Aufgabe 1.
Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}.$$

Lösungsvorschlag:
Wir zeigen dies per vollständiger Induktion nach n. Für $n = 0$ gilt

$$\prod_{k=1}^{0}(2k-1) = 1 = \frac{1}{1 \cdot 1} = \frac{(2 \cdot 0)!}{0! \cdot 2^0}.$$

Sei nun $n > 0$ und gelte die Behauptung für $n-1$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(2k-1) &= (2n-1)\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1) \\
&\overset{IV}{=} (2n-1)\frac{(2n-2)!}{(n-1)!2^{n-1}} \\
&= \frac{(2n-1)\cdot(2n)}{n \cdot 2} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!2^{n-1}} \\
&= \frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}.
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt also, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2.
Seien $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen mit

$$\begin{aligned}
f(n) &:= n^2 \\
g(n) &:= n^4 - 10000
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass $f = O(g)$.
Lösungsvorschlag:
Es gilt

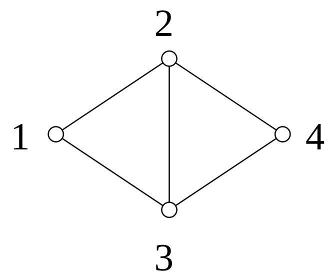
$$g(n) = n^4 - 10000 = (n^2+100)\underbrace{(n^2-100)}_{\geq 1 \text{ falls } n \geq 11}. \tag{1}$$

Somit folgt mit $n_0 = 11$ und $C = 1$, dass für alle $n \geq n_0$

$$|f(n)| = n^2 \leq n^2 + 100 \overset{(1)}{\leq} (n^2+100)(n^2-100) \leq n^4 - 10000 = C \cdot g(n)$$

gilt, was zu zeigen war.

Aufgabe 3.
Gegeben sei folgender Graph G mit Knotenmenge $\{1,2,3,4\}$:



(a) Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix von G.

Lösungsvorschlag:

Die Adjazenzmatrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die Anzahl der Spaziergänge der Länge 4

Lösungsvorschlag:

Dazu berechnen wir

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 9 & 10 \\ 9 & 15 & 14 & 9 \\ 9 & 14 & 15 & 9 \\ 10 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Damit lesen wir ab: die Anzahl der Spaziergänge der Länge 4

(i) von Knoten 1 nach Knoten 1
ist 10,

(ii) von Knoten 1 nach Knoten 2
ist 9,

(iii) von Knoten 1 nach Knoten 4
ist 10,

(iv) von Knoten 2 nach Knoten 2

ist 15 bzw.

(v) von Knoten 2 nach Knoten 3

ist 14.

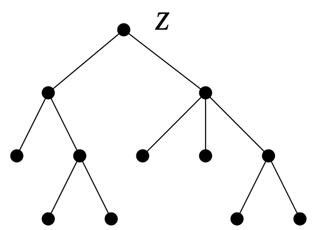
Aufgabe 4.
Zeigen oder widerlegen Sie: $(9,8,7,6,6,6,6,3,3,3,1,1)$ ist Valenzsequenz eines Graphen.
Lösungsvorschlag:
Da die Anzahl der ungeraden Einträge der Sequenz ungerade ist (es gibt 7 ungerade Einträge), kann die Sequenz nicht Valenzsequenz eines Graphen sein.

Aufgabe 5.
Zeichnen Sie die gepflanzten Bäume zu folgenden Codes. Welcher der Codes ist Code eines Baumes? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) ((()(()()))(()()(()())))

Lösungsvorschlag:

Der gepflanzte Baum zu dem Code sieht wie folgt aus:

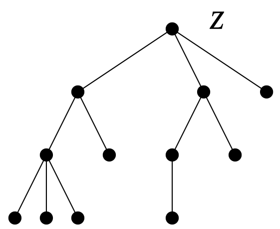


Jedoch ist schon der Code (()(()())) zum linken Kindknoten der Wurzel z nicht lexikographisch sortiert, da $() \not\preceq (()())$. Somit ist der Code nicht Code eines Baumes.

