Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 1 = \binom{n+1}{2}$$

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen dies per Induktion nach n. Für $n = 0$ stehen links leere Summen, also 0, rechts steht ebenfalls $\binom{1}{2} = 0$.

Sei die Behauptung nun schon für $n-1$ gezeigt. Dann folgt nach Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 1 = \sum_{j=n}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n} 1 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(1 + \sum_{j=i}^{n-1} 1\right) = n + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n-1} 1 \stackrel{IV}{=} n + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

Man beachte im letzten Schritt, dass

$$n + \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

ist.

Aufgabe 2.

Gegeben sei die folgende Permutation:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 7 & 6 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine Zerlegung von σ in Zyklen an.

Lösungsvorschlag:

$\langle 189\rangle\langle 243\rangle\langle 57\rangle\langle 6\rangle$

(b) Geben Sie eine Zerlegung von σ in Transpositionen an.

Lösungsvorschlag:

$\langle 18\rangle\langle 89\rangle\langle 24\rangle\langle 43\rangle\langle 57\rangle$

Aufgabe 3.

Zeigen oder widerlegen Sie: $(9,8,6,6,6,4,3,2,2,2)$ ist Valenzsequenz eines Graphen.

Lösungsvorschlag:

Wir benutzen das Verfahren von Havel-Hakimi:

9	8	6	6	6	4	3	2	2	2
	7	5	5	5	3	2	1	1	1
		4	4	4	2	1	0	0	1
		4	4	4	2	1	1	0	0
			3	3	1	0	1	0	0
			3	3	1	1	0	0	0
				2	0	0	0	0	0
					-1	-1	0	0	0

Da $(-1,-1,0,0,0)$ keine Valenzsequenz eines Graphen ist, ist auch die ursprüngliche Sequenz keine Valenzsequenz.

Aufgabe 4.

Sei der Graph $G=(V,E)$ gegeben durch die Knotenmenge $V=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ und die Kantenmenge

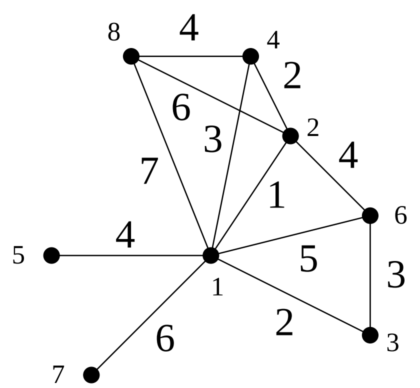
$$E=\{\{a,b\}\in\binom{V}{2} \mid a \text{ teilt } b \text{ oder } b \text{ teilt } a\}.$$

Ferner sei eine Kantengewichtsfunktion $c: E \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$c(\{a,b\}) := |a-b|.$$

(a) Zeichnen Sie den Graphen mit Kantengewichten.

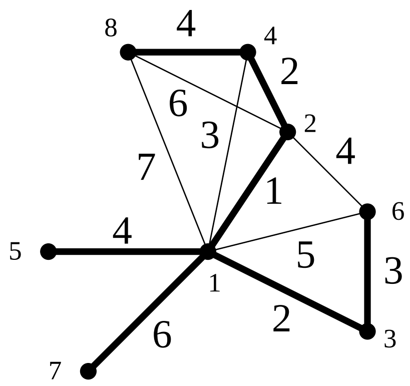
Lösungsvorschlag:



(b) Bestimmen Sie einen minimalen aufspannenden Baum in ihm.

Lösungsvorschlag:

Das Verfahren von Kruskal ergibt folgende eindeutige Lösung:

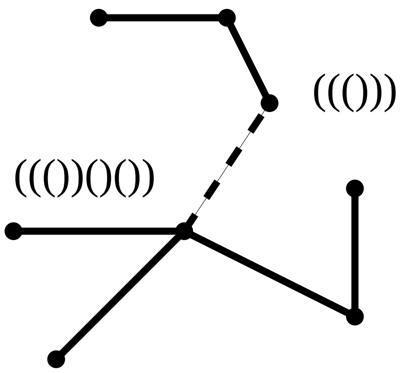


(c) Bestimmen Sie den Code dieses Baumes.

