6 Punkte **Aufgabe 1.**

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen a_n sei rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_n &= 2a_{n-1} + 2^{n-1} \quad \text{falls } n \geq 1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n = n2^{n-1}.$$

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen die Behauptung per Induktion über n. Für $n = 0$ gilt

$$a_0 = 0 = 0 \cdot 2^{-1}.$$

Sei nun $n > 0$ und gelte

$$(IV) \qquad a_{n-1} = (n-1)2^{n-2}.$$

Dann folgt

$$a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1} \overset{(IV)}{=} 2(n-1)2^{n-2} + 2^{n-1} = (n-1+1)2^{n-1} = n2^{n-1}.$$

Somit folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ nach dem Prinzip der vollständigen Induktion.

Aufgabe 2.

In dieser Aufgabe geht es um Permutationen.

3 Punkte (a) Zerlegen Sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 8 & 12 & 6 & 4 & 17 & 11 & 16 & 7 & 3 & 18 & 9 & 2 & 13 & 5 & 14 & 10 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

in disjunkte Zyklen.

Lösungsvorschlag:

Nach dem Algorithmus aus dem Kurstext ergibt sich als Zyklenzerlegung:

$\langle 1,8,7,16,10,18\rangle\langle 2,12\rangle\langle 3,6,11,9\rangle\langle 4\rangle\langle 5,17,15,14\rangle\langle 13\rangle$

3 Punkte (b) Wie wahrscheinlich ist es, unter der Annahme der Gleichverteilung auf allen Permutationen fixer Länge, dass in der Zyklenzerlegung einer Permutation der Länge 18 mindestens ein Zyklus der Länge ≥ 2 auftritt?

Lösungsvorschlag:

Die Menge Ω der Elementarereignisse sei die Menge aller Permutationen der Länge 18. Sei A das Ereignis aller der $\sigma \in \Omega$, bei denen in der Zyklenzerlegung mindestens ein Zyklus der Länge ≥ 2 auftritt. Das Komplementärereignis $\overline{A}$ umfasst die Permutationen, bei denen alle Zyklen Länge 1 haben, also nur eine Permutation, nämlich die Identität handelt. Da $|\Omega| = 18!$ und wir Gleichverteilung annehmen, gilt für die Wahrscheinlichkeit von $\overline{A}$, dass

$$p(\overline{A}) = \frac{1}{18!}.$$

Somit folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{18!}.$$

8 Punkte **Aufgabe 3.**

Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt einen Graphen mit genau 10 Knoten, von denen zwei den Grad 8, zwei den Grad 7, zwei den Grad 5, einer den Grad 4 und drei den Grad 2 haben.
Geben Sie, falls möglich, einen solchen Graphen explizit an.

Lösungsvorschlag:

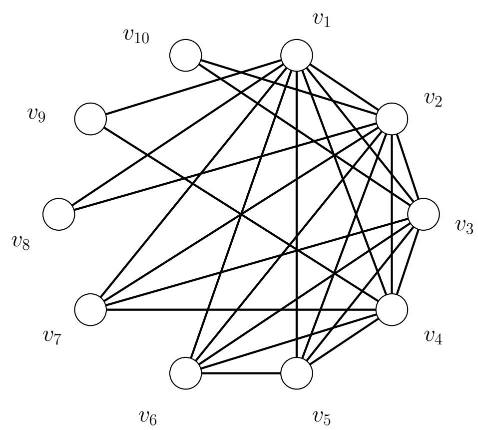
Wir zeigen mittels des Verfahrens von Havel und Hakimi, dass es einen solchen Graphen gibt, und bestimmen ihn danach aus den Schritten des Algorithmus.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
8	8	7	7	5	5	4	2	2	2
	7	6	6	4	4	3	1	1	2
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_{10}	v_8	v_9
	7	6	6	4	4	3	2	1	1
		5	5	3	3	2	1	0	1
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_{10}	v_9	v_8
		5	5	3	3	2	1	1	0
			4	2	2	1	0	1	0
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_9	v_{10}	v_8
			4	2	2	1	1	0	0
				1	1	0	0	0	0
					0	0	0	0	0

Da es einen Graphen mit 5 isolierten Knoten gibt, gibt es auch einen Graphen mit der Valenzsequenz

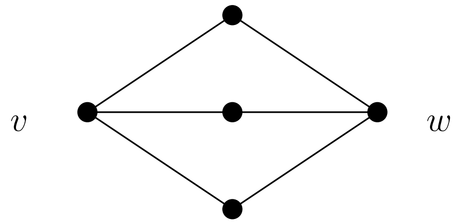
$$(8, 8, 7, 7, 5, 5, 4, 2, 2, 2).$$

Ein solcher ist z.B.



