

Klausur am 19.02.2011:

Aufgabenstellungen

---

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

### Aufgabe 1

Seien  $a, b, c \in \mathbb{N}$  mit  $c \mid ab$ . Sei  $d = \text{ggT}(c, a)$ . Beweisen Sie, dass  $c \mid db$  gilt.

[10 Punkte]

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Primzahlen  $p$ , für die  $11p + 1$  eine Quadratzahl ist (das heißt, dass  $11p + 1 = n^2$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  ist).

[10 Punkte]

### Aufgabe 3

Seien  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $a \equiv b \pmod{n}$ .

Beweisen Sie, dass  $\text{ggT}(a, n) = \text{ggT}(b, n)$  ist.

[10 Punkte]

### Aufgabe 4

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ . Beweisen Sie, dass  $\varphi(n) < n$  ist.

[8 Punkte]

### Aufgabe 5

Sei  $p$  eine Primzahl. Seien  $a, b, c \in \mathbb{N}$ .

Beweisen Sie: Wenn  $(a, b, c)$  eine Lösung von  $X^p + Y^p = Z^p$  ist, dann ist  $p$  ein Teiler von  $a + b - c$ .

Hinweis: Kleiner Satz von Fermat

[10 Punkte]

## Aufgabe 6

Seien  $a, b \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(a, b) = 1$ .

Beweisen Sie: Wenn  $a$  nicht Summe von zwei Quadraten ist, dann ist auch  $ab$  nicht Summe von zwei Quadraten.

[8 Punkte]

## Aufgabe 7

Sei  $z \in \mathbb{Z}[i]$  keine Einheit und keine Gauß'sche Primzahl. Beweisen Sie, dass es zu  $z$  einen Teiler  $w \in \mathbb{Z}[i]$  gibt, für den  $1 < N(w) \leq \sqrt{N(z)}$  gilt.

[8 Punkte]

## Aufgabe 8

Gegeben sei folgende Maple-Prozedur:

```
> #Die Zeilennummerierung ist zu Ihrer Orientierung
1. klausur:=proc(a::posint)
2.     local i,i2,j,liste,zähler,bereitsdrin;
3.     zähler:=0;
4.     for i from 0 to a-1 do
5.         i2:=i^2 mod a;
6.         bereitsdrin:=0;
7.         for j from 0 to zähler-1 do
8.             if i2=liste[j]
9.                 then bereitsdrin:=1;
10.            fi;
11.        od;
12.        if bereitsdrin=0 then
13.            liste[zähler]:=i2;
14.            zähler:=zähler+1;
15.        fi;
16.    od;
17.    print(liste);
18. end;
```

1. Vollziehen Sie Schritt für Schritt die Arbeitsweise der Prozedur an der Eingabe der Zahl 3.
2. Wie können Sie die Ausgabe der Prozedur allgemein für eine natürliche Zahl  $a \in \mathbb{N}$  beschreiben?
3. In der oben beschriebenen Prozedur kann man sich viel Arbeit sparen, wenn man statt mit einer Liste mit einer Menge arbeitet. Sie sehen hier ein Beispiel, wie Sie Mengen in Maple benutzen können:

```
> menge:={1,2};  
                               menge := {1, 2}  
> menge:= menge union {3};  
                               menge := {1, 2, 3}  
> menge:=menge union{1};  
                               menge := {1, 2, 3}
```

Verändern Sie die Prozedur aus 1., indem Sie statt der Liste „liste“ eine Menge „menge“ benutzen.

[7 + 2 + 7 = 16 Punkte]