Lösungsvorschlag:

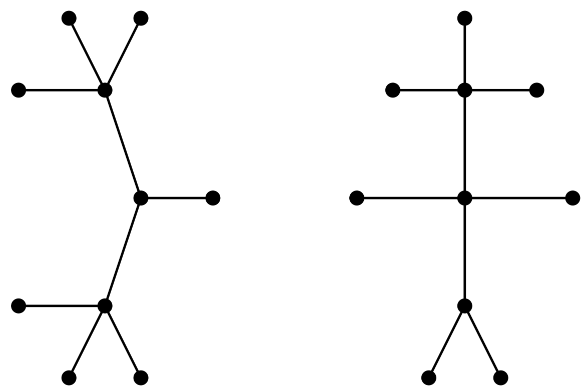
Das Zentrum des Baumes ist die in der folgenden Grafik gestrichelte Kante. Ihre beiden Endknoten haben die Codes $((()))$ bzw. $((())()())$. Letzterer ist lexikographisch kleiner, also ist der zugehörige (also der untere) Knoten die Wurzel des Baumes und sein Code lautet

$$(((()))(())()()).$$



Aufgabe 5.

Beweisen oder widerlegen Sie: Die beiden folgenden Graphen sind isomorph.

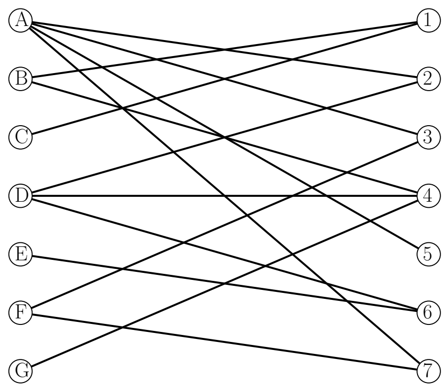


Lösungsvorschlag:

Die Aussage ist falsch. Der einzige Knoten vom Grad 3 des linken Graphen hat genau einen Nachbarn vom Grad 1, der einzige Knoten vom Grad 3 des rechten Graphen hat genau zwei Nachbarn vom Grad 1. Somit können die Graphen nicht isomorph sein.

Aufgabe 6.

Zeigen oder widerlegen Sie: Der folgende bipartite Graph hat ein perfektes Matching.



Falls der Graph kein perfektes Matching hat, geben Sie eine Knotenüberdeckung mit höchstens 6 Knoten an.

Lösungsvorschlag:

Die Aussage ist falsch, der Graph hat kein perfektes Matching. Hätte er eines, so müssten C1 und G4 gematcht sein, da C bzw. G Knoten vom Grad 1 sind. Dann kann aber B nicht mehr gematcht werden, denn seine einzigen Nachbarn sind 1 und 4, die bereits gematcht wurden. Eine Knotenüberdeckung mit 6 Knoten ist dann z.B. $\{A, D, E, F, 1, 4\}$.

Aufgabe 7.

Schreiben Sie den Bruch von Dezimalzahlen $\frac{51}{7}$ um ins 2er-System (in Kommaschreibweise).

Lösungsvorschlag:

Es ist $\frac{51}{7} = 7\frac{2}{7}$. Wir rechnen:

$$\begin{array}{rclcll}
7\frac{2}{7} : 4 & & & = & 1 \text{ Rest } 3\frac{2}{7} & \\
3\frac{2}{7} : 2 & & & = & 1 \text{ Rest } 1\frac{2}{7} & \\
1\frac{2}{7} : 1 & & & = & 1 \text{ Rest } \frac{2}{7} & \\
\frac{2}{7} : \frac{1}{2} & = & \frac{4}{14} : \frac{7}{14} & = & 0 \text{ Rest } \frac{2}{7} & \\
\frac{2}{7} : \frac{1}{4} & = & \frac{8}{28} : \frac{7}{28} & = & 1 \text{ Rest } \frac{1}{28} & \\
\frac{1}{28} : \frac{1}{8} & = & \frac{2}{56} : \frac{7}{56} & = & 0 \text{ Rest } \frac{2}{56} & \left(\frac{2}{56} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{8}\right)
\end{array}$$

Somit haben wir eine Periode der Länge 3 gefunden und $\frac{51}{7}$ lautet im 2er-System

$$111.\overline{010}_{(2)}.$$

Aufgabe 8.
Bestimmen Sie eine Cholesky Faktorisierung der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & 16 \\ 2 & 16 & 41 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie dann damit das Gleichungssystem

$$Ax = (-3, 12, 11)^\top$$

unter Verwendung von insgesamt nur noch höchstens 18 Rechenoperationen (Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen).

