Klausur am 27.08.2016:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Wir müssen zwei Richtungen beweisen.

„$\Rightarrow$" Die Diophantische Gleichung $aX + bY + cZ = d$ sei lösbar in $\mathbb{Z}$. Dann gibt es ganze Zahlen x_0, y_0, z_0 mit $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$. Wir setzen $g = \mathrm{ggT}(a, b, c)$. Dann gilt $g \mid a$, $g \mid b$ und $g \mid c$, also $a = gm, b = gn, c = gk$ mit $m, n, k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0 = gmx_0 + gny_0 + gkz_0 = g(mx_0 + ny_0 + kz_0).$$

Es folgt, $g = \mathrm{ggT}(a, b, c) \mid d$.

„$\Leftarrow$" Es gelte jetzt $\mathrm{ggT}(a, b, c) = g \mid d$, also $d = gr$ für ein $r \in \mathbb{Z}$. Wir setzen $h = \mathrm{ggT}(a, b)$. Damit gilt $g = \mathrm{ggT}(h, c)$. Mit dem erweiterten Euklidischen Algorithmus gibt es ganze Zahlen s, t, v und w, so dass $g = sh + tc$ und $h = va + wb$ gilt. Es folgt $g = (sv)a + (sw)b + tc$ und damit

$$d = gr = a(svr) + b(swr) + c(tr).$$

Damit erhalten wir eine Lösung $(x_0, y_0, z_0) = (svr, swr, tr)$ in $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2

1. Seien p und q Primzahlzwillinge mit $q = p + 2$. Dann gilt

$$pq + 1 = p(p + 2) + 1 = p^2 + 2p + 1 = (p + 1)^2,$$

und das ist eine Quadratzahl.

2. Bis auf die Zahl 2 sind alle Primzahlen ungerade. Die Differenz zweier ungerader Zahlen ist gerade. Also muss die eine Primzahl ungerade und die andere gerade, also 2, sein. Alle ungeraden Primzahlen sind größer als 2. Um die Gleichung $p - q = 3$ zu erfüllen, muss also $p = 5$ und $q = 2$ gelten.

Aufgabe 3

Aus $a \equiv b \pmod{c}$ folgt $c \mid a - b$. Ferner sei $d = \mathrm{ggT}(a, c)$ und $e = \mathrm{ggT}(b, c)$. Daraus folgt zunächst $d \mid a$ und $d \mid c$, und mit $c \mid a - b$ folgt $d \mid a - b$. Das bedeutet, es gibt ein $s \in \mathbb{Z}$, so dass $a - b = sd$ gilt. Wegen $d \mid a$ folgt $sd = a - b = td - b$ für ein $t \in \mathbb{Z}$, also $b = (t - s)d$, was $d \mid b$ bedeutet. Daraus folgt $d \leq e$ wegen $e = \mathrm{ggT}(b, c)$. Weiter gilt $e \mid b$ und $e \mid c$ und wieder mit $c \mid a - b$ folgt $e \mid a - b$. Es gibt also ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $a - b = xe$. Es folgt $xe = a - b = a - ye$ für ein $y \in \mathbb{Z}$, also $a = (x + y)e$ und damit $e \mid a$. Es folgt $e \leq d$ und insgesamt ergibt sich $d = e$, die Behauptung.

© FernUniversität in Hagen, 2016

Aufgabe 4

Sei $n = p^r q^s$ mit $r, s \geq 1$. Es gilt $81 = \tau(n^2) = \tau(p^{2r} q^{2s}) = (2r+1)(2s+1)$. Dann gilt

$$r = 1, s = 13 \quad \text{oder} \quad r = s = 4 \quad \text{oder} \quad r = 13, s = 1.$$

Daraus folgt entweder

$$\tau(n^3) = (3r+1)(3s+1) = (3 \cdot 1 + 1)(3 \cdot 13 + 1) = (3 \cdot 13 + 1)(3 \cdot 1 + 1) = 4 \cdot 40 = 160,$$

oder

$$\tau(n^3) = (3r+1)(3s+1) = (3 \cdot 4 + 1)^2 = 13^2 = 169.$$

Aufgabe 5

Seien x und y teilerfremd. Wir zeigen die Behauptung mit einem Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt eine Primzahl p mit $p \mid xy$ und $p \mid x^2 + y^2$. Daraus folgt $p \mid x$ oder $p \mid y$ und weiter $p \mid x^2$ oder $p \mid y^2$. Angenommen p teilt x^2. Dann gilt $p \mid (x^2+y^2) - x^2 = y^2$. Umgekehrt folgt für $p \mid y^2$, dass $p \mid (x^2 - y^2) - y^2 = x^2$. Wir erhalten damit $p \mid x^2$ und $p \mid y^2$. Daraus folgt dann aber $p \mid x$ und $p \mid y$, weil p eine Primzahl ist. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$.

Aufgabe 6

Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion nach n.

Induktionsanfang: Sei $n = 0$. Dann folgt

$$\sum_{k=0}^{0} 2k + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1 = 1^2 = (0+1)^2.$$

Induktionsannahme: Die Behauptung gilt für ein $n \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschritt: Wir müssen von n auf $n+1$ schließen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 2k + 1 &= \sum_{k=0}^{n} 2k + 1 + 2(n+1) + 1 \\
&= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 && \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
&= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\
&= n^2 + 4n + 4 \\
&= (n+2)^2.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 7

Wir deklarieren zunächst die benötigten lokalen Variablen `M, p, q, i`. Anschließend initialisieren wir `M` auf die leere Menge, `p := 2` und `q := 3` auf die ersten beiden Primzahlen

© FernUniversität in Hagen, 2016

und `i := q` als Laufvariable für die folgende `while`-Schleife. Mittels einer `while`-Schleife lassen wir `i` bis maximal zur Zahl $n-1$ laufen. Innerhalb der Schleife wird mittels `if`-Abfrage geprüft, ob `p` und `q` Primzahlzwillinge sind. Das ist der Fall, wenn die Differenz $q-p=2$ ist. Ist die Abfrage wahr, dann werden die beiden Primzahlen in der Menge `M` gespeichert und `p` und `q` auf die jeweils nächste Primzahl gesetzt sowie `i` auf `q`. Sobald die `while`-Schleife beendet ist, wird die Menge `M` mit dem `print`-Befehl ausgegeben.

Eine mögliche Prozedur könnte folgendermaßen aussehen:

```
zwillinge:=proc(n) # gibt alle Primzahlezwillinge kleiner
                   # als n in einer Menge aus
  local M, p, q, i;
  M:={};
  p:=2;
  q:=3;
  i:=q;
  while i < n do
    if q-p=2 then
      M:=M union{{p, q}};
    fi;
    p:=q;
    q:=nextprime(q);
    i:=q;
  od;
  print(M);
end:
```

Aufgabe 8

1. Eine sinnvolle Reihenfolge ist z. B.:

```
klausur := proc(n)
  local i, p, L;
  L := [];
  for i from 1 to n do
     p := phi(i);
     if p = i/2 then
       L := [op(L), i];
     fi;
  od;
  print(L);
end:
```

2. Diese Prozedur erstellt eine Liste L der Zahlen $i \in \{1, \ldots, n\}$, für die $\varphi(i) = \frac{i}{2}$ gilt, und gibt L aus.

© FernUniversität in Hagen, 2016