(b) (((()()())())((())())())

Lösungsvorschlag:

Der gepflanzte Baum zu dem Code sieht wie folgt aus:



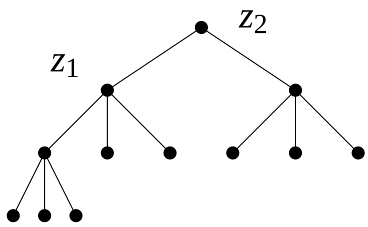
Der Code ((()()())()) zum linken Kind der Wurzel ist lexikographisch sortiert, da $(()()()) \preceq ()$. Der Code ((())()) zum mittleren Kind der Wurzel ist lexikographisch sortiert, da $(()) \preceq ()$. Daher ist der Gesamtcode lexikographisch sortiert, da auch noch

$(((()()())()) \preceq ((())()) \preceq ()$ gilt. Somit ist der Code der Code des Wurzelbaumes mit der Wurzel z. Ferner ist z der einzige Zentrumsknoten, somit ist der Wurzelbaum korrekt gewurzelt und sein Code ist Code eines Baumes.

(c) (((()()())()())(()()()))

Lösungsvorschlag:

Der gepflanzte Baum zu dem Code sieht wie folgt aus:



Die beiden Zentrumsknoten sind z_1 und z_2. Entfernt man die Kante z_1z_2, so ist der Code des in z_1 gewurzelten Wurzelbaumes gleich $C_1 = (((()()())()())$ und der des in z_2 gewurzelten Wurzelbaumes gleich $C_2 = ((()()()))$. Aber es gilt $C_1 \preceq C_2$ und $C_1 \neq C_2$, somit müsste der zum Baum gehörige Code der zum in z_1 gewurzelten Wurzelbaum gehörige Code sein. Da aber der vorliegende Code zum in z_2 gewurzelten Wurzelbaum gehört, kann er nicht Code eines Baumes sein.

Aufgabe 6.
Schreiben Sie die Dezimalzahl $33\frac{17}{18}$ um ins Dreiersystem (3-adische Darstellung) in Kommaschreibweise.

Lösungsvorschlag:
Durch Division mit Rest erhalten wir:

$$\begin{array}{rcl}
33\frac{17}{18}:27 = & 33\frac{17}{18}:27 = & 1 \text{ Rest } 6\frac{17}{18} \\
6\frac{17}{18}:\ 9 = & 6\frac{17}{18}:\ 9 = & 0 \text{ Rest } 6\frac{17}{18} \\
6\frac{17}{18}:\ 3 = & 6\frac{17}{18}:\ 3 = & 2 \text{ Rest } \frac{17}{18} \\
\frac{17}{18}:\ 1 = & \frac{17}{18}:\ 1 = & 0 \text{ Rest } \frac{17}{18} \\
\frac{17}{18}:\ \frac{1}{3} = & \frac{17}{18}:\frac{6}{18} = & 2 \text{ Rest } \frac{5}{18} \\
\frac{5}{18}:\ \frac{1}{9} = & \frac{5}{18}:\frac{2}{18} = & 2 \text{ Rest } \frac{1}{18} \\
\frac{1}{18}:\frac{1}{27} = & \frac{3}{54}:\frac{2}{54} = & 1 \text{ Rest } \frac{1}{54} \qquad \left(= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{18}\right)
\end{array}$$

Damit haben wir eine Periode der Länge 1 gefunden und es ist

$$33\frac{17}{18} = 1020.22\overline{1}_{(3)}.$$

Aufgabe 7.

