6 Punkte **Aufgabe 1.**

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Hinweis: Induktion (!). Sie dürfen ferner ohne Beweis benutzen, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 2.

Sie würfeln mit zwei einander nicht beeinflussenden fairen Würfeln. Auf dem ersten Würfel stehen die Augenzahlen

$$1, 2, 3, 5, 6, 7,$$

auf dem zweiten Würfel die Augenzahlen

$$2, 3, 4, 5, 7, 9.$$

Fair bedeutet hier, dass jede dieser Augenzahlen mit Wahrscheinlichkeit $1/6$ gewürfelt wird.

4 Punkte (a) Was ist der Erwartungswert der Augenzahl vom ersten bzw. zweiten Würfel?

3 Punkte (b) Was ist der Erwartungswert für die Augensumme, wenn man mit beiden Würfeln gleichzeitig würfelt?

8 Punkte **Aufgabe 3.**

Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt einen Graphen mit genau 10 Knoten, von denen einer den Grad 9, zwei den Grad 8, fünf den Grad 5 und jeweils einer den Grad 3 und den Grad 1 haben. Geben Sie, falls möglich, einen solchen Graphen explizit an.

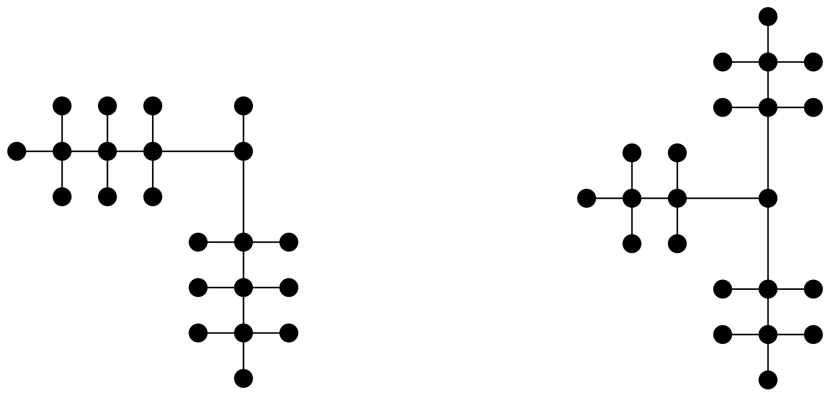
8 Punkte **Aufgabe 4.**

Charakterisieren Sie die Graphen, die weder den Pfad P_3 noch den Kreis C_3 als induzierten Teilgraphen enthalten. Beweisen Sie Ihre Charakterisierung. Zeichnen Sie sämtliche solche paarweise nicht isomorphen Graphen mit 8 Knoten.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass solche Graphen kreisfrei sein müssen.

6 Punkte **Aufgabe 5.**

Zeigen oder widerlegen Sie: Die unten abgebildeten Bäume T_1 und T_2 sind isomorph.



Der Baum T_1 Der Baum T_2

8 Punkte **Aufgabe 6.**

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $K_{m,m} - M$ der Graph, der aus dem vollständigen bipartiten Graphen $K_{m,m}$ durch Löschen der Kanten eines perfekten Matchings M entsteht. (Zur Erinnerung: $K_{m,m}$ ist der bipartite Graph mit Bipartitionen U und W der Größe jeweils m, wo für jedes Paar $(u,w) \in U \times W$ eine Kante uw vorhanden ist.)

Für welche $m \in \mathbb{N}$ besitzt $K_{m,m} - M$ ein perfektes Matching? Beweisen Sie Ihre Aussage!

6 Punkte **Aufgabe 7.**

Schreiben Sie die Dezimalzahl 99,9 ins 5er-System um.

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -21 \\ -21 & 74 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte (a) Geben Sie eine untere Dreiecksmatrix B und eine obere Dreiecksmatrix C an, so dass $A = BC$.

1 Punkt (b) Bestimmen Sie $\|A\|_1$.

Aufgabe 9.

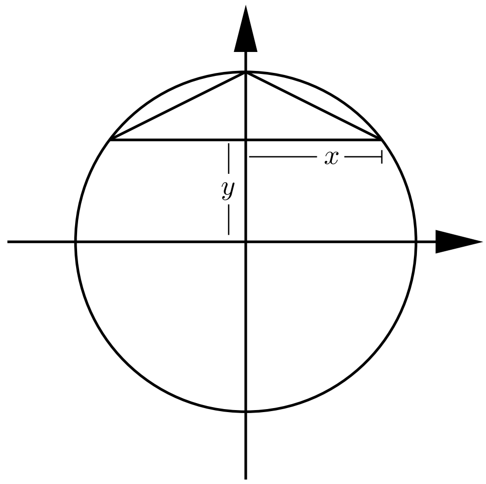
Seien $f : [-8,8] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : [-8,8] \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, definiert durch

$$\begin{aligned} f(x) &:= -2x+5 \quad \text{falls } -8 \le x \le 8, \\ g(x) &:= \big||x|-5\big| \quad \text{falls } -8 \le x \le 8. \end{aligned}$$

4 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: f ist konvex und strikt unimodal.

6 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: g ist konvex oder strikt unimodal.

Aufgabe 10.
In einen Kreis vom Radius 1 soll ein gleichschenkliges Dreieck mit möglichst großem Flächeninhalt so einbeschrieben werden, dass die Ecken des Dreiecks auf dem Rand des Kreises liegen (siehe Abbildung; das dort eingezeichnete Dreieck ist offensichtlich nicht optimal).



6 Punkte (a) Modellieren Sie das Problem als nichtlineares Optimierungsproblem.

5 Punkte (b) Lösen Sie das Problem.

1 Punkt (c) Ist die Lösung ein gleichseitiges Dreieck? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 11.
Gegeben sei folgendes lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{min} & 3x & + & 2y & & \\
\text{unter} & x & - & 8y & \leq & 8 \\
 & -4x & - & y & = & -3 \\
 & & & x,y & \leq & 0
\end{array}$$

5 Punkte (a) Bringen Sie das Programm in Standardform und dualisieren Sie es.

3 Punkte (b) Besitzt das Programm eine zulässige Lösung?

6 Punkte **Aufgabe 12.**
Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt einen Koeffizientenvektor $c^\top = (c_1, c_2, c_3)^\top \in \mathbb{R}^3$, so dass der Simplexalgorithmus mit Blands Rule, angewandt auf das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{max} & c_1 x & + & c_2 y & + & c_3 z & & \\
\text{unter} & x & & & & & \leq & 1 \\
 & & & y & & & \leq & 1 \\
 & & & & & z & \leq & 1 \\
 & & & & & x,y,z & \geq & 0
\end{array}$$

mindestens drei Schritte benötigt, um eine Optimallösung zu finden.