Lösungsskizzen zu den Klausuraufgaben zum Kurs 1142 Algorithmische Mathematik

1142KSL14

Aufgabe 1.

6 Punkte Zeigen Sie, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(k+1) \text{ teilt } ((k+2)^n - 1).$$

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen Sie Behauptung per Induktion nach n.

Für $n = 0$ ist die Aussage richtig, da jede natürliche Zahl $\neq 0$, insbesondere auch $k+1$, die Zahl 0 teilt.

Sei nun $n > 0$ und die Behauptung bereits für $n-1$ gezeigt. Es gilt:

$$(k+2)^n - 1 = (k+2)(k+2)^{n-1} - 1 = (k+1)(k+2)^{n-1} + (k+2)^{n-1} - 1.$$

Der Summand $(k+1)(k+2)^{n-1}$ wird offensichtlich von $k+1$ geteilt, der andere Summand, also $(k+2)^{n-1} - 1$, wird nach Induktionsvoraussetzung von $k+1$ geteilt. Also wird auch deren Summe $(k+2)^n - 1$ von $k+1$ geteilt. Damit ist die Aussage auch für n richtig.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage also für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Aufgabe 2.

5 Punkte Ein Spielmacher bietet Ihnen folgendes Spiel an: Sie würfeln mit zwei fairen Würfeln (auf deren Seiten jeweils die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 stehen). Wenn die Augensumme kleiner oder gleich 4 ist, zahlt Ihnen der Spielmacher 50 Euro, ansonsten müssen Sie dem Spielmacher 10 Euro zahlen. Ist das Spiel fair? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

Beim Würfeln mit zwei Würfeln gibt es 36 Ausgänge. Das Ereignis $A =$ „Augensumme kleiner oder gleich vier“ ist die Menge $A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$. Somit ist seine Wahrscheinlichkeit $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

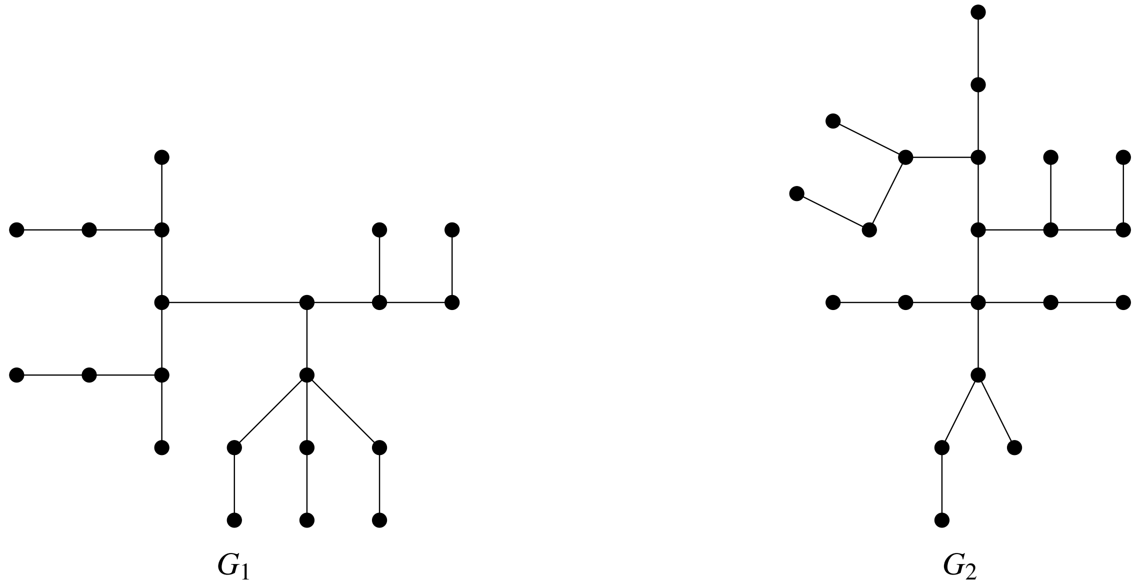
Der erwartete Gewinn ist also

$$E = p(A) \cdot 50 + p(\overline{A}) \cdot (-10) = \frac{1}{6} \cdot 50 + \frac{5}{6} \cdot (-10) = \frac{50}{6} - \frac{50}{6} = 0.$$

Damit handelt es sich um ein faires Spiel, bei dem im Mittel keiner etwas verliert oder gewinnt.

