einen zusammenhängenden Graphen mit n Knoten und $n-1$ Kanten an, bei dem alle Knoten bis auf einen den gleichen Knotengrad haben.

Lösung:

$G = (V,E)$ mit $V = \{1,2,3,\ldots,n\}$ und $E = \{\{i,n\} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$.

Dies ist ein sogenannter Stern. Alle Knoten $1,2,3,\ldots,n-1$ haben Grad 1 und Knoten n hat Grad $n-1$. Offensichtlich hat der Graph n Knoten und $n-1$ Kanten und ist zusammenhängend.

(b) Begründen Sie, ob Ihr Graph (bis auf Isomorphie) die eindeutige Lösung für (a) ist.

Lösung:

Wir zeigen, dass es bis auf Isomorphie nur diese eine Lösung gibt. Zunächst einmal ist ein zusammenhängender Graph $G' = (V',E')$ mit n Knoten und $n-1$ Kanten nach einem Satz des Kurses (Satz 4.1.5) ein Baum. Da $n \geq 3$ ist, hat dieser Baum nach einem Satz des Kurses (Lemma 4.1.3) mindestens zwei Blätter, also Knoten vom Grad 1. Wenn also in G' alle Knoten bis auf einen den gleichen Knotengrad haben sollen, müssen alle Knoten bis auf einen den Grad 1 haben. Sei v_0 der Ausnahmeknoten, der evtl. nicht den Grad 1 hat. Nach dem Handshake-Lemma (Proposition 3.9.1) gilt dann:

$$\deg(v_0) + (n-1)\cdot 1 = \sum_{v \in V'} \deg(v) = 2|E'| = 2n-2,$$

also hat v_0 den Grad $n-1$. G' hat also die Gradsequenz

$$(n-1, \underbrace{1,1,1,\ldots,1}_{n-1}).$$

Da v_0 den Grad $n-1$ hat, muss jeder andere Knoten mit v_0 benachbart sein. Damit ist aber jede bijektive Abbildung von V' nach V, die den Knoten $v_0 \in V'$ auf den Knoten $n \in V$ abbildet und die anderen Knoten irgendwie, ein Isomorphismus von G' und G. Somit ist die Lösung bis auf Isomorphie eindeutig.

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung sowie, falls möglich, die Cholesky-Faktorisierung der symmetrischen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 13 & -13 \\ 2 & -13 & 29 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie, ob A positiv definit ist.

Lösung:

Eine LU-Zerlegung könnte man wie folgt bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 13 & -13 \\ 2 & -13 & 29 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \boxed{-2} & 9 & -9 \\ \boxed{2} & -9 & 25 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \boxed{-2} & 9 & -9 \\ \boxed{2} & \boxed{-1} & 16 \end{pmatrix}$$

Die so ermittelte LU-Zerlegung lautet also

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 13 & -13 \\ 2 & -13 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Eine andere LU-Zerlegung ist natürlich auch die Cholesky-Faktorisierung, falls sie existiert. Versuchen wir, sie zu berechnen:

$$\begin{aligned} \ell_{11} &= \sqrt{1} = 1 \\ \ell_{21} &= \frac{-2}{1} = -2 \\ \ell_{31} &= \frac{2}{1} = 2 \\ \ell_{22} &= \sqrt{13 - (-2)^2} = 3 \\ \ell_{32} &= \frac{-13 - (-2) \cdot 2}{3} = -3 \\ \ell_{33} &= \sqrt{29 - 2^2 - (-3)^2} = 4 \end{aligned}$$

Da die Berechnung geklappt hat und $\ell_{33} \neq 0$ ist, ist die Matrix A positiv definit und die Cholesky-Faktorisierung lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 13 & -13 \\ 2 & -13 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bis auf Skalierung stimmt die Cholesky-Faktorisierung mit der zuerst errrechneten LU-Zerlegung überein: diese erhält man nämlich, wenn man in der L-Matrix der Cholesky-Faktorisierung jede Spalte durch ihr Diagonalelement teilt und und in der $L^\top$-Matrix jede Zeile mit ihrem Diagonalelement multipliziert.

Aufgabe 8.