5 Punkte **Aufgabe 4.**

Betrachten Sie den folgenden Graphen.



Bestimmen Sie die Anzahl der Spaziergänge der Länge 4 von v nach w.

Tipp: Es gibt eine kurze elementare Lösung.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit:

Die vierte Potenz der Adjazenzmatrix des Graphen, wobei v bzw. w in der ersten bzw. zweiten Zeile stehen, ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

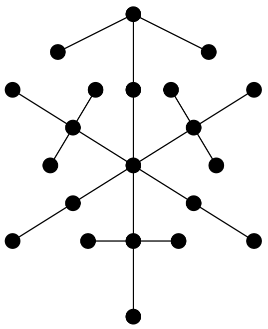
Daran lesen wir ab, dass die Anzahl der Spaziergänge der Länge 4 von v nach w gleich 18 ist.

2. Lösungsmöglichkeit:

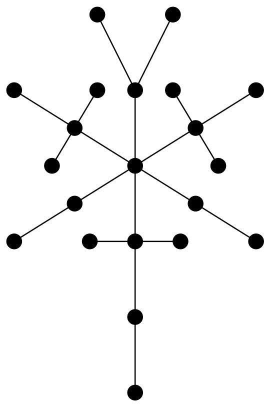
Starten wir einen Spaziergang von v, so haben wir im ersten Schritt 3 Möglichkeiten, im zweiten Schritt 2, im dritten 3 und im letzten Schritt nur eine, um zu w zu kommen. Insgesamt haben wir also $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ Möglichkeiten.

6 Punkte **Aufgabe 5.**

Zeigen oder widerlegen Sie: Die unten abgebildeten Bäume T_1 und T_2 sind isomorph.



Der Baum T_1



Der Baum T_2

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit:

Die Bäume sind nicht isomorph, da der einzige Knoten vom Grad 6 und der einzige Knoten vom Grad 3 in T_2 benachbart sind, in T_1 aber nicht.

2. Lösungsmöglichkeit:

Der Code von T_1 lautet:

$$(((()()))(()()())(()()())(()()())(())(())).$$

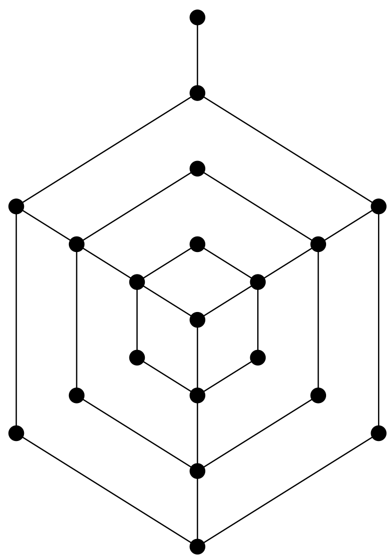
Der Code von T_2 lautet:

$$(((())()())(()()())(()()())(()())(())(())).$$

Da die Codes sich an der sechsten Stelle unterscheiden, sind die Bäume nicht isomorph.

Aufgabe 6.

Betrachten Sie folgenden Graphen G.

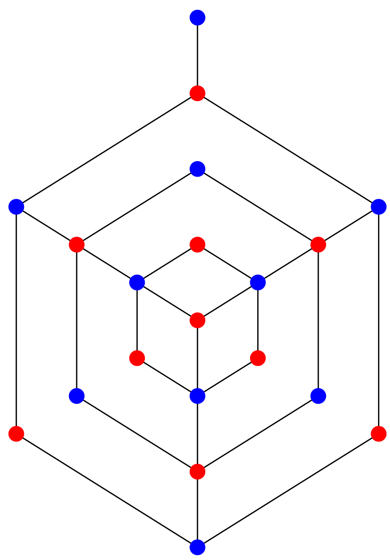


2 Punkte (a) Zeigen Sie: Der Graph ist bipartit.

Geben Sie die Bipartitionen an.