Sei $\lambda > 0$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda^2+4 & \lambda-2 \\ -1 & \lambda-2 & 11 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A der Form $LU = A$ mit unterer Dreiecksmatrix L und oberer Dreiecksmatrix U.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda^2+4 & \lambda-2 \\ -1 & \lambda-2 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{r|rr} 1 & 2 & -1 \\ \hline 2 & \lambda^2 & \lambda \\ -1 & \lambda & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{\lambda>0} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & -1 \\ \hline 2 & \lambda^2 & \lambda \\ \cline{2-3} -1 & \frac{1}{\lambda} & 9 \end{array}\right)$$

Es gilt also $A = LU$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{\lambda} & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\|B\|_1$ in Abhängigkeit von λ.

Lösungsvorschlag:

Es gilt nach der Definition der Spaltensummennorm

$$\|B\|_1 = \max\left\{|1|+|2|+|-1|, |1|+\left|\frac{1}{\lambda}\right|, |1|\right\} = \max\left\{4, 1+\frac{1}{\lambda}\right\}.$$

Ferner gilt die Äquivalenz

$$\begin{array}{rrcl} & 4 & > & 1+\dfrac{1}{\lambda} \\ \Longleftrightarrow & 3 & > & \dfrac{1}{\lambda} \\ \overset{\lambda>0}{\Longleftrightarrow} & \lambda & > & \dfrac{1}{3}. \end{array}$$

Also gilt

$$\|B\|_1 = \begin{cases} 1+\frac{1}{\lambda} & \text{falls } 0 < \lambda \leq \frac{1}{3} \\ 4 & \text{falls } \lambda > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Aufgabe 8.
Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & 5x - xz + y^2 + 2y - yz \\ \text{unter} & \qquad\qquad x + z \;=\; 4 \end{array}$$

Lösungsvorschlag:
Mittels der Substitution $z = 4 - x$ ist das Problem äquivalent zum unrestringierten Problem $\min f(x,y)$, wobei

$$f(x,y) = 5x - x(4-x) + y^2 + 2y - y(4-x) = x^2 + y^2 + xy + x - 2y.$$

Wir berechnen den Gradienten

$$\nabla f(x,y) = (2x + y + 1, x + 2y - 2)$$

und die Hessematrix

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notwendige Bedingung dafür, dass bei (x,y) ein Minimum vorliegt, ist, dass $\nabla f(x,y) = 0$, d.h.

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & -1 \\ x & + & 2y & = & 2, \end{array}$$

was die Lösung $y = \frac{5}{3}$ und $x = -\frac{4}{3}$ hat.
Weil

$$(s,t) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = 2s^2 + 2st + 2t^2 = s^2 + t^2 + (s+t)^2 > 0$$

im Falle $(s,t) \neq (0,0)$ gilt, ist $\nabla^2 f(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ positiv definit. Also liegt bei $(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ ein lokales Minimum. Dieses ist ein globales, da die Funktion f konvex ist wegen der positiven Definitheit der Hessematrix an jeder Stelle.
Bezogen auf die ursprüngliche Funktion heißt dies, dass deren einziges lokales und globales Minimum bei $(x,y,z) = (-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{16}{3})$ liegt.

Aufgabe 9.
Sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \frac{1}{5^{4^n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bestimmen Sie den Grenzwert und die Konvergenzrate der Folge.
Lösungsvorschlag:
Der Grenzwert der Folge ist offenbar 0. Zur Bestimmung der Konvergenzrate betrachten wir

$$\frac{|a_{n+1} - 0|}{|a_n - 0|^p} = \frac{5^{-4^{n+1}}}{5^{-4^n p}} = 5^{(p-4)4^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad p < 4 \\ 1 & \text{falls} \quad p = 4 \\ \infty & \text{falls} \quad p > 4. \end{cases}$$

Damit ist die Konvergenzrate gleich 4.

Aufgabe 10.

Sei $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, A eine reelle $(m \times n)$-Matrix. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^\top x & & \\ \text{unter} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0. \end{array} \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie das dazu duale Programm.

