Aufgabe 1.

Zeigen Sie:

4 Punkte a) $n^2 + n$ ist eine gerade Zahl für alle $n \in \mathbb{N}$.

4 Punkte b) $2^n > n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Aufgabe 2.

Zerlegen Sie die Permutation $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 7 & 1 & 4 & 3 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

3 Punkte a) in paarweise disjunkte Zykel,

3 Punkte b) in Transpositionen (Zykel der Länge 2).

4 Punkte **Aufgabe 3.**

Eine Urne enthält 100 Kugeln. Davon sind 70 aus Holz und 30 aus Kunststoff. Von den Holzkugeln sind 25 rot und 45 grün. Von den Kunststoffkugeln sind 10 rot und 20 grün.
Sie fassen in die Urne, greifen eine Kugel und spüren, dass diese aus Kunststoff ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese grün ist?

Aufgabe 4.

In einer Urne liegen 30 Kugeln mit drei Eigenschaften: Farbe (schwarz/weiß), Material (Holz/Kunststoff) und Loch (hat Loch/hat kein Loch). Es gilt Folgendes:

- 14 sind schwarz.
- 11 sind aus Holz.
- 13 haben ein Loch.
- 4 schwarze Kugeln sind aus Holz.
- 4 schwarze Kugeln haben ein Loch.
- 3 schwarze Kugeln sind aus Holz und haben ein Loch.
- 2 weiße Kugeln sind aus Kunststoff und haben kein Loch.

Wie viele Kugeln sind

4 Punkte a) schwarz, aus Kunststoff und haben kein Loch?

4 Punkte b) weiß, aus Holz und haben ein Loch?

9 Punkte **Aufgabe 5.**

Gegeben seien die Graphen $G_i = (V, E_i)$, $i = 1, 2, 3$ mit Knotenmenge $V = \{1, \ldots, 8\}$ und den folgenden Kantenmengen:

- $E_1 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{4,5\},\{4,8\},\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\}\}$.
- $E_2 = \{\{1,2\},\{1,8\},\{2,3\},\{2,5\},\{2,7\},\{3,4\},\{4,5\},\{6,7\},\{7,8\}\}$.
- $E_3 = \{\{1,3\},\{1,7\},\{2,4\},\{3,4\},\{3,7\},\{4,5\},\{4,8\},\{5,6\},\{6,8\}\}$.

Beweisen Sie, welche der Graphen G_1, G_2, G_3 isomorph sind und welche nicht.

Aufgabe 6.

Welche der folgenden Graphen G_i sind bipartit?

3 Punkte a) G_1 ist kreisfrei und zusammenhängend.

2 Punkte b) G_2 besitzt nur gerade Kreise, ist aber nicht zusammenhängend.

4 Punkte c) $G_3 = (V_3, E_3)$ ist ein Hyperwürfel, d. h. $V_3 = \{0,1\}^n$ und

$$\{u,v\} \in E_3 \iff u \text{ und } v \text{ unterscheiden sich in genau einer Komponente.}$$

6 Punkte **Aufgabe 7.**

Ist $(5,4,3,3,2,2,2,1)$ die Valenzsequenz eines Graphen? Begründen Sie Ihre Entscheidung. Geben Sie im Falle einer Valenzsequenz zwei nichtisomorphe Graphen mit dieser Valenzsequenz an.

6 Punkte **Aufgabe 8.**

Bestimmen Sie für die folgende Probleminstanz eine männeroptimale und eine frauenoptimale stabile Hochzeit. Die Menge der Männer sei $U := \{u_1, u_2, u_3\}$, die Menge der Frauen $V := \{v_1, v_2, v_3\}$ und die Totalordnungen eines Spielers auf der Menge des jeweils anderen Geschlechts sei gegeben durch je eine Präferenzliste. Dabei bedeutet z. B. die Liste (u_3, u_2, u_1) des Spielers v_1, dass $u_1 \prec_{v_1} u_2 \prec_{v_1} u_3$ ist.

$$\begin{array}{ll} u_1 : \ (v_3, v_2, v_1) & \quad v_1 : \ (u_3, u_2, u_1) \\ u_2 : \ (v_1, v_3, v_2) & \quad v_2 : \ (u_2, u_3, u_1) \\ u_3 : \ (v_1, v_2, v_3) & \quad v_3 : \ (u_2, u_1, u_3). \end{array}$$

10 Punkte **Aufgabe 9.**

Berechnen Sie für die folgende Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

- LU-Zerlegung und
- Cholesky-Faktorisierung.

Lösen Sie mit deren Hilfe das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (1,0,1)^\top$.

Aufgabe 10.

Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rcccl} \max\ x & + & y & + & z \\ \text{unter } x^2 & + & y^2 & = & 1 \\ 0 & \leq & z & \leq & 1. \end{array}$$

3 Punkte a) Stellen Sie die Kuhn-Tucker-Bedingungen auf.

5 Punkte b) Bestimmen Sie alle Kandidaten für Maximalstellen.

5 Punkte c) Bestimmen Sie alle globalen Maxima und weisen Sie die Maximalität nach.

Aufgabe 11.

Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rcccccc} \max & x & + & 2y & & \\ \text{unter} & x & + & 2y & \geq & 5 \\ & x & + & y & \leq & 4 \\ & & & y & \leq & 2. \end{array}$$

4 Punkte a) Zeigen Sie, dass die obigen Nebenbedingungen $x, y \geq 0$ implizieren und bringen Sie das Problem in die Normalform.

4 Punkte b) Bestimen Sie einen zulässigen Punkt (x, y).

3 Punkte c) Bestimmen Sie die Menge aller Optimalpunkte.

Verwenden Sie für b) und c) bitte den Simplexalgorithmus.