FernUniversität in Hagen

Matrikelnummer **(unbedingt eintragen!)**
Postanschrift: FernUniversität, 58084 Hagen
Name:
Vorname:
Straße, Nr.:
PLZ, Wohnort:

Fakultät für Mathematik
und Informatik

Bitte zurück an:
FernUniversität in Hagen
58084 Hagen

Kurs: 01145 Maß- und Integrationstheorie, WS 2013/14 – (LG Prof. Kirsch)

Einsendeaufgaben zur Probe– bzw. Musterklausur

Hinweise zur Bearbeitung (Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Beginnen Sie mit der Lösung einer Aufgabe stets auf einem neuen Blatt und versehen Sie dieses mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Nummer der Aufgabe.
2. Schreiben Sie bitte **deutlich** und **nicht** mit Bleistift.
3. Heften Sie zum Schluss dieses Deckblatt, die Aufgabenblätter und Ihre Lösungsblätter (nach Aufgaben sortiert) zusammen und kreuzen Sie in der Zeile „bearbeitet" die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben an.
4. Bei der Klausur sind **keine Hilfsmittel** wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Aufzeichnungen, Taschenrechner etc. zugelassen.
5. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie mindestens **24** Punkte erreicht haben.
6. Musterlösungen zur Probeklausur können Sie ca. 2 Wochen nach dem Bearbeitungsende in dem Kursbereich der virtuellen Universität und der Kurswebseite einsehen.

7. **Letzter Einsendetag: 20.01.2014 (Datum des Poststempels)**

Aufgabe	1	2	3	4	
bearbeitet:(bitte ankreuzen)					
erreichbare Punkte:	12	12	12	12	Summe: **48**
erreichte Punktezahl:					
Korrektor:					

Aufgabe 1

Wir betrachten den Vektorraum ℓ^2 gegeben durch

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \ \text{ mit } x_j \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \right\}$$

mit den Operationen $\alpha\, x := (\alpha x_j)_j$ und $x + y := (x_j + y_j)_j$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \ell^2$.

Zeigen Sie explizit: $\|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ist eine Norm auf ℓ^2.

Hinweis: Sie dürfen $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j||y_j| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2$ verwenden.

Aufgabe 2

a) Geben Sie zwei verschiedene σ-Algebren zur gleichen Grundmenge Ω an, deren Vereinigung keine σ-Algebra ist.

b) Finden Sie ein Dynkin-System $\mathcal{D}$, das keine σ-Algebra ist.
(Zeigen Sie explizit, dass $\mathcal{D}$ keine σ-Algebra ist.)

Aufgabe 3

Sei $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ ein Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, wobei

$$\delta_n(A) = \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2} & \text{für } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ e^{-x} & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Ist f λ_1-messbar?

b) Ist f λ_1-integrierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls $\int f(x)\, d\lambda_1(x)$.

c) Ist f μ-integrierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls $\int f(x)\, d\mu(x)$.

Hinweis: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Aufgabe 4

Sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Desweiteren sei eine Folge $(A_n)_n$ von Mengen in $\mathcal{A}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$$

gegeben.
Zeigen Sie: Die Menge

$$A := \{x \in M \,\big|\, x \in A_n \text{ für alle } n\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

hat Maß 0.