Lösungsvorschlag:

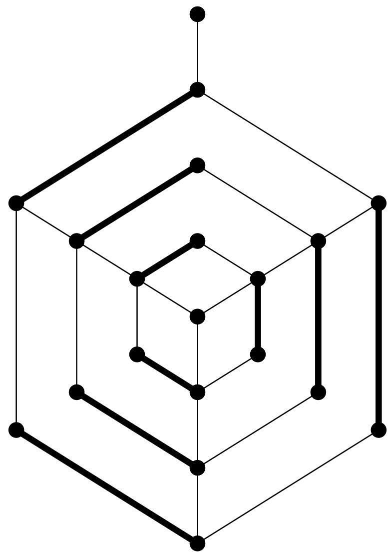
In der folgenden Abbildung ist eine Aufteilung der Knotenmenge in eine Menge U roter Knoten und eine Menge W blauer Knoten angegeben. Diese Aufteilung ist eine Bipartition, da keine zwei roten und keine zwei blauen Knoten direkt benachbart sind.



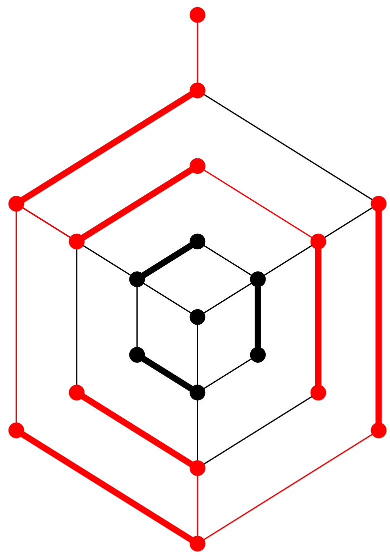
8 Punkte (b) Bestimmen Sie ein maximales Matching in G und beweisen Sie dessen Maximalität.

Lösungsvorschlag:

Sehr einfach findet man folgendes Matching (dicke Kanten) in dem Graphen:

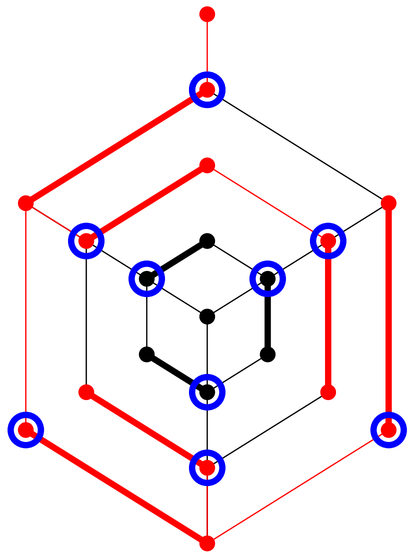


Wir behaupten, dass dieses maximal ist. Dazu nehmen wir den ungematchten Knoten vom Grad 1 und konstruieren den Breitensuchbaum zum Finden eines augmentierenden Weges gemäß Matchingalgorithmus. Dieser ist unten rot eingezeichnet.

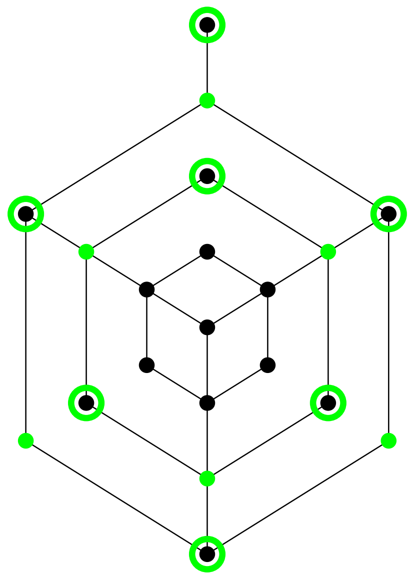


Wie man sieht, findet der Algorithmus keinen augmentierenden Weg. Daher ist das angegebene Matching maximal. Aus dem obigen Bild findet man auch zwei Beweise für die Maximalität.

1. Beweismöglichkeit: Es gibt eine Knotenüberdeckung (blau umkreiste Knoten in der folgenden Abbildung) mit 9 Knoten. Daher ist das Matching, welches 9 Kanten umfasst, maximal und die Knotenüberdeckung minimal.