Aufgabe 3.

5 Punkte Betrachten Sie die beiden folgenden Graphen G_1 und G_2.



Zeigen oder widerlegen Sie: G_1 und G_2 sind isomorph.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass G_1 und G_2 nicht isomorph sind.

1. Beweismöglichkeit:

Beide Graphen enthalten genau einen Knoten vom Grad 4. Dieser hat in G_1 genau 3 Nachbarn vom Grad 2. Der Knoten vom Grad 4 in G_2 hat jedoch nur 2 Nachbarn vom Grad 2. Damit können G_1 und G_2 nicht isomorph sein.

2. Beweismöglichkeit:

G_1 und G_2 sind Bäume. Das Zentrum von G_1 umfasst zwei Knoten (nämlich die Endknoten der in der Zeichnung langen Kante), das Zentrum von G_1 jedoch nur einen (nämlich den oberen Nachbarn des Knotens vom Grad 4). Damit können G_1 und G_2 nicht isomorph sein.

Aufgabe 4.

Betrachten Sie den Graphen G_1 aus der vorigen Aufgabe.

1 Punkt (a) Zeigen oder widerlegen Sie: G_1 ist bipartit.

Lösungsvorschlag:

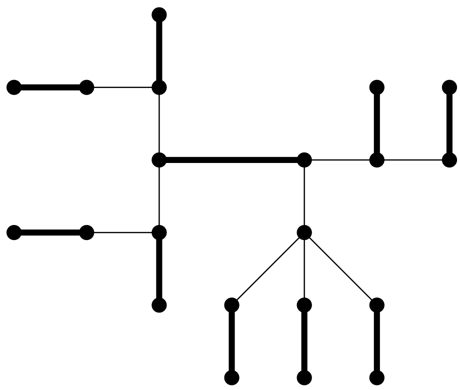
Wir zeigen, dass G_1 bipartit ist.

G_1 ist kreisfrei, also bipartit.

3 Punkte (b) Bestimmen Sie ein maximales Matching von G_1.

Lösungsvorschlag:

Ein Matching mit 10 Kanten ist in der folgenden Abbildung eingezeichnet.



Dieses ist maximal.

4 Punkte (c) Beweisen Sie die Maximalität des in (b) gefundenen Matchings.

Lösungsvorschlag:

Der Graph G_1 hat 21 Knoten, somit kann ein Matching von G_1 höchstens 10 Kanten umfassen. Da das Matching aus (b) 10 Kanten umfasst, ist es also ein maximales Matching.

Aufgabe 5.

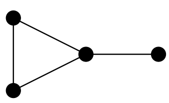
8 Punkte Sei $n \geq 3$. Kann es eine Valenzsequenz eines einfachen Graphen der Form

$$(n-1, n-2, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_3, a_2, a_1)$$

für geeignete $a_{n-2}, \ldots, a_1$ mit $n-2 \geq a_{n-2} \geq a_{n-3} \geq \ldots \geq a_3 \geq a_2 \geq a_1$ geben?
Falls nein, für welche n? Begründen Sie Ihre Antwort.
Falls ja,

3 Punkte (a) geben Sie ein Beispiel eines solchen Graphen für ein $n \geq 4$ an;

Lösungsvorschlag:



Der Graph hat die Valenzsequenz $(3, 2, 2, 1)$.