Lösungsvorschlag:

In Standardform lautet das primale Programm

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & c^\top x & & & & \\ \text{unter} & Ax & + & (-I_m)z & = & b \\ & & & x,z & \geq & 0. \end{array}$$

Dualisieren wir es, erhalten wir

$$\begin{array}{lrcl} \min & y^\top b & & \\ \text{unter} & y^\top A & \geq & c^\top \\ & y^\top(-I_m) & \geq & 0^\top \end{array}$$

oder, anders geschrieben,

$$\begin{array}{lrcl} \min & y^\top b & & \\ \text{unter} & y^\top A & \geq & c^\top \\ & y & \leq & 0. \end{array}$$

(b) Es gebe $x \geq 0$ mit $Ax \geq b$ und $\tilde{y} \geq 0$ mit $\tilde{y}^\top A \leq -c^\top$. Zeigen Sie, dass der Zielfunktionswert des primalen Programms kleiner oder gleich dem Zielfunktionswert des dualen Programms ist, ohne Sätze des Kurses zu benutzen.

Lösungsvorschlag:

Gebe es

$$x \geq 0 \tag{3}$$

mit

$$Ax \geq b. \tag{4}$$

Sei ferner $\tilde{y} \geq 0$ mit $\tilde{y}^\top A \leq -c^\top$. Dann ist mit $y = -\tilde{y}$

$$y \leq 0 \tag{5}$$

mit

$$y^\top A \geq c^\top, \tag{6}$$

also y zulässig für das duale Programm.

Dann folgt

$$c^\top x \overset{(3),(6)}{\leq} y^\top Ax \overset{(4),(5)}{\leq} y^\top b,$$

wie behauptet.

Aufgabe 11.
Ein Speiseeishersteller verwendet zur Herstellung von Eisschälchen zwei Grundzutaten: Sahne und Zucker. 1000 Gramm Sahne kosten ihn 2 Euro, 1000 Gramm Zucker kostet 1 Euro. Jedes Eisschälchen darf höchstens 50 Gramm wiegen. (Wir gehen dabei davon aus, dass es nur aus Sahne und Zucker besteht, Verpackung wird vernachlässigt; ferner geht bei der Produktion keine Sahne und kein Zucker verloren.) Damit das Eis genießbar ist, dürfen auf eine Gewichtseinheit Zucker höchstens 4 Gewichtseinheiten Sahne kommen; auf eine Gewichtseinheit Zucker müssen andererseits mindestens 3 Gewichtseinheiten Sahne in der Mischung kommen. Ferner muss ein Eisschälchen mindestens 32 Gramm Sahne enthalten. Es sollen 1000 Eisschälchen mit möglichst niedrigen Herstellungskosten produziert werden. Wieviel Sahne und Zucker sollte ein Eisschälchen dazu enthalten?

(a) Modellieren Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem.

Lösungsvorschlag:

Sei x_S die Menge an Sahne bzw. x_Z die Menge an Zucker in einem Eisschälchen in Gramm. Das Problem lautet dann

$$\begin{aligned} \min 2x_S + x_Z & & \\ x_S + x_Z &\leq 50 \qquad (7)\\ 4x_Z &\geq x_S \qquad (8)\\ 3x_Z &\leq x_S \qquad (9)\\ x_S &\geq 32 \qquad (10)\\ x_S, x_Z &\geq 0. \qquad (11) \end{aligned}$$