(a) Lösen Sie folgendes lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus (unter Verwendung von Bland's Rule) und geben Sie seine Optimallösung an:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \max & 3x & + & 4y & + & 5z & & \\ \text{unter} & x & + & 3y & + & 2z & \leq & 5 \\ & 2x & + & y & + & 4z & \leq & 11 \\ & 2x & + & 4y & + & 3z & \leq & 8 \\ & & & & & x,y,z & \geq & 0 \end{array}$$

Lösung:

In Standardform lautet das Problem

$$\begin{array}{rrcrcrcccccccr} \max & 3x & + & 4y & + & 5z & & & & & & & & \\ \text{unter} & x & + & 3y & + & 2z & + & s_1 & & & & & = & 5 \\ & 2x & + & y & + & 4z & & & + & s_2 & & & = & 11 \\ & 2x & + & 4y & + & 3z & & & & & + & s_3 & = & 8 \\ & & & & & & & & & & x,y,z,s_1,s_2,s_3 & & \geq & 0 \end{array}$$

Da wir mit den Schlupfvariablen bereits eine zulässige Basis haben, beginnen wir den Simplexalgorithmus direkt in Phase II. Das Starttableau lautet:

$$\begin{array}{cccccc|c} 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ \boxed{2} & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}$$

Nach Bland's Rule pivotieren wir in der ersten Spalte. Der Minimalquotiententest liefert die letzte Zeile als Pivotzeile. Nach dem Pivotschritt erhalten wir:

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -12 \\ \hline 0 & 1 & \boxed{\frac{1}{2}} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 4 \end{array}$$

Wir haben eine einzige Möglichkeit zu pivotieren und erhalten:

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 & -13 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Das Tableau ist final und wir lesen die Optimallösung $(x,y,z) = (1,0,2)$ mit Zielfunktionswert 13 ab.

(b) Stellen Sie das dazu duale lineare Programm auf.

Lösung:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & 5u & + & 11v & + & 8w & & \\ \text{unter} & u & + & 2v & + & 2w & \geq & 3 \\ & 3u & + & v & + & 4w & \geq & 4 \\ & 2u & + & 4v & + & 3w & \geq & 5 \\ & & & & & u,v,w & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe 9.
Seien $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Betrachten Sie folgende Optimierungsprobleme:

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{lrcl} \min & c^\top x & & \\ \text{unter} & Ax & = & b \\ & x & \leq & 0 \end{array} \qquad\qquad \text{(D)} \quad \begin{array}{lrcl} \max & y^\top b & & \\ \text{unter} & y^\top A & \leq & c^\top \end{array}$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ zulässig für (P) und $y \in \mathbb{R}^m$ zulässig für (D). Zeigen Sie elementar, unter Begründung jedes Zwischenschrittes, ohne Benutzung des Dualitätssatzes, dass gilt:

$$c^\top x \leq y^\top b.$$

Lösung:

(1) Da x zulässig für (P) ist, ist $x \leq 0$, also gilt für alle j: $x_j \leq 0$. Da y zulässig für (D) ist, ist $y^\top A \leq c^\top$, also $y^\top A - c^\top \leq 0$, also gilt für alle j: $(y^\top A - c^\top)_j \leq 0$. Da das Produkt zweier negativer Zahlen positiv ist, folgt aus diesen beiden Tatsachen, dass

$$(y^\top A)_j x_j - c_j^\top x_j = (y^\top A - c^\top)_j x_j \geq 0,$$

also $(y^\top A)_j x_j \geq c_j^\top x_j$ für alle j, also durch Aufsummieren über alle j:

$$y^\top Ax \geq c^\top x. \tag{1}$$

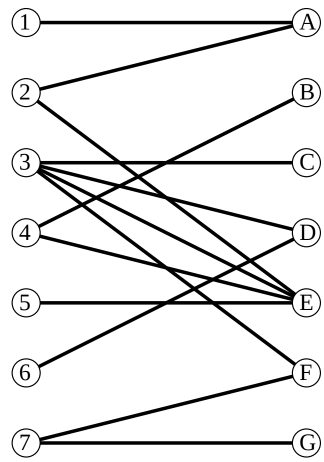
(2) Da x zulässig für (P) ist, ist $Ax = b$, also $y^\top Ax = y^\top b$.

