

--	--	--	--	--	--	--	--

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität - 58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Elementare Zahlentheorie mit Maple (01202) WS 2011/12

DATUM: 18.02.2012
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise

(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt sind der Studienbrief, die Einsendeaufgaben und die Musterlösungen der Einsendeaufgaben dieses Semesters. Persönliche Notizen in diesen Aufzeichnungen sind erlaubt.
6. Weitere Hilfsmittel wie Bücher oder Taschenrechner dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit 5 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Bearbeitet									
max. Punktezahl	10	10	10	10	10	10	10	10	80
erreichte Punktezahl									
Korrektur									

Prüfergebnis/Note	
--------------------------	--

Klausur am 18.02.2012:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

1. Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(x, y) = 1$ und $\text{ggT}(x, z) = 1$. Beweisen Sie, dass $\text{ggT}(x, yz) = 1$ ist.
2. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(a, b) = 1$. Beweisen Sie, dass $\text{ggT}(a + b, ab) = 1$ ist.

Hinweis: Hier dürfen Sie den ersten Teil der Aufgabe verwenden, auch wenn Sie ihn nicht bearbeitet haben.

[4 + 6 = 10 Punkte]

Aufgabe 2

Ein Problem aus dem alten China: Eine Bande von 11 Piraten hat einen Sack mit Münzen erbeutet. Bei dem Versuch, die Beute gleichmäßig aufzuteilen, bleiben 3 Münzen übrig. Bei dem Streit darüber, wer diese drei Münzen erhalten soll, wird ein Pirat getötet. Die Beute wird erneut verteilt, doch dieses Mal bleiben 8 Münzen übrig. Es entbrennt abermals ein Streit, und wieder bleibt ein Pirat auf der Strecke. Nun aber kann die Beute endlich gerecht verteilt werden. Wie groß ist die kleinstmögliche Zahl von Münzen, die erbeutet wurde?

[10 Punkte]

Aufgabe 3

Sei n eine gerade vollkommene Zahl, und sei d mit $1 < d < n$ ein Teiler von n . Beweisen Sie, dass d nicht vollkommen ist.

[10 Punkte]

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass $(3, 4, 5)$ das einzige pythagoreische Tripel ist, das aus aufeinander folgenden Zahlen besteht.

[10 Punkte]

Aufgabe 5

Sei q eine Primzahl, die Summe von drei Quadraten von Primzahlen ist. Beweisen Sie, dass 3 eine dieser Primzahlen ist. (Tipp: Betrachten Sie $q \bmod 3$.)

[10 Punkte]

Aufgabe 6

Sei p eine Primzahl und sei $a \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(a, p) = 1$. Sei $b \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie, dass $a^{p-2}b$ eine Lösung der linearen Kongruenz $aX \equiv b \pmod{p}$ ist.

[10 Punkte]

Aufgabe 7

Gegeben sei folgende Maple-Prozedur.

```
> # Die Zeilennummerierung ist zu Ihrer Orientierung
01. klausur1:=proc(a::posint)
02.   local i, M;
03.   M:={};
04.   i:=1;
05.   while i < a do
06.     if a mod i = 0 then
07.       M:=M union{i};
08.     fi;
09.     i:=i+1;
10.   od;
11.   print(M);
12. end;
```

1. Vollziehen Sie die Arbeitsweise der Prozedur anhand der Eingabe 6 nach und geben Sie an, welche Ausgabe die Prozedur bei der Eingabe einer natürlichen Zahl a liefert.
2. Vergleichen Sie die Ausgabe aus 1. mit der Menge aller Teiler von a . Ändern Sie ggfs. die Prozedur so ab, dass die Ausgabe der Menge aller Teiler von a entspricht.

[7 + 3 = 10 Punkte]

Aufgabe 8

Schreiben Sie eine Prozedur, der zwei Gauß'sche Zahlen übergeben werden (Datentyp `complex`). Die Prozedur soll prüfen, ob die beiden übergebenen Gauß'schen Zahlen assoziiert sind. Sind sie assoziiert, so soll die Ausgabe `true` lauten, andernfalls `false`.

[10 Punkte]