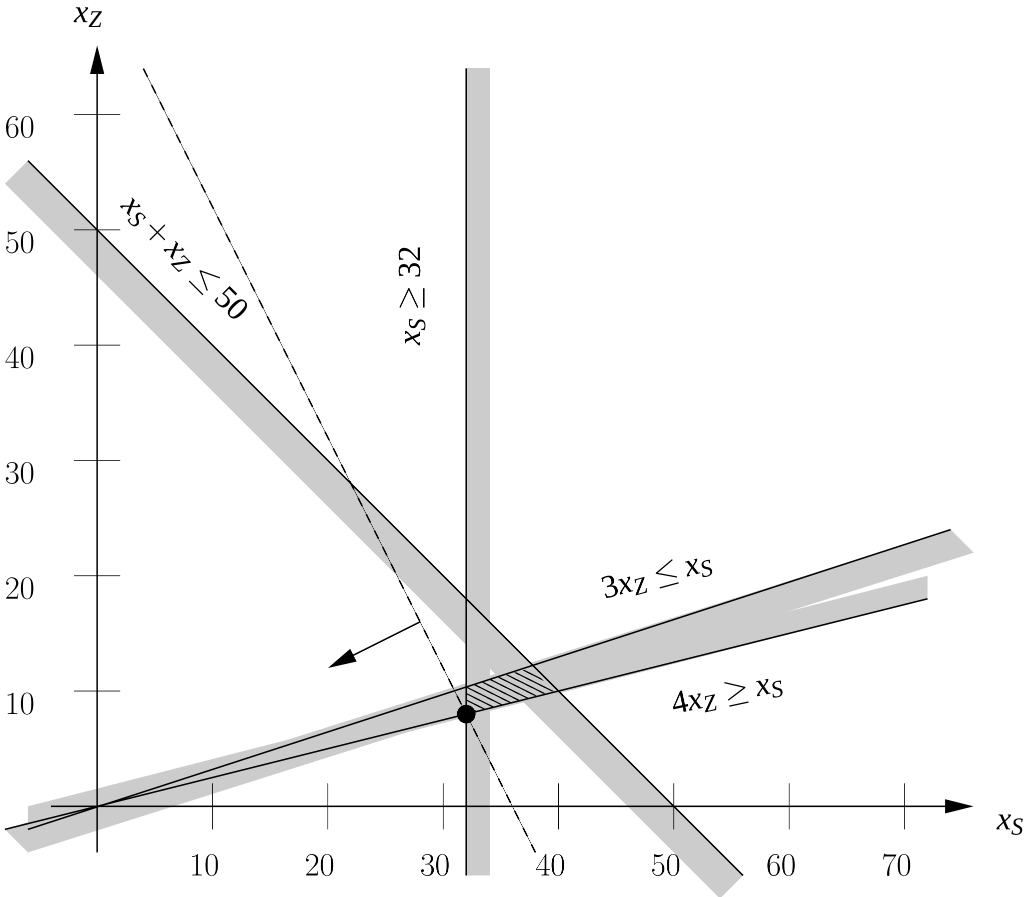
(b) Lösen Sie das Problem (graphisch oder mit einem Ad-Hoc-Argument).

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit (Ad-Hoc-Argument):

Damit ein Schälchen billig ist, muss es möglichst wenig Inhalt haben, also insbesondere möglichst wenig Sahne enthalten. Nach (10) muss also $x_S = 32$ sein. Dann tut man möglichst wenig Zucker dazu, so dass (8) noch gerade erfüllt ist, also $x_Z = 8$. Diese Lösung $(x_S, x_Z) = (32, 8)$ erfüllt offenbar auch (7), (9) und (11). Die entstehenden Kosten für 1000 Schälchen sind 72 Euro.

2. Lösungsmöglichkeit (graphisch):



Die Optimallösung liest man ab als $(32, 8)$. Sie deckt sich erfreulicherweise mit der aus der 1. Lösungsmöglichkeit.

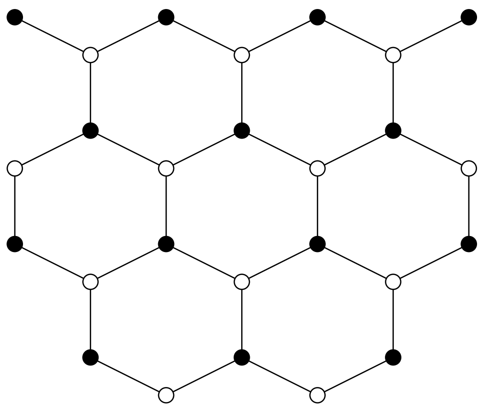
Aufgabe 12.

