Elementare Zahlentheorie mit Maple (01202) WS 15/16

Klausur am 05.03.2016:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen!

Aufgabe 1

Seien $a, b, m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Gilt $a^m = b^n$ und $\operatorname{ggT}(m, n) = 1$, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a = k^n$ und $b = k^m$.

Hinweis: Beachten Sie, dass $a = a^1$ gilt.

[*12 Punkte*]

Aufgabe 2

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ungleich 0.

1. Erweitern Sie die Definition des größten gemeinsamen Teilers $\operatorname{ggT}(a, b)$ auf eine Definition von $\operatorname{ggT}(a, b, c)$.
2. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ggT}(a, b, c) = \operatorname{ggT}(\operatorname{ggT}(a, b), c)$ gilt.
3. Zeigen Sie, dass es ganze Zahlen s, t, u gibt, so dass $\operatorname{ggT}(\operatorname{ggT}(a, b), c) = sa + tb + uc$ gilt.

[*2 + 6 + 4 = 12 Punkte*]

Aufgabe 3

Es seien $a, b, d, m \in \mathbb{Z}$ und es gelte $d \mid m$ und $a \equiv b \pmod{m}$.

Zeigen Sie: Es gilt $d \mid a$ genau dann, wenn $d \mid b$ gilt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Sei $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$ fest gewählt. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{p \leq x} \sigma(p) - \sum_{p \leq x} \varphi(p) = \sum_{p \leq x} \tau(p).$$

gilt, wobei die Summen jeweils über alle Primzahlen p laufen, die kleiner oder gleich x sind.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 5

Sei d eine durch 4 teilbare natürliche Zahl. Beweisen Sie, dass die Gleichung $X^2-dY^2=-1$ keine Lösung (x,y) mit $x,y\in\mathbb{Z}$ hat.

Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung modulo 4.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Geben Sie eine Gauß'sche Zahl z an, für die $z+\bar{z}=8$ und $z\cdot\bar{z}=80$ gilt.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Schreiben Sie eine Maple-Prozedur, die bei Eingabe von ganzen Zahlen a,b,c zunächst prüft, ob $aX+bY=c$ eine lineare Diophantische Gleichung ist und, falls dies der Fall ist, anschließend a',b',c' berechnet, so dass $a'X+b'Y=c'$ die zugehörige reduzierte Gleichung ist, falls diese existiert. Die Zahlen a',b',c' sollen in einer Liste so ausgegeben werden, dass sie weiter verwendet werden können. Eine Ausgabe auf dem Bildschirm reicht nicht aus.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 8

Im Beweis zu Satz 2.2.6 „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“ haben wir die Zahl $N=p_1\cdot p_2\cdots p_{r-1}\cdot p_r+1$ betrachtet, wobei mit p_i die i-te Primzahl für alle $1\le i\le r$ bezeichnet wird. Uns interessiert nun, für welche natürliche Zahlen die Zahl N prim ist.

Schreiben Sie eine Prozedur `Primzahl`, der eine natürliche Zahl n übergeben wird. Für jede Zahl $p_1\cdots p_i+1$ mit $1\le i\le n$ soll geprüft werden, ob sie eine Primzahl ist. Das jeweilige Ergebnis wird in **einer** Gesamtliste festgehalten. Ist die Zahl $p_1\cdots p_i+1$ eine Primzahl, so soll der Liste eine 1 hinzugefügt werden, andernfalls eine 0. Wenn die letzte Zahl $p_1\cdots p_n+1$ erreicht ist (und überprüft wurde) besteht die Gesamtliste also aus n Zahlen, die entweder 1 oder 0 sind. Am Ende der Prozedur soll die Gesamtliste ausgegeben werden, also beispielsweise in der Form `[1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0]`.

[*10 Punkte*]