5 Punkte (b) geben Sie für alle $n \geq 3$ einen solchen Graphen an.

Lösungsvorschlag:

Für beliebiges $n \geq 3$ konstruieren wir G_n aus dem K_{n-1}, indem wir an einen speziellen Knoten v aus dem K_{n-1} mittels einer Kante einen weiteren Knoten w vom Grad 1 anhängen. Jeder Knoten außer v und w hat somit den Grad $n-2$, v hat den Grad $n-1$ und w den Grad 1. D.h. G_n hat die folgende Valenzsequenz

$$(n-1, n-2, n-2, n-2, \ldots, n-2, n-2, n-2, 1).$$

Aufgabe 6.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = 2n$ Knoten, von denen jeder den Knotengrad n habe. Enthalte G ferner keine induzierten Kreise ungerader Länge. Zeigen Sie:

3 Punkte (a) G enthält keine Kreise ungerader Länge.

Lösungsvorschlag:

Angenommen, G enthält einen Kreis ungerader Länge. Sei C ein solcher von minimaler Länge. Angenommen, C wäre nicht induziert. Dann gäbe es eine Kante $vw \notin C$ zwischen zwei Kreisknoten v und w. Diese Knoten zerteilen den Kreis in zwei Kreisbögen unterschiedlicher Parität, einer ist also gerade. Zusammen mit vw bildet dieser Kreisbogen also einen ungeraden Kreis. Da die Länge der Kreisbögen, da es keine Mehrfachkanten gibt, um mindestens 2 kürzer ist als die Länge ℓ von C, haben wir einen ungeraden Kreis einer Länge von höchstens $\ell - 1$ gefunden, was der Minimalität von C widerspricht. Somit ist C induziert. Dies widerspricht der Voraussetzung.

6 Punkte (b) Es gilt $G = K_{n,n}$ (wobei $K_{n,n}$ den vollständigen bipartiten Graphen mit zwei Partitionen von je n Knoten bezeichnet).

Lösungsvorschlag:

Nach (a) enthält G keine ungeraden Kreise, ist also nach Proposition 4.7.3 ein bipartiter Graph. Falls $n = 0$ ist, ist $G = (\emptyset, \emptyset) = K_{0,0}$, wie behauptet. Sei nun $n \geq 1$. Seien V_1 und V_2 die beiden Knotenmengen der Bipartition. Da es einen Knoten gibt, der Knotengrad $n \geq 1$ hat, gibt es eine Kante. Somit gilt $|V_1| \neq \emptyset$ und $|V_2| \neq \emptyset$. Da jeder Knoten den Grad n hat und alle Kanten zwischen den beiden Seiten V_1 und V_2 verlaufen, gibt es, bei Betrachtung der linken Seite V_1, genau $|V_1|n$ Kanten, aber andererseits auch, bei Betrachtung der rechten Seite V_2, genau $|V_2|n$ Kanten. Es folgt

$$|V_1|n = |V_2|n,$$

d.h., wegen $n \neq 0$, $|V_1| = |V_2|$. Wegen $|V_1| + |V_2| = |V| = 2n$, folgt also

$$|V_1| = |V_2| = n.$$

Da jeder Knoten einer Seite den Grad n hat, aber andererseits auf der anderen Seite nur genau n Knoten vorkommen, ist jeder Knoten einer Seite mit jedem Knoten der anderen Seite verbunden. Somit ist G auch im Fall $n \geq 1$ isomorph zum $K_{n,n}$.

Aufgabe 7.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & 8 & -6 \\ 1 & -4 & -6 & 35 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & 8 & -6 \\ 1 & -4 & -6 & 35 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & -8 & 34 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & -8 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Somit lautet eine LU-Zerlegung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & 8 & -6 \\ 1 & -4 & -6 & 35 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{U}$$

Die Lösung von (b) liefert eine alternative Zerlegung.

5 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: A ist positiv definit.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass A positiv definit ist.