Zeigen Sie:

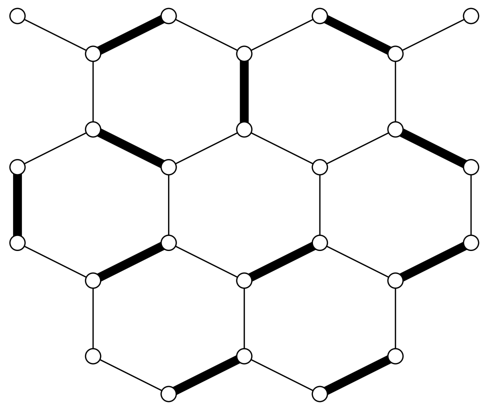
(a) Der unten abgebildete Graph ist bipartit.

Lösungsvorschlag:

Wir können die Knoten wie folgt schwarz und weiß färben, so dass benachbarte Knoten verschiedene Farben aufweisen:

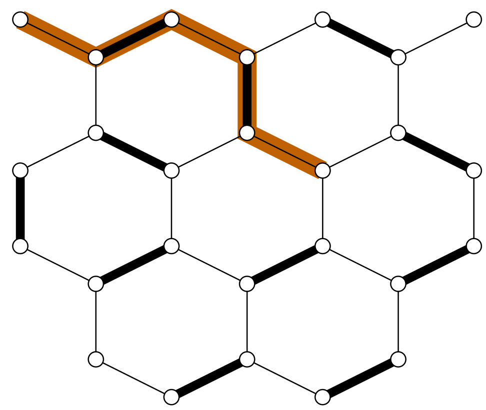


(b) Das fett eingezeichnete Matching ist nicht maximal.

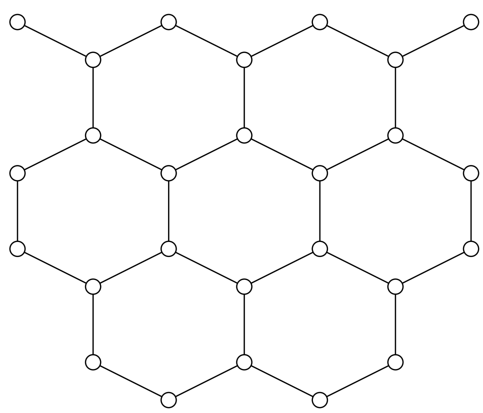


Lösungsvorschlag:

Das Matching ist nicht maximal, da wir folgenden augmentierenden Weg (braun unterlegt) finden:

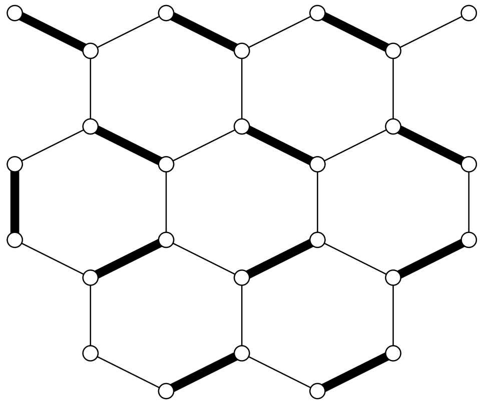


(c) Zeichnen Sie ein maximales Matching in die Darstellung des Graphen **unten** ein. Beweisen Sie darunter die Maximalität.



Lösungsvorschlag:

Tauschen wir auf dem in (b) gefundenen Weg die Matching- und Nichtmatchingkanten aus, so erhalten wir folgendes Matching:



Da die beiden verbliebenen ungematchten Knoten zur gleichen Farbklasse gehören, siehe (a), kann es keinen augmentierenden Weg mehr geben, also ist das Matching maximal.