Lösungsvorschlag:

$$\begin{array}{lll} \ell_{11} = \sqrt{1} = 1 & \ell_{21} = \frac{-1}{1} = -1 & \ell_{31} = \frac{2}{1} = 2 \\ \ell_{22} = \sqrt{10 - (-1)^2} = 3 & \ell_{32} = \frac{16 - 2\cdot(-1)}{3} = 6 & \\ \ell_{33} = \sqrt{41 - 2^2 - 6^2} = 1 & & \end{array}$$

Die Cholesky-Faktorisierung lautet also

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 10 & 16 \\ 2 & 16 & 41 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=L^\top}$$

Wir lösen das Gleichungssystem $Ax = LL^\top x = b$, in dem wir zunächst $Ly = b$ lösen, und dann $L^\top x = y$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{-3}{1} = -3 \qquad \text{(1 Operation)}$$

$$y_2 = \frac{12 - (-1)y_1}{3} = \frac{12 - (-1)(-3)}{3} = 3 \qquad \text{(3 Operationen)}$$

$$y_3 = \frac{11 - 2y_1 - 6y_2}{1} = \frac{11 - 2(-3) - 6\cdot 3}{1} = -1 \qquad \text{(5 Operationen)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \text{(1 Operation)}$$

$$x_2 = \frac{3 - 6x_3}{3} = \frac{3 - 6(-1)}{3} = 3 \qquad \text{(3 Operationen)}$$

$$x_1 = \frac{-3 - 2x_3 - (-1)x_2}{1} = \frac{-3 - 2(-1) - (-1)\cdot 3}{1} = 2 \qquad \text{(5 Operationen)}$$

Die eindeutige Lösung lautet also $(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, -1)$.

Aufgabe 9.

(a) Lösen Sie folgendes nichtlineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rcrcl} \max & x & + & y & \\ & x^2 & + & y^2 & = & 1 \\ & x & - & 2y & \geq & 1. \end{array}$$

Lösungsvorschlag:

Wir betrachten das äquivalente Minimierungsproblem mit Zielfunktion $f(x,y) := -x-y$ unter den obigen Nebenbedingungen, die wir in der Form $h(x,y) = 0$ bzw. $g(x,y) \leq 0$ notieren. Zunächst berechnen wir Gradienten und Hessematrizen der vorkommenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x,y) &:= -x-y \\ \nabla f(x,y) &= (-1,-1) \\ \nabla^2 f(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x,y) &:= x^2+y^2-1 \\ \nabla h(x,y) &= (2x,2y) \\ \nabla^2 h(x,y) &= 2I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x,y) &:= -x+2y+1 \\ \nabla g(x,y) &= (-1,2) \\ \nabla^2 g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

$\nabla h(x,y)$ und $\nabla g(x,y)$ sind linear unabhängig, mit Ausnahme der Punkte $(x,y) = \lambda(-1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Letztere Punkte sind also die einzigen nicht regulären Punkte der Nebenbedingungen. Von ihnen sind aber unter Beachtung der Gleichungsnebenbedingung nur $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$ zulässig, unter Beachtung der Ungleichungsnebenbedingung fällt $+\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$ weg, so dass $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$ der einzige zulässige nichtreguläre Punkt ist. Diesen werden wir später diskutieren.

Wir stellen die Kuhn-Tucker-Bedingungen auf: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein $\mu \leq 0$, so dass

$$\begin{aligned} -1 &= 2\lambda x - \mu \\ -1 &= 2\lambda y + 2\mu \\ 0 &= (-x+2y+1)\mu \end{aligned}$$

Falls $\mu = 0$ ist, so folgt daraus und aus der Gleichungsnebenbedingung, dass $\lambda \neq 0$ ist und dass

$$x = y = -\frac{1}{2\lambda} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Beide Punkte $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ bzw. $-\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ erfüllen aber nicht die Ungleichungsnebenbedingung und sind daher nicht zulässig.