Dazu versuchen wir, eine Cholesky-Faktorisierung zu bestimmen, d.h. zu testen, ob es eine reguläre Matrix $L = (\ell_{ij})_{ij}$ mit $LL^\top = A$ gibt. Wenn es eine solche gibt, dann gilt für ihre Einträge:

$$\begin{aligned} \ell_{11} &= \sqrt{1} = 1 \\ \ell_{21} &= \frac{-1}{1} = -1 \\ \ell_{31} &= \frac{2}{1} = 2 \\ \ell_{41} &= \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_{22} &= \sqrt{2-(-1)^2} = 1 \\
\ell_{32} &= \frac{-2-(-1)\cdot 2}{1} = 0 \\
\ell_{42} &= \frac{-4-(-1)\cdot 1}{1} = -3 \\
\ell_{33} &= \sqrt{8-2^2-0^2} = 2 \\
\ell_{43} &= \frac{-6-2\cdot 1-(-3)\cdot 0}{2} = -4 \\
\ell_{44} &= \sqrt{35-1^2-(-3)^2-(-4)^2} = 3
\end{aligned}$$

Somit existiert die Cholesky-Faktorisierung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{U:=L^\top} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & 8 & -6 \\ 1 & -4 & -6 & 35 \end{pmatrix}}_{A}$$

mit einem L von vollem Rang. Daher ist A positiv definit.

1 Punkt (c) Zeigen oder widerlegen Sie: 0 ist Eigenwert von A.

Lösungsvorschlag:

Die Behauptung ist falsch, da nach (b) A positiv definit, also insbesondere regulär, ist und somit nicht 0 als Eigenwert haben kann.

1 Punkt (d) Bestimmen Sie $\|A\|_1$.

Lösungsvorschlag:

$\|A\|_1 = \max\{5, 9, 18, 46\} = 46$.

Aufgabe 8.

8 Punkte Lösen Sie folgendes nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lcccccl} \min & z & & & & & \\ \text{unter} & z & + & 5x & + & 12y & = & 1 \\ & & & x^2 & + & y^2 & \leq & 169. \end{array}$$

Lösungsvorschlag:

Wir substituieren zunächst $z = 1 - 5x - 12y$ und erhalten dann das Problem

$$\min f(x,y) \text{ unter } g(x,y) \leq 0$$

mit $f(x,y) = 1 - 5x - 12y$ und $g(x,y) = x^2 + y^2 - 169$. Berechnen wir zunächst die im Folgenden benötigten Gradienten und Hessematrizen.

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (-5,-12) \\ \nabla^2 f(x,y) &= 0 \\ \nabla g(x,y) &= (2x,2y) \\ \nabla^2 g(x,y) &= 2I_2 \end{aligned}$$

Der einzige nichtreguläre Punkt ist evtl. $(0,0)^\top$, dort ist $f(0,0) = 1$. Die Kuhn-Tucker-Bedingungen für lokale Minima lauten: Es gibt ein $\mu \leq 0$, so dass

$$\begin{aligned} -5 &= 2x\mu && (1) \\ -12 &= 2y\mu && (2) \\ \mu(x^2+y^2-169) &= 0 && (3) \end{aligned}$$

gelten. Falls $\mu = 0$, so ergibt obige Bedingung (1) den Widerspruch $-5 = 0$. Also ist $\mu \neq 0$ und somit nach (3)

$$x^2 + y^2 = 169 \qquad (4)$$

und nach (1) und (2)

$$2x = -\frac{5}{\mu} = \frac{5}{12}\left(-\frac{12}{\mu}\right) = \frac{5}{12} \cdot 2y,$$

d.h. $x = \frac{5}{12}y$. Dies eingesetzt in (4) ergibt

$$\frac{25}{144}y^2 + y^2 = 169, \quad \Longrightarrow \quad y^2 = 144,$$

also $y = \pm 12$. Wir erhalten $(x_1,y_1) = (-5,-12)$ mit $\mu_1 = \frac{1}{2} > 0$, was $\mu \leq 0$ widerspricht, sowie $(x_2,y_2) = (5,12)$ mit $\mu = -\frac{1}{2}$. Fuer letztere Lösung ist

$$L = -\mu \nabla^2 g(x_2,y_2) = -\left(-\frac{1}{2}\right) 2I_2 = I_2$$

positiv definit, also handelt es sich um ein lokales Minimum mit Optimalwert $z_2 = 1 - 5x_2 - 12y_2 = -168$. Dieser Wert ist auch kleiner als der Wert 1 im nicht regulären Punkt $(x,y) = (0,0)$.