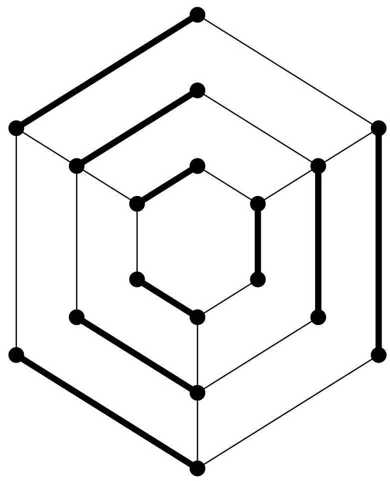
2. Beweismöglichkeit: Es gibt eine Hallmenge (grün umkreiste Knoten in der folgenden Abbildung). Dies ist hier eine Menge von 7 Knoten, die nur insgesamt 6 Nachbarn (grün ausgefüllte Knoten in der folgenden Abbildung) besitzen. Nach dem Heiratssatz von Hall kann es also kein perfektes Matching geben. Da in dem gefundenen Matching aus jeder Bipartition nur ein Knoten nicht gematcht ist, muss dieses somit maximal sein.



3 Punkte (c) Löschen Sie eine kleinstmögliche Anzahl an Knoten aus G, so dass der entstehende induzierte Teilgraph H ein perfektes Matching hat. Geben Sie die gelöschten Knoten und ein perfektes Matching von H explizit an. Beweisen Sie, dass bei Löschen von weniger Knoten in G nur Graphen entstehen, die kein perfektes Matching besitzen.

Lösungsvorschlag:

Löscht man keinen Knoten, so gibt es nach (b) kein perfektes Matching. Löscht man einen Knoten, so ist die Anzahl der Knoten ungerade, also gibt es kein perfektes Matching. Löscht man zwei Knoten, nämlich den oberen und den mittleren, so gibt es das folgende perfekte Matching:



5 Punkte **Aufgabe 7.**

Schreiben Sie die Dezimalzahl 14,4 ins 2er-System (d.h. Binärsystem) um.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{array}{rcccccll}
14\frac{2}{5} & : & 8 & & & & = & 1 \text{ Rest } 6\frac{2}{5} \\
6\frac{2}{5} & : & 4 & & & & = & 1 \text{ Rest } 2\frac{2}{5} \\
2\frac{2}{5} & : & 2 & & & & = & 1 \text{ Rest } \frac{2}{5} \\
\frac{2}{5} & : & 1 & & & & = & 0 \text{ Rest } \frac{2}{5} \\
\frac{2}{5} & : & \frac{1}{2} & = & \frac{4}{10} & : \frac{5}{10} & = & 0 \text{ Rest } \frac{4}{10} \\
\frac{4}{10} & : & \frac{1}{4} & = & \frac{8}{20} & : \frac{5}{20} & = & 1 \text{ Rest } \frac{3}{20} \\
\frac{3}{20} & : & \frac{1}{8} & = & \frac{6}{40} & : \frac{5}{40} & = & 1 \text{ Rest } \frac{1}{40} \\
\frac{1}{40} & : & \frac{1}{16} & = & \frac{2}{80} & : \frac{5}{80} & = & 0 \text{ Rest } \frac{2}{80} \qquad \frac{2}{80} = \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{5}
\end{array}$$

Es folgt:

$$14,4 = 1110,\overline{0110}_{(2)}.$$

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 8 & 25 & -11 \\ 2 & -11 & 75 \end{pmatrix}.$$

und der Vektor $b = (-2, 8, 28)^\top$.

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 8 & 25 & -11 \\ 2 & -11 & 75 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 9 & -15 \\ \frac{1}{2} & -15 & 74 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 9 & -15 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{3} & 49 \end{pmatrix}$$

Somit lautet eine LU-Zerlegung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 8 & 25 & -11 \\ 2 & -11 & 75 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 9 & -15 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}}_{U}$$

2. Lösungsmöglichkeit:

Wir berechnen die Cholesky-Faktorisierung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 8 & 25 & -11 \\ 2 & -11 & 75 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}}_{L'} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}}_{(L')^\top}$$

Dies ist eine weitere LU-Zerlegung.

