Aufgabe 1.

Die Folgen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen F_n bzw. G_n seien rekursiv definiert durch

$$F_0 = 1, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ falls } n \geq 2,$$

$$G_0 = 1, \qquad G_1 = 0, \qquad G_n = \sum_{k=0}^{n-2} G_k \text{ falls } n \geq 2.$$

1 Punkt (a) Berechnen Sie G_2 und G_3.

5 Punkte (b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$G_{n+2} = F_n.$$

Hinweis zu (b): Wenden Sie die Definition von G_n in jede Richtung nur einmal an.

Aufgabe 2.

In dieser Aufgabe geht es um Permutationen.

4 Punkte (a) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $N_k = \{1,2,3,\ldots,k\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen im Intervall $[1,k]$. Sei $\mathscr{F}_k$ die Menge der bijektiven Funktionen mit Definitionsbereich N_k und Wertebereich N_k. Betrachten Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum auf der Menge

$$M = \mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2 \cup \mathscr{F}_3 \cup \mathscr{F}_4 \cup \mathscr{F}_5 \cup \mathscr{F}_6$$

mit Gleichverteilung auf den Elementen von M. Sei A das Ereignis, das aus allen Funktionen $f \in M$ besteht, für die es ein x aus dem Definitionsbereich von f gibt mit $f(x) \neq x$.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.

Hinweis: $\sum_{n=1}^{6} n! = 873$.

3 Punkte (b) Zerlegen Sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 9 & 11 & 8 & 13 & 14 & 3 & 10 & 7 & 4 & 2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

in disjunkte Zyklen.

4 Punkte **Aufgabe 3.**

Zeigen oder widerlegen Sie: Die unten abgebildeten Graphen G_1 und G_2 sind isomorph.

G_1 G_2

Aufgabe 4.

6 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt einen Graphen mit genau 11 Knoten, von denen acht den Grad 3 und drei den Grad 4 haben.

Geben Sie, falls möglich, einen solchen Graphen explizit an.

3 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt einen weiteren Graphen mit genau 11 Knoten, von denen acht den Grad 3 und drei den Grad 4 haben, der nicht isomorph zu Ihrem Beispielgraph aus (a) ist.

Unverbindlicher Hinweis: Zusammenhang ist eine Isomorphieinvariante.

Aufgabe 5.
Entscheiden Sie, ob folgende Zeichenketten Code eines Baumes sind. Begründen Sie Ihre Aussagen.
Falls die Zeichenketten Code eines Baumes sind, geben Sie einen Baum mit dem entsprechenden Code an.

3 Punkte (a) (((( ) (( ) ( ))) ( ) (( ))) (( ) ( ) ( )))

4 Punkte (b) (((( ) ( )) (( ) ( ))) ((( )) ( ) ( )))

Aufgabe 6.
Gegeben seien drei Männer A, B und C sowie drei Frauen 1, 2 und 3. Sie haben unterschiedliche Präferenzen bezüglich eines Partners des anderen Geschlechts. Die Präferenzlisten sind wie folgt:

A:	(1,2,3)	1:	(B,C,A)
B:	(2,3,1)	2:	(C,A,B)
C:	(1,3,2)	3:	(B,A,C)

Dabei bezeichne der linke Eintrag eines Tripels jeweils den liebsten Partner, der mittlere den zweitliebsten und der rechte den drittliebsten.

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine stabile Hochzeit. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

2 Punkte (b) Der Graph $G_0 = (V,E)$ sei definiert durch $V = U \cup W$ mit $U = \{\text{A},\text{B},\text{C}\}$ und $W = \{1,2,3\}$, und E bestehe aus all den Paaren $\{u,w\}$ mit $u \in U$ und $w \in W$, für die weder der Mann u die Frau w am liebsten mag noch die Frau w den Mann u am liebsten mag (gemäß obigen Präferenzlisten).

Stellen Sie den Graphen grafisch dar.

6 Punkte (c) Bestimmen Sie ein maximales Matching von G_0 und beweisen Sie dessen Maximalität. Können Sie dieses Matching zu einer stabilen Hochzeit ergänzen?

5 Punkte **Aufgabe 7.**

Schreiben Sie die Dezimalzahl $88,8_{(10)}$ ins 2er-System (d.h. Binärsystem) um.

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 15 & -9 \\ 6 & 25 & 40 \end{pmatrix}.$$

und der Vektor $b = (-2, 8, 28)^\top$.

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

3 Punkte (b) Zeigen Sie, dass A regulär ist und für die Inverse A^{-1} von A gilt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{825}{2} & 85 & 81 \\ 107 & -22 & -21 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Punkte (c) Bestimmen Sie $\|A\|_1$ und $\|A\|_\infty$ und die Konditionszahl von A bezüglich der Spaltensummennorm und bezüglich der Zeilensummennorm.

Aufgabe 9.

Ein Student lernt für zwei Klausuren. Er will genau 4 Stunden lang lernen. Er weiß, dass er die 20 Punkte Mindestpunktzahl bei der leichten Klausur auf jeden Fall schafft. Wenn s die Zeit (in Stunden) ist, die der Student für die leichte Klausur lernt, dann kann er erwarten, bei dieser Klausur zusätzliche $\frac{20s}{s+1}$ Punkte zu erzielen. Bei der schweren Klausur dagegen ist sein Kenntnisstand gleich null. Lernt er t Stunden für die schwere Klausur, so kann er $\frac{80t}{t+1}$ Punkte bei dieser Klausur erwarten. Er möchte diese Klausur aber auf jeden Fall schaffen, dazu braucht er 40 Punkte. Der Student möchte einen Zeitplan aufstellen, um die Gesamtpunktzahl aus beiden Klausuren zu maximieren und alle seine Ziele zu erreichen.

5 Punkte (a) Modellieren Sie das Problem als Optimierungsproblem.

8 Punkte (b) Bestimmen Sie eine Optimallösung des Problems.

7 Punkte **Aufgabe 10.**

Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := 2x^2 + 5y^2 - 2xy + x - 70000y + 3.$$

Zeigen oder widerlegen Sie: f ist konvex.

2 Punkte **Aufgabe 11.**

Geben Sie eine mathematisch exakte Definition dafür an, was es bedeutet, dass eine Funktion $f:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ strikt unimodal auf $[a,b]$ ist.

9 Punkte **Aufgabe 12.**

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{max} & x & + & y & & \\ \text{unter} & 4x & + & y & \leq & 16 \\ & 2x & + & y & \geq & 6 \\ & 2x & - & y & \geq & 2 \\ & & & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

Tipps: Grafische Lösung ist zulässig. Bei Benutzung von Blands Rule tauchen in unseren Rechnungen im Simplextableau keine Nenner größer als 6 auf.