Aufgabe 9.

Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \|x\|$, wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm des $\mathbb{R}^n$ bezeichne und $n \in \mathbb{N}$ wie in (a) bzw. (b) spezifiziert sei.

6 Punkte (a) Sei $n = 3$. Zeigen oder widerlegen Sie: f ist konvex, aber nicht strikt konvex.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen zunächst, dass f konvex ist.

Der Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$ ist offensichtlich eine konvexe Menge. Ferner gilt unter Benutzung der Normaxiome (N2) und (N3) für $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in [0,1]$, dass

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \|\lambda x + (1-\lambda)y\| \\ &\overset{(N3)}{\leq} \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| \\ &\overset{(N2)}{=} |\lambda| \cdot \|x\| + |1-\lambda| \cdot \|y\| \\ &= \lambda \cdot \|x\| + (1-\lambda) \cdot \|y\| \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \end{aligned}$$

Somit ist f konvex.

Nun zeigen wir, dass f nicht strikt konvex ist.

Sei dazu e_1 der erste Einheitsvektor und $\lambda = \frac{1}{2}$, $x = 0$, $y = 2e_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\frac{1}{2}0 + \frac{1}{2} \cdot 2e_1) \\ &= \|e_1\| \\ &= \frac{1}{2}\|0\| + \frac{1}{2} \cdot 2\|e_1\| \\ &= \frac{1}{2}\|0\| + \frac{1}{2} \cdot \|2e_1\| \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \end{aligned}$$

Somit ist f nicht strikt konvex.

3 Punkte (b) Sei $n = 1$. Zeigen oder widerlegen Sie: f ist strikt unimodal.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass f strikt unimodal ist.

Nach (N1) ist $\alpha := \|1\| \neq 0$. Nach (N2) gilt

$$f(x) = \|x\| = \|x \cdot 1\| \overset{(N2)}{=} |x| \cdot \|1\| = \alpha |x| = \begin{cases} \alpha x & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -\alpha x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Somit sind $f_1 := f_{|\{x|x<0\}}$ und $f_2 := f_{|\{x|x>0\}}$ stetig differenzierbar mit $f_1'(x) = -\alpha \neq 0$ für alle $x < 0$ und $f_2'(x) = \alpha \neq 0$ für alle $x > 0$. Das heißt, f_1 und f_2 besitzen kein lokales Minimum. Somit hat f kein lokales Minimum an allen Stellen $x \neq 0$. Wegen $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 0$ hat f somit genau ein lokales Minimum, nämlich an der Stelle 0. Das heißt, dass f strikt unimodal ist.

Aufgabe 10.

5 Punkte Sei $F: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = |x_1x_2x_3x_4|$. Sei $x^* = (x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*)^\top \in \mathbb{R}^4$ ein beliebiger Punkt. Betrachten Sie die Optimierungsaufgabe

$$\min_{(x_1,x_2,x_3,x_4)^\top \in \mathbb{R}^4} F(x_1,x_2,x_3,x_4).$$

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Koordinatensuche mit optimaler Schrittweite, startend bei x^*, benötigt höchstens zwei Iterationsschritte, um ein lokales Minimum von F zu finden.

Lösungsvorschlag:

Die Funktion F ist an allen Stellen nichtnegativ. Wegen $F(0,0,0,0) = 0$ haben also alle globalen Minimalstellen den Funktionswert 0.

Wir zeigen, das die Koordinatensuche nach spaetestens zwei Iterationen in einem globalen Minimum terminiert.

Wir suchen in der ersten Iteration in e_1-Richtung, d.h. wir suchen ein Minimum der Funktion

$$F(x^* + te_1) = F(x_1^* + t, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = |(x_1^* + t)x_2^*x_3^*x_4^*| = |x_1^* + t| \cdot |x_2^*x_3^*x_4^*|$$

Da die Funktion an allen Stellen t nichtnegativ ist, findet die Line search an der Stelle $t = -x_1^*$ ein globales Minimum, falls alle $x_i^* \neq 0$ sind für $i \geq 2$, ansonsten an beliebiger Stelle t ein globales Minimum. Damit ist mindestens eine Koordinate des nächsten Iterationspunktes $x_{(1)}$ gleich 0, also gilt $F(x_{(1)}) = 0$, bei $x_{(1)}$ also ein globales Minimum.