Somit folgt:

$$c^\top x \overset{(1)}{\leq} y^\top Ax \overset{(2)}{=} y^\top b.$$

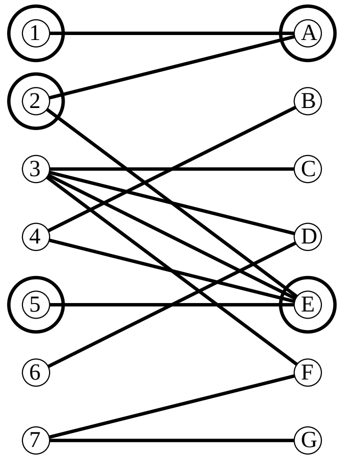
Aufgabe 10.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Der unten abgebildete bipartite Graph hat ein perfektes Matching.



Lösung:

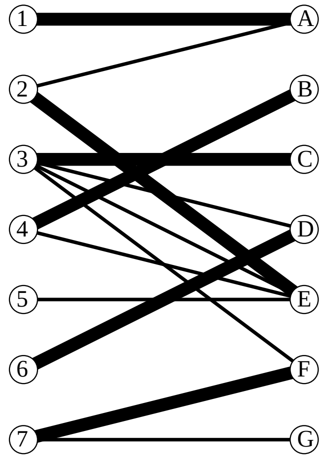
Die Knotenmenge $H = \{1, 2, 5\}$ hat die Mächtigkeit 3, die Menge $N(H) = \{A, E\}$ ihrer Nachbarn hat jedoch nur die Mächtigkeit 2. Damit kann der Graph nach dem Heiratssatz von Frobenius (Korollar 4.7.16) kein perfektes Matching haben.



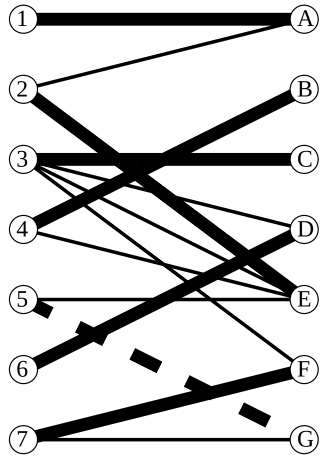
(b) Fügen Sie eine Kante zum Graphen hinzu, so dass der entstehende Graph (dann?/immer noch?) ein perfektes Matching hat und geben Sie ein solches Matching an.

Lösung:

Wir konstruieren mit dem Matchingalgorithmus ein möglichst großes Matching und schauen, was übrig bleibt. Dazu gehen wir von der linken Seite aus und von oben nach unten. Von den Knoten 1, 2, 3 und 4 finden wir jeweils direkt eine augmentierende Kante, also die Matchingkanten 1A, 2E, 3C und 4B. Von Knoten 5 finden wir keinen augmentierenden Pfad, da der alternierende Pfad 5E2A1 in einem bereits gematchten Knoten endet. Von den Knoten 6 und 7 finden wir direkt die augmentierenden Kanten 6D und 7F. Übrig bleiben die beiden ungematchten Knoten 5 und G:



Verbinden wir die Knoten 5 und G, so hat der Graph das perfekte Matching 1A,2E,3C,4B,5G,6D,7F:



Aufgabe 11.
Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{cccccc} \min & (x-3)^2 & + & (y+4)^2 & & \\ \text{unter} & x^2 & + & y^2 & = & 100. \end{array}$$

Lösung:
Seien $f(x,y) := (x-3)^2 + (y+4)^2$ und $h(x,y) := x^2 + y^2 - 100$. Dann lautet das Problem

$$\min f(x,y) \quad \text{unter} \quad h(x,y) = 0.$$

Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (2(x-3), 2(y+4)) \\ \nabla h(x,y) &= (2x, 2y) \\ \nabla^2 f(x,y) &= 2I_2 \\ \nabla^2 h(x,y) &= 2I_2. \end{aligned}$$