Somit ist $\mu \neq 0$ und $-x+2y+1=0$, also $x=2y+1$. Setzen wir dies in die Kuhn-Tucker-Bedingungen ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} -1 &= 2\lambda(2y+1)-\mu \\ -1 &= 2\lambda y+2\mu \end{aligned}$$

Addieren wir das Doppelte von der ersten zur zweiten Bedingung, so haben wir

$$-3 = 2\lambda(5y+2),$$

also

$$y = -\frac{3+4\lambda}{10\lambda}$$

und

$$x = 2y+1 = \frac{2\lambda-6}{10\lambda}.$$

Setzen wir x und y in die Gleichungsnebenbedingung ein, so erhalten wir

$$1 = x^2+y^2 = \frac{(2\lambda-6)^2}{(10\lambda)^2} + \frac{(-3-4\lambda)^2}{(10\lambda)^2} = \frac{4\lambda^2-24\lambda+36+16\lambda^2+24\lambda+9}{100\lambda^2} = \frac{1}{5}+\frac{9}{20\lambda^2}$$

Daraus folgt

$$\lambda^2 = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}, \qquad \lambda = \pm\frac{3}{4}.$$

Für $\lambda_1 = -\frac{3}{4}$ erhalten wir

$$y_1 = -\frac{3-3}{10\lambda_1} = 0, \qquad x_1 = 2y_1+1 = 1, \qquad \mu_1 = -\frac{1}{2} < 0.$$

Für $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ erhalten wir

$$y_2 = -\frac{3+3}{\frac{30}{4}} = -\frac{4}{5}, \qquad x_2 = 2y_2+1 = -\frac{3}{5}, \qquad \mu_2 = \frac{1}{10} > 0.$$

Letzteres ist ein Widerspruch wegen $\mu_2 \leq 0$. Somit kommt nur die Lösung (x_1,y_1) als Kandidat für ein lokales Minimum in Frage.

Prüft man nun die Bedingungen 2ter Ordnung nach, so sieht man, dass

$$L_1 = -\lambda_1 \nabla^2 h(x_1,y_1) = \frac{3}{2} I_2$$

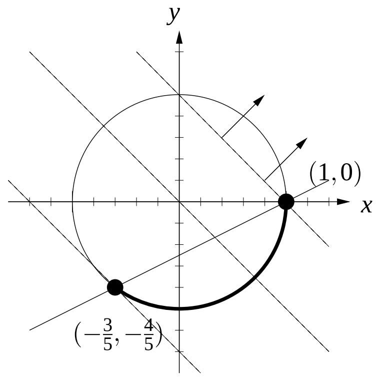
positiv definit ist, bei (x_1,y_1) liegt also ein lokales Minimum von f, also ein lokales Maximum der ursprünglichen Aufgabenstellung mit Zielfunktionswert 1.

Da der Zielfunktionswert am nichtregulären Punkt $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$ gleich $-\frac{1}{\sqrt{5}} < 1$ ist, handelt es sich bei $(x_1,y_1) = (1,0)$ tatsächlich um das gesuchte Maximum.

(b) Zeichnen Sie den zulässigen Bereich (und interpretieren Sie die Lösung (1 Sonderpunkt)).

Lösungsvorschlag:

Der zulässige Bereich ist die dick gezeichnete Kurve. An ihren Randpunkten liegen Maximum bzw. Minimum. Einige Höhenlinien sind gestrichelt eingezeichnet.



Interpretation: verschieben wir die Höhenlinien in Richtung des Gradienten (Aufstiegsrichtung) bis der mittels der Höhenlinie in Pfeilrichtung gebildete Halbraum nur noch einen Punkt aus dem Zulässigkeitsbereich enthält, so erhalten wir das Maximum an der Stelle $(1,0)$.

Aufgabe 10.

Sei $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2$.

Zeigen Sie: f ist konvex.