Falls $\|x^* - x_{(1)}\| < \varepsilon$, terminiert das Verfahren vor der zweiten Iteration, ansonsten wird in der zweiten Iteration in e_2-Richtung gesucht. Bei vernünftger Implementierung bleibt die Line Search am selben Platz, da weder e_2 noch $-e_2$ Abstiegsrichtung ist. Somit findet man den Punkt $x_{(2)} = x_{(1)}$.

Vor Beginn der dritten Iteration terminiert dann der Algorithmus, da der Test

$$\|x_{(1)} - x_{(2)}\| = 0 < \varepsilon$$

ergibt.

Aufgabe 11.

7 Punkte Eine Ölraffinerie mischt Super (S), Normalbenzin (N) und Biosprit (B) aus den Rohölsorten R1, R2, R3 und Bioethanol R4. Pro Tag stehen ihr 20 Tonnen R1, 50 Tonnen R2, 120 Tonnen R3 und 10 Tonnen R4 zur Verfügung. Mit einer Tonne Super macht die Raffinerie einen Gewinn von 220 Euro mit einer Tonne Normalbenzin einen Gewinn von 234 Euro und mit einer Tonne Biosprit einen Gewinn von 333 Euro. Pro Tonne Rohstoff, den die Raffinerie nicht verbraucht, fällt bei R1 und R2 eine Strafzahlung von 84 Euro an, bei R3 und R4 sogar eine Strafzahlung von 175 Euro. Die Mischungsverhältnisse (Verbrauch der Rohstoffe in Tonnen pro Tonne des Endprodukts) sind in folgender Tabelle angegeben:

	R1	R2	R3	R4
S	0.12	0.32	0.51	0.05
N	0.07	0.05	0.83	0.05
B	0.19	0.29	0.41	0.11

Modellieren Sie die Aufgabe, den Gewinn der Raffinerie zu maximieren, als lineares Optimierungsproblem. (Eine Lösung des Optimierungsproblems wird nicht erwartet.)

Lösungsvorschlag:

Eine mögliche Modellierung ist etwa wie folgt.

Die Variablen x_S, x_N bzw. x_B bezeichnen die täglich produzierte Menge an Super, Normalbenzin bzw. Biosprit in Tonnen. Die Variablen y_i, $i = 1,2,3,4$, bezeichnen die Menge an verbrauchtem Rohstoff Ri in Tonnen.

Maximiert werden soll der Gewinn minus die Strafzahlung, d.h. die Funktion

$$220x_N + 234x_S + 333x_B - 84(20 - y_1) - 84(50 - y_2) - 175(120 - y_3) - 175(10 - y_4).$$

Dabei können wir bei der Optimierung die konstanten Terme auch weglassen.

Wir haben folgende Mischungsbedingungen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0.12x_S & + & 0.07x_N & + & 0.19x_B & = & y_1 \\ 0.32x_S & + & 0.05x_N & + & 0.29x_B & = & y_2 \\ 0.51x_S & + & 0.83x_N & + & 0.41x_B & = & y_3 \\ 0.05x_S & + & 0.05x_N & + & 0.11x_B & = & y_4 \end{array}$$

Ferner haben wir Kapazitätsrestriktionen

$$y_1 \leq 20, \quad y_2 \leq 50, \quad y_3 \leq 120, \quad y_4 \leq 10.$$

Außerdem sind Massen niemals negativ, daher haben wir $x_S, x_N, x_B, y_i \geq 0$.