Da $(x,y)=(0,0)$ nicht zulässig ist und $\nabla h(x,y)$ für $(x,y)\neq(0,0)$ linear unabhängig ist, sind alle zulässigen (x,y) reguläre Punkte der Nebenbedingungen. Notwendige Bedingung dafür, dass (x,y) Minimalstelle ist, ist also, dass es ein $\lambda\in\mathbb{R}$ gibt, so dass die Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$2(x-3) = 2\lambda x \tag{2}$$
$$2(y+4) = 2\lambda y \tag{3}$$

und die Bedingung

$$x^2+y^2=100 \tag{4}$$

gelten. (2) und (3) sind äquivalent zu

$$x(1-\lambda) = 3 \tag{5}$$
$$y(1-\lambda) = -4. \tag{6}$$

Es gilt $\lambda\neq 1$, ansonsten ergäben obige Gleichungen (5) und (6) einen Widerspruch. Also ist $x=\frac{3}{1-\lambda}$ und $y=-\frac{4}{1-\lambda}$, was wir in (4) einsetzen und erhalten

$$\frac{9}{(1-\lambda)^2}+\frac{16}{(1-\lambda)^2}=100,$$

also $\frac{1}{4}=(1-\lambda)^2$, also $\lambda_1=\frac{1}{2}$ bzw. $\lambda_2=\frac{3}{2}$. Damit erhalten wir die beiden Kandidaten $(x_1,y_1)=(6,-8)$ bzw. $(x_2,y_2)=(-6,8)$.
Da der Zielfunktionswert für (x_2,y_2) mit 225 größer ist als der Wert 25 zu (x_1,y_1), kann bei (x_2,y_2) kein globales Minimum liegen. Da f stetig und der Zulässigkeitsbereich kompakt ist, muss es ein globales Minimum geben, und dies kann dann nur (x_1,y_1) sein. (Anders argumentiert: Die Matrix $L_1=\nabla^2 f(x_1,y_1)-\lambda_1\nabla^2 h(x_1,y_1)=I_2$ ist positiv definit, also liegt bei (x_1,y_1) tatsächlich ein lokales Minimum.)
Somit lautet die Optimallösung $(6,-8)$ mit Zielfunktionswert 25.
Bemerkung: Wegen $L_2=\nabla^2 f(x_2,y_2)-\lambda_2\nabla^2 h(x_2,y_2)=-I_2$ liegt an der Stelle des anderen Kandidaten $(x_2,y_2)=(-6,8)$ ein Maximum, was man aus Symmetriegründen auch erwarten würde.

Aufgabe 12.
Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$ und $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(a) Beschreiben Sie das Verfahren der Goldenen-Schnitt-Suche zur Suche eines globalen Minimums von f.

Lösung:

Die Goldener-Schnitt-Suche ist ein iteratives Verfahren, welches in jedem Schritt ein Intervall betrachtet, welches durch zwei Unterteilungspunkte derart in drei Teilintervalle unterteilt ist, dass die Länge ℓ_1 des linkes Randintervalls gleich der Länge des rechten Randintervalls ist und die Länge ℓ_2 des kürzeren Mittelintervalls damit im Verhältnis des goldenen Schnitts steht:

$$\frac{\ell_1}{\ell_2}=\frac{\ell_1+\ell_2}{\ell_1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Die Funktion wird nun an jeweils neuen Unterteilungspunkten ausgewertet. Ist die Funktion an der Stelle des linken Unterteilungspunktes größer als an der Stelle des rechten Unterteilungspunkts, so wird für den nächsten Schritt das Intervall vom linken Unterteilungspunkt bis zum rechten Randpunkt gewählt, ansonsten das Intervall vom linken Randpunkt zum rechten Unterteilungspunkt.

Im ersten Schritt wird mit dem ganzen Intervall $[a,b]$ gestartet. Das Verfahren endet, wenn die Intervalllänge eine vorgegebene Genauigkeit unterschreitet. Als Approximation für das Minimum wird ein Wert aus dem zuletzt betrachteten Intervall ausgegeben.

(b) Geben Sie eine mögliche hinreichende Bedingung an die Funktion f an, die garantiert, dass die Goldener-Schnitt-Suche tatsächlich gegen ein globales Minimum konvergiert.

Lösung:

Hier sind vier mögliche richtige Antworten:

- f ist konstant.
- f ist strikt konvex.
- f ist konvex.
- f ist strikt unimodal.