Elementare Zahlentheorie mit Maple (01202) SS 2017

Klausur am 02.09.2017:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Sei $a \in \mathbb{N}$.

(a) Seien $b, c \in \mathbb{N}$, und es gelte $b \mid c$. Zeigen Sie, dass dann $a^b + 1 \mid a^c + 1$ folgt.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n = a^{2^n} + 1$. Zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gilt: $g_n \mid g_m - 2$ und berechnen Sie damit $\mathrm{ggT}(g_n, g_m)$.

[*4 + 6 = 10 Punkte*]

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Ist (a, b) Lösung für $2x^2 + (x+3)^2 = y^2$, dann ist 3 ein Teiler von b und entweder $a \equiv 0 (\bmod 3)$ oder $a \equiv 1 (\bmod 3)$.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 3

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es gilt $\sigma(n) \leq \sigma(n-1)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\sigma(n)$ ungerade?

[*4 + 6 = 10 Punkte*]

Aufgabe 4

Für die Geburtstagsfeier ihres Sohnes kauft Peters Mutter Schokoladenbonbons und verteilt sie in 7 kleine Tütchen. Über die restlichen 2 Bonbons freut sich schon Peters Bruder. Auf einmal sagt Peter: "Mama, die Laura mag doch gar keine Schokolade!", woraufhin Peters Mutter die Tütchen wieder auspackt und von vorne mit der Verteilung beginnt. Diesmal würden 3 Bonbons für Peters Bruder übrig bleiben, wenn Peter nicht eine weitere Information für seine Mutter hätte: "Mama, der Sven ist doch laktoseintolerant. Der sollte auch lieber Gummibärchen bekommen!" Und erneut beginnt Peters Mutter mit der Süßigkeitenverteilung auf die nun nur noch 5 Tütchen. Peters Bruder steht neugierig daneben und ist schon gespannt, wieviele Bonbons er endlich bekommt. Doch an Peters Grinsen erkennt er, dass er am Ende leer ausgeht, denn alle Bonbons sind gleichmäßig auf die Tütchen verteilt.
Wie groß ist die kleinstmögliche Anzahl an Schokoladenbonbons, die Peters Mutter gekauft hat?

[*10 Punkte*]

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie durch Kongruenzrechnung den kleinsten positiven Rest, den man bei Division von 3^{2643} durch 17 erhält.

(b) Berechnen Sie $7^{2402} \bmod 1515$.

(Hinweis zu (a): Es ist $2640 = 48 \cdot 55$, Hinweis zu (b): $1515 = 15 \cdot 101$ und 101 ist eine Primzahl.)

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Aufgabe 6

Berechnen Sie zwei verschiedene Gauß'sche Zahlen $z = a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $N(z) = 1073$. (Hinweis: Es ist $1073 = 29 \cdot 37$.)

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

(a) Bringen Sie folgenden Pseudocode in eine sinnvolle Reihenfolge, sodass die Prozedur lauffähig ist.

```
for i from 1 to m-1 do
print(N);
fi;
od;
J:={}; #Menge für Lösungen
LinKong:=proc(m::posint)
print(J);
end:
J:=J union {[a,i]};
a:=1;
if a*i mod m=3 mod m then
N:={}; #Menge für keine Lösungen
a:=a+1;
while a < m do
N:=N union {[a,i]};
od;
local i,J,N,a;
else
```

(b) Erläutern Sie kurz, was die Prozedur genau macht und geben Sie für $m = 4$ die Ausgabe der Prozedur an.

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Aufgabe 8

Schreiben Sie eine Maple-Prozedur `primlist(m)`, die für alle natürlichen Zahlen n mit $n \leq m, m \in \mathbb{N}$, den Wert $g(n) = 2n^2 + 3n - 1$ berechnet und alle Paare $[n, g(n)]$ in einer Liste L ausgibt, für die $g(n)$ eine Primzahl ist. Ist $g(n)$ keine Primzahl, dann wird das Tupel $[n, g(n), f]$ einer Liste N hinzugefügt, wobei f die Primfaktoren von $g(n)$ sind.

[*10 Punkte*]