Wir geben auch noch eine Lösung des Problems an (dies war in der Klausur aber nicht verlangt): Im LP-Format sieht das Problem wie folgt aus (die Variable `x1` entspricht x_S, `x2` entspricht x_N, `x3` entspricht x_B, `xi` entspricht y_{i-3} für $i \geq 4$):

```
Problem
   Oelraffinerie

Maximize
value: 220x1+234x2+333x3+84x4+84x5+175x6+175x7

Subject
knotA:  0.12x1+0.07x2+0.19x3-x4=0
knotB:  0.32x1+0.05x2+0.29x3-x5=0
knotC:  0.51x1+0.83x2+0.41x3-x6=0
knotD:  0.05x1+0.05x2+0.11x3-x7=0
bou4:  x4<=20
bou5:  x5<=50
bou6:  x6<=120
bou7:  x7<=10
pos1:  x1>=0
pos2:  x2>=0
```

```
pos3:  x3>=0
pos4:  x4>=0
pos5:  x5>=0
pos6:  x6>=0
pos7:  x7>=0

End
```

QSopt findet als Lösung

$$\begin{aligned} x_1 &= 115.384615 \\ x_2 &= 70.512821 \\ x_3 &= 6.410256 \\ x_4 &= 20 \\ x_5 &= 42.307692 \\ x_6 &= 120 \\ x_7 &= 10 \end{aligned}$$

9 Punkte **Aufgabe 12.**

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & -3x & + & y & & \\ \text{unter} & 4x & + & y & \geq & 10 \\ & & & y & \leq & 3 \\ & 2x & - & y & \geq & 2 \\ & & & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: Zwei-Phasen-Simplexalgorithmus

Das Starttableau für Phase I lautet:

$$\begin{array}{rrrrr|rr|r} 6 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ \hline -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \boxed{2} & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Nach dem ersten Pivotschritt erhalten wir

$$\begin{array}{rrrrr|rr|r} 0 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 & -3 & 6 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 3 \\ \hline 0 & \boxed{3} & -1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

Nach dem zweiten Pivotschritt erhalten wir

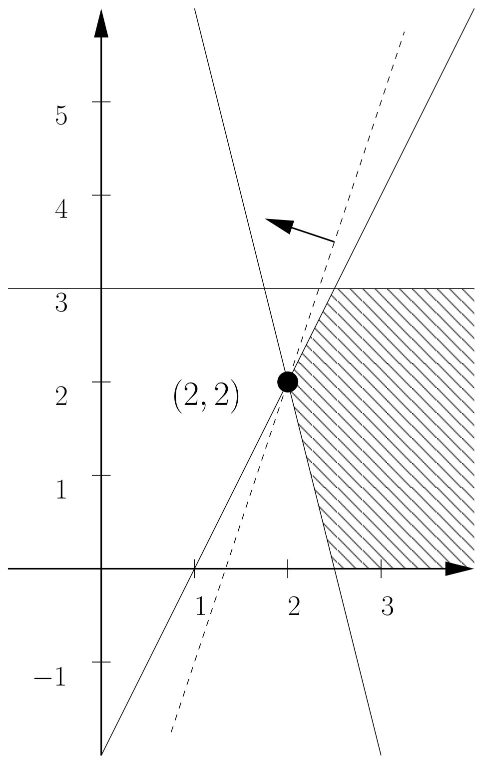
$$\begin{array}{ccccc|cc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{7}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & 4 \\
\hline
0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\
1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 2
\end{array}$$

Das Tableau ist optimal bezüglich der künstlichen Hilfsfunktion. Damit ist Phase I beendet. Der optimale Zielfunktionswert ist 0, damit haben wir eine zulässige Startbasis für Phase II gefunden. Durch Streichen der künstlichen Zeile und Spalten erhalten wir das Starttableau:

$$\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{7}{6} & 4 \\
\hline
0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 2 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & 1 \\
1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 2
\end{array}$$

Dieses ist bereits optimal. Wir lesen die Optimallösung $(x, y) = (2, 2)$ und den optimalen Zielfunktionswert -4 ab.

2. Lösungsmöglichkeit: Grafische Lösung



Wir lesen die Optimallösung $(x, y) = (2, 2)$ und errechnen den optimalen Zielfunktionswert als $-3 \cdot 2 + 2 = -4$.