3 Punkte (b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Lösungsvorschlag:

Wegen $LUx = Ax = b$ genügt es, zunächst $Ly = b$ und dann $Ux = y$ zu lösen. Damit ergibt sich mit L und U aus der ersten Lösungsmöglichkeit als Lösung von $Ly = b$

$$y = (-2, 12, 49)^\top$$

und damit als Lösung von $Ux = y$

$$x = (-7, 3, 1)^\top.$$

x ist die gesuchte Lösung.

1 Punkt (c) Bestimmen Sie $\|A\|_1$.

Lösungsvorschlag:

$$\|A\|_1 = \max\{4+8+2, 8+25+|-11|, 2+|-11|+75\} = \max\{14, 44, 88\} = 88.$$

8 Punkte **Aufgabe 9.**
Lösen Sie das nichtlineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rccccccl} \min & x^2 & + & y^2 & + & z^2 & & \\ \text{unter} & x & + & y & + & z & = & 1 \\ & x & - & y & & & = & 0. \end{array}$$

Lösungsvorschlag:
1. Lösungsmöglichkeit:
Wir substituieren $y = x$ und

$$z = 1 - x - y = 1 - 2x$$

in der Zielfunktion, die somit lautet

$$g(x) = f(x, x, 1-2x) = x^2 + x^2 + (1-2x)^2 = 6x^2 - 4x + 1.$$

Es ist

$$\begin{aligned} g'(x) &= 12x - 4, \\ g''(x) &= 12. \end{aligned}$$

Das einzige Extremum von g liegt also bei $x = 1/3$ und es handelt sich dabei um ein lokales Minimum. Wegen $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$ handelt es sich sogar um ein globales Minimum.
Somit liegt das einzige globale Minimum von f unter den obigen Nebenbedingungen bei

$$(x, y, z) = (1/3, 1/3, 1/3).$$

2. Lösungsmöglichkeit:
Seien

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\ h_1(x,y,z) &= x + y + z - 1 \\ h_2(x,y,z) &= x - y \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= (2x, 2y, 2z) \\ \nabla h_1(x,y,z) &= (1,1,1) \\ \nabla h_2(x,y,z) &= (1,-1,0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x,y,z) &= 2I_3 \\ \nabla^2 h_1(x,y,z) &= 0 \\ \nabla^2 h_2(x,y,z) &= 0. \end{aligned}$$

Da $(1,1,1)$ und $(1,-1,0)$ linear unabhängig sind, ist jeder Punkt regulärer Punkt der Nebenbedingungen. Somit lauten die Kuhn-Tucker-Bedingungen dafür, dass $(x,y,z)^\top$ Lösungskandidat der Optimierungsaufgabe ist:

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda_1 + \lambda_2 && (1) \\ 2y &= \lambda_1 - \lambda_2 && (2) \\ 2z &= \lambda_1 && (3) \\ x+y+z &= 1 && (4) \\ x-y &= 0 && (5) \end{aligned}$$

Setzen wir (3) und (5) in die übrigen Gleichungen ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2x &= 2z + \lambda_2 && (6) \\ 2x &= 2z - \lambda_2 && (7) \\ x+x+z &= 1 && (8) \\ & && (9) \end{aligned}$$

Addieren wir (6) und (7), so ergibt sich $4x = 4z$, also $x = z$. Setzen wir dies in (8) ein, so erhalten wir $3z = 1$, also

$$(x,y,z) = (1/3, 1/3, 1/3).$$

Weil $\nabla^2 f(x,y,z)$ als positives Vielfaches einer Einheitsmatrix positiv definit ist, handelt es sich bei der gefundenen Stelle um ein lokales Minimum. Da f strikt konvex ist, bzw., anders argumentiert, da $\lim_{t\to\infty} f(tv) = \infty$ für jeden Vektor $v \neq 0$, handelt es sich um ein globales Minimum.

Aufgabe 10.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine reelle $(m \times n)$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ reellwertige Vektoren für $m,n \geq 1$. Sei

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

der Zulässigkeitsbereich und

$$f_c : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_c(x) = c^\top x$$

die Zielfunktion eines linearen Optimierungsproblems. Sei ferner

$$g : [-100, 200] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad g(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \\ \vdots \\ t^2 \end{pmatrix}$$

die Funktion, die zu t in jeder Komponente den Wert t^2 annimmt.