Lösungsvorschlag:

1. Möglichkeit:

f ist zweimal stetig differenzierbar mit zweiter Ableitung $f''(x) = 2 > 0$. Damit ist f strikt konvex.

2. Möglichkeit:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in [0,1]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2 \\
&= \lambda(\lambda - 1)(x^2 - 2xy + y^2) + \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 \\
&= -\underbrace{\lambda}_{\geq 0}\underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0}(x-y)^2 + \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 \\
&\leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 11.

Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & 3 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ \\ y_1 & + & 3y_2 & \geq & 2 \\ 2y_1 & + & 4y_2 & \geq & 5 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$2x_1 + 5x_2 \leq y_1 + 3y_2.$$

Lösungsvorschlag:

1. Möglichkeit:

Wir stellen $2x_1 + 5x_2$ als Linearkombination von $x_1 + 2x_2$ und $3x_1 + 4x_2$ dar. Dazu lösen wir das Lineare Gleichungssystem in Matrixschreibweise

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

es hat die Lösung $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$, also

$$2x_1 + 5x_2 = \frac{7}{2}(x_1 + 2x_2) - \frac{1}{2}(3x_1 + 4x_2) = \frac{7}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 2 \leq y_1 + 3y_2.$$

Im drittletzten Schritt haben wir die beiden Gleichungen der Voraussetzung benutzt, im letzten Schritt die vorletzte Ungleichung der Voraussetzungen. Die anderen Ungleichungen der Voraussetzung werden gar nicht benötigt.

2. Möglichkeit:

Wir betrachten das lineare Programm

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 2x_1 & + & 5x_2 & & \\ \text{s.d.} & x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & = & 3 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Das duale dazu ist

$$\begin{array}{lrcrcl} \min & y_1 & + & 3y_2 & & \\ \text{s.d.} & y_1 & + & 3y_2 & \geq & 2 \\ & 2y_1 & + & 4y_2 & \geq & 5. \end{array}$$

Nach der schwachen Dualität (mit $b^\top = (1,3)$ und $c^\top = (2,5)$) gilt also

$$2x_1 + 5x_2 = c^\top x \leq y^\top b = y_1 + 3y_2.$$

Aufgabe 12.
Lösen Sie folgendes lineare Optimierungsproblem mit dem Simplexalgorithmus:

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \max & x & + & 2y & + & 4z & & \\ \text{s.d.} & x & + & 3y & + & 6z & \leq & 5 \\ & x & + & y & + & z & \leq & 3 \\ & x & + & 2y & + & 3z & \leq & 4 \\ & & & & & x,y,z & \geq & 0 \end{array}$$

Sie brauchen nicht nach Bland's Rule zu pivotieren, sondern dürfen im Falle von Wahlmöglichkeiten ein zulässiges Pivotelement so wählen, dass die Zahlen möglichst einfach bleiben.
Lösungsvorschlag:
mit Bland's Rule:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ \hline 0 & \boxed{2} & 5 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & -4 \\ \hline 0 & 1 & \boxed{5/2} & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & 3/2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & -1/5 & 0 & -3/5 & -2/5 & 0 & -\frac{21}{5} \\ \hline 0 & 2/5 & 1 & 1/5 & -1/5 & 0 & 2/5 \\ 1 & 3/5 & 0 & -1/5 & 6/5 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 1/5 & 0 & -2/5 & -3/5 & 1 & 1/5 \end{array}\right]$$

Bland's Rule nur für die Spaltenwahl beachtet, nicht für die Zeilenwahl:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 2 & 5 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & \boxed{5} & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & -1/5 & 0 & -3/5 & -2/5 & 0 & -\frac{21}{5} \\ \hline 0 & 2/5 & 1 & 1/5 & -1/5 & 0 & 2/5 \\ 1 & 3/5 & 0 & -1/5 & 6/5 & 0 & \frac{13}{5} \\ 0 & 1/5 & 0 & -2/5 & -3/5 & 1 & 1/5 \end{array}\right]$$

Die Optimallösung lautet also $(x,y,z) = (\frac{13}{5}, 0, \frac{2}{5})$ und der optimale Zielfunktionswert beträgt $\frac{21}{5}$.