4 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: S ist konvex.

Lösungsvorschlag:

Seien $x, y \in S$, d.h. $Ax \leq b$ und $Ay \leq b$. Sei $\lambda \in [0,1]$ und $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

Zu zeigen ist: $z \in S$.

Dies folgern wir wie folgt.

$$Az = A(\lambda x + (1-\lambda)y) = \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{Ax}_{\leq b} + \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0} \underbrace{Ay}_{\leq b} \leq \lambda b + (1-\lambda)b = b,$$

somit ist $z \in S$.

6 Punkte (b) Bestimmen Sie die Menge

$$C_1 = \{c \in \mathbb{R}^n \mid f_c \circ g \text{ ist konvex}\}$$

und die Menge

$$C_2 = \{c \in \mathbb{R}^n \mid f_c \circ g \text{ ist strikt unimodal}\}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

$$C_1 = C_2.$$

Lösungsvorschlag:

Wir widerlegen die Behauptung.

Es gilt:

$$h_c(t) := f_c \circ g(t) = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right)}_{s_c :=} t^2$$

Also ist

$$h_c''(t) = 2s_c.$$

Falls $s_c > 0$ ist, ist h_c also strikt konvex und somit strikt unimodal.

Falls $s_c < 0$ ist, ist h_c also strikt konkav und somit nicht strikt konvex und nicht strikt unimodal.

Falls $s_c = 0$ ist, ist h_c eine konstante Funktion und somit konvex, aber nicht strikt unimodal.

Damit folgen:

$$\begin{array}{rcl} C_1 & = & \{c \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} c_k \geq 0\} \\ C_2 & = & \{c \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} c_k > 0\} \\ C_1 & \neq & C_2 \end{array}$$

Aufgabe 11.
Sei $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \frac{1}{2}x^2 - 4xy + 9y^2 - 3x + 8y + 9.$$

6 Punkte (a) Führen Sie, ausgehend von $(1,0)^\top$, eine Iteration des Newtonverfahrens zur Bestimmung eines stationären Punktes von f durch.

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen den Gradienten

$$\nabla f(x,y) = (x - 4y - 3, -4x + 18y + 8)$$

und die Hessematrix

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse der Hessematrix errechnet sich als

$$(\nabla^2 f(x,y))^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir starten bei $(x_0,y_0) = (1,0)$ und iterieren einmal per Newtonschritt:

$$\begin{aligned} (x_1,y_1)^\top &= (x_0,y_0)^\top - (\nabla^2 f(x_0,y_0))^{-1}\nabla f(x_0,y_0)^\top \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= (11,2)^\top \end{aligned}$$

1 Punkt (b) Wieviele Newton-Iterationen sind nötig, bis Sie einen stationären Punkt erreicht haben?

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit:

Wegen $\nabla f(x_1,y_1) = (0,0)$ bricht das Verfahren nach einem Schritt ab und ein stationärer Punkt ist gefunden.

2. Lösungsmöglichkeit:

Da f eine quadratische Funktion mit regulärer Hessematrix ist, bestimmt das Newtonverfahren den eindeutigen stationären Punkt in einem Schritt.

8 Punkte **Aufgabe 12.**

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & & & y & & \\ \text{unter} & x & + & y & \leq & 4 \\ & x & + & y & \geq & 3 \\ & 2x & + & y & \geq & 5 \\ & & & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit:

Das Starttableau für Phase I lautet:

$$\begin{array}{rrrrr|rr|r} 3 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

Der erste Pivotschritt ergibt:

$$\begin{array}{rrrrr|rr|r} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}$$

Der zweite Pivotschritt ergibt:

$$\begin{array}{rrrrr|rr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Das Tableau ist optimal mit Zielfunktionswert 0. Somit haben wir eine zulässige Basis gefunden, mit der wir Phase II starten. Das Starttableau lautet:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}$$

Der erste Pivotschritt ergibt:

0	0	−2	0	−1	−3
0	0	1	1	0	1
0	1	2	0	1	3
1	0	−1	0	−1	1

Das Tableau ist final. Wir lesen als Optimallösung $(x,y) = (1,3)$ mit Zielfunktionswert 3 ab.

2. Lösungsmöglichkeit: