

Sommer 05

**Aufgabe 1**a) Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$\text{Cone } X = \left\{ \sum_{x_i \in X} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0, x_i \in X, \text{ nur endlich viele } \lambda_i \neq 0 \right\}.$$

b)

„ $\Rightarrow$ “  $x \in \text{Cone } S = \text{Lin } S \Rightarrow -x \in \text{Lin } S = \text{Cone } S$ . Also gibt es nicht-negative Koeffizienten  $\mu_i$  von denen nur endlich viele verschieden von Null sind mit

$$-x = \sum_{s_i \in S} \mu_i s_i.$$

Falls  $x \notin S$ , so folgt die Behauptung direkt. Andernfalls ist

$$-x = \mu_x x + \sum_{s_i \in S \setminus x} \mu_i s_i$$

und  $1 + \mu_x \geq 1 \neq 0$  also

$$-x = \sum_{\substack{s_i \in S \\ s_i \neq x}} \frac{\mu_i}{1 + \mu_x} s_i \in \text{Cone } (S \setminus \{x\}).$$

„ $\Leftarrow$ “  $\text{Cone } S \subseteq \text{Lin } S$  ist klar, wir müssen nur die umgekehrte Inklusion zeigen. Sei also  $z \in \text{Lin } S$  und  $z = \sum_{s_i \in S} \lambda_i s_i$  eine Linearkombination von  $z$  mit möglichst wenig negativen Koeffizienten  $\lambda_i$ . Ist keiner negativ, so sind wir fertig. Ansonsten sei etwa  $\lambda_0 < 0$ . Nach Voraussetzung ist  $-s_0 \in \text{Cone}(S \setminus \{s_0\})$ , also gibt es nicht-negative  $\mu_i$  (nur endlich viele  $\neq 0$ ) mit

$$-s_0 = \sum_{s_i \in S \setminus s_0} \mu_i s_i \quad \text{und mit}$$

$$z = -\lambda_0(-s_0) + \sum_{s_i \in S \setminus \{s_0\}} \lambda_i s_i = \sum_{s_i \in S \setminus \{s_0\}} \left( \underbrace{(-\lambda_0 \mu_i)}_{\geq 0} + \lambda_i \right) s_i$$

erhalten wir eine Linearkombination von  $z$  mit echt weniger negativen Koeffizienten im Widerspruch zur Wahl der Darstellung von  $z$ .

**Aufgabe 2**

a)  $F \subseteq P$  heißt Seite eines Polyeders, wenn es ein lineares Funktional  $d$  und ein  $\delta \in \mathbb{R}$  gibt mit  $dx \leq \delta$  für alle  $x \in P$  und

$$F = \{x \in P \mid dx = \delta\}.$$

b) Sei  $P = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay \leq b\}$ . Dann ist

$$f^{-1}(P) = \{x \in \mathbb{R}^r \mid A(Bx + c) \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^r \mid (AB)x \leq b - Ac\}$$

offensichtlich ein Polyeder.

c) Seien  $d, \delta$  wie in a). Dann ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= \{x \in \mathbb{R}^r \mid A(Bx + c) \leq b, d(Bx + c) = \delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^r \mid (AB)x \leq b - Ac, (dB)x = \delta - dc\}. \end{aligned}$$

Da

$$A(Bx + c) \leq b \Rightarrow d(Bx + c) \leq \delta \Rightarrow (dB)x \leq \delta - dc$$

ist  $f^{-1}(F)$ , falls es nicht leer ist, eine Seite von  $f^{-1}(P)$ .

### Aufgabe 3

a) Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  endlich. Dann heißt  $\text{Conv } X$  ein Polytop.

b) Zunächst kann man die Bedingung an die Norm auflösen in  $n$  Ungleichungspaare  $-1 \leq x_i \leq 1$ . Mit der Matrix  $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n \end{pmatrix}$  und  $b$  der Vektor mit  $n$  1sen und  $n$  -1sen ist  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ , also ist  $P$  ein Polyeder. Nach Satz der Vorlesung sind Polytope genau die beschränkten Polyeder.  $P$  ist aber nach Voraussetzung bzgl. der  $\infty$ -Norm beschränkt.

### Aufgabe 4

a) Eine Optimierungsaufgabe  $\max\{cx \mid Ax \leq b\}$  heißt zulässig, wenn es ein  $x \in \mathbb{R}^n$  gibt mit  $Ax \leq b$ .

b) Sei  $(P) = \max\{cx \mid Ax \leq b\}$  und  $(D) = \min\{yb \mid yA = c, y \geq 0\}$ . Sind beide Programme zulässig, so gilt Gleichheit.

c) Nach b) ist

$$\begin{aligned} \max\{cx \mid x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0, Ax \leq b\} &= \max\{cx \mid x \in \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} A \\ -\mathbf{1}_n \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}\} \\ &= \min\{yb \mid y \in \mathbb{R}_m, (y, z) \begin{pmatrix} A \\ -\mathbf{1}_n \end{pmatrix} = c, y, z \geq 0\} \\ &= \min\{yb \mid y \in \mathbb{R}_m, yA - z = c, y, z \geq 0\} \\ &= \min\{yb \mid y \in \mathbb{R}_m, y \geq 0, yA \geq c\}, \end{aligned}$$

falls beide Programme zulässig sind.

### Aufgabe 5

Wir bezeichnen mit  $x_L, x_A, x_S$  die Anzahl der normal geräucherten Lachse, Aale bzw. Schollen und mit  $y_L, y_A, y_S$  die Anzahl der in Überstunden geräucherten Fische. Dann haben wir die Restriktionen

$$\begin{aligned} x_L + x_A + x_S &\leq 420 \\ y_L + y_A + y_S &\leq 250. \end{aligned}$$

Da die Summe der normal geräucherten und der in Überstunden geräucherten Fische die Gesamtzahl jeder Sorte Fisch nicht übersteigen darf, haben wir darüberhinaus:

$$\begin{aligned} x_L + y_L &\leq 480 \\ x_A + y_A &\leq 400 \\ x_S + y_S &\leq 230 \end{aligned}$$

und selbstverständlich  $x_A, x_L, x_S, y_L, y_A, y_S \geq 0$ .

Der Frischfisch ergibt sich dann als Differenz, also ist etwa  $480 - x_L - y_L$  die Menge des produzierten frischen Lachses. Also erhalten wir als Nettogewinnfunktion

$$14x_L + 11y_L + 8(480 - x_L - y_L) + 12x_A + 7y_A + 4(400 - x_A - y_A) + 13x_S + 9y_S + 4(230 - x_S - y_S),$$

die wir zusammenfassen zu

$$6360 + 6x_L + 3y_L + 8x_A + 3y_A + 9x_S + 5y_S.$$

Für die Optimierung spielt die Konstante keine Rolle, also erhalten wir als lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{lcl}
 \max & 6x_L + 3y_L + 8x_A + 3y_A + 9x_S + 5y_S & \\
 \text{unter} & x_L & + x_A + x_S \leq 420 \\
 & & y_L + y_A + y_S \leq 230 \\
 & x_L + y_L & \leq 480 \\
 & & x_A + y_A \leq 400 \\
 & & x_S + y_S \leq 230 \\
 & & x_L, x_A, x_S, y_L, y_A, y_S \geq 0
 \end{array}$$

b) Wir dualisieren, wobei wir als Variablen  $u_r, u_u$  für die Restriktionen an den normal bzw. in Überstunden geräucherten Fisch nehmen und  $u_L, u_A, u_S$  für die Restriktion an die Gesamtzahl Fische. Dann erhalten wir als duales Programm:

$$\begin{array}{lcl}
 \min & 420u_r + 250u_u + 480u_L + 400u_A + 230u_S & \\
 \text{unter} & u_r & + u_L \geq 6 \\
 & & u_u + u_L \geq 3 \\
 & u_r & + u_A \geq 8 \\
 & & u_u + u_A \geq 3 \\
 & u_r & + u_S \geq 9 \\
 & & u_u + u_S \geq 5 \\
 & & u_L, u_A, u_S, u_u, u_r \geq 0
 \end{array}$$

Die einzige Ungleichung aus dem primalen Programm, die in der angegebenen Lösung nicht mit Gleichheit erfüllt wird, ist die Bedingung an die Lachse. Nach dem Satz vom komplementären Schlupf muss also, falls die angegebene Lösung optimal ist, in jeder optimalen Duallösung  $u_L = 0$  sein. Nach Tipp setzen wir ferner  $u_r = 7$ . Damit benötigen wir  $u_S = 2, u_u = 3$  und  $u_A = 1$ . Als Zielfunktionswert erhalten wir im Primalen

$$400 \cdot 8 + 20 \cdot 9 + 210 \cdot 5 + 40 \cdot 3 = 3200 + 180 + 1050 + 120 = 4550$$

und im Dualen

$$7 \cdot 420 + 3 \cdot 250 + 400 + 2 \cdot 230 = 2940 + 750 + 400 + 460 = 4550.$$

Da Gleichheit gilt, müssen beide Lösungen optimal sein.

Natürlich hätten Sie ebensogut das primale Programm mit dem Simplexalgorithmus optimieren können.

### Aufgabe 6

Für die zweite Zeile haben wir keine Einheitsspalte. Um also ein zulässiges Starttableau zu erhalten, benötigen wir eine künstliche Schlupfvariable  $z$  in der zweiten Zeile. Wir erhalten in Phase 1 folgendes Starttableau:

-2	-5	0	0	1	0	-4	
-1	1	0	0	0	0	0	
5	-1	0	1	0	0	10	$x_4$
<span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">2</span>	5	0	0	-1	1	4	$z$
1	5	1	0	0	0	5	$x_3$

Beim Minimalquotiententest sind die erste und die zweite Zeile gleichberechtigt. Hier pivotieren wir in der zweiten Zeile, da dies den künstlichen Schlupf aus der Basis befördert:

$$\begin{array}{cccccc|c|c}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 0 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & \\
 \hline
 0 & -\frac{27}{2} & 0 & 1 & \boxed{\frac{5}{2}} & -\frac{5}{2} & 0 & x_4 \\
 1 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 & x_1 \\
 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 & x_3.
 \end{array}$$

Streichen wir die künstliche Zielfunktion und die  $z$ -Spalte, so haben wir ein zulässiges Starttableau für Phase II und sind nach einem weiteren Pivotschritt fertig mit folgendem Tableau

$$\begin{array}{cccc|c|c}
 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 2 & \\
 0 & -\frac{27}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 1 & 0 & x_5 \\
 1 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 2 & x_1 \\
 0 & \frac{26}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & 0 & 3 & x_3.
 \end{array}$$

Wir lesen als Optimallösung ab  $x_1 = 2, x_3 = 3$ , alle anderen Variablen sind Null und der Optimalwert ist 2.

Wintersemester 05/06

### Aufgabe 1

a)  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt Polyeder, wenn es  $m \in \mathbb{N}$  und  $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$  sowie  $b \in \mathbb{R}^m$  gibt mit  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ .  $\emptyset \neq F \subseteq P$  heißt Seite eines Polyeders, wenn es ein lineares Funktional  $d$  und ein  $\delta \in \mathbb{R}$  gibt mit  $dx \leq \delta$  für alle  $x \in P$  und

$$F = \{x \in P \mid dx = \delta\}.$$

b) Wir haben  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \mathbb{N}_n : -1 \leq x_i \leq 1\}$ . Sei also  $A$  die  $2n \times n$ -Matrix  $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n \end{pmatrix}$  und  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  der Vektor mit je  $2n$  1en. Dann ist  $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ . Sei nun  $d$  das lineare Funktional  $\sum_{i=2}^n \xi_i$  und  $\delta = n - 1$ . Dann gilt für alle  $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in P : \sum_{i=2}^n \xi_i \leq n - 1$  und Gleichheit auf  $F$ . Also ist  $F$  eine Seite.

### Aufgabe 2

a) Seien  $y, z \in K$  und  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Wir haben zu zeigen, dass  $\alpha y + (1 - \alpha)z \in K$ . Dies folgt sofort aus der Dreiecksungleichung:

$$\|\alpha y + (1 - \alpha)z\|_2 \leq |\alpha| \|y\|_2 + |1 - \alpha| \|z\|_2 \stackrel{y, z \in K}{\leq} \alpha + (1 - \alpha) = 1.$$

b) Die erste Implikation zeigen wir mittels Kontraposition. Sei also  $K \setminus x_0$  nicht konvex. Dann gibt es  $y, z \in K \setminus x_0$  mit  $x_0 \in [y, z]$ . Da  $y \neq x_0 \neq z$  vorausgesetzt wurde, heißt dies gerade, dass  $x_0$  kein Extrempunkt von  $K$  ist. Für die umgekehrte Implikation sei nun  $K \setminus x_0$  konvex und  $y, z \in K$  mit  $x_0 \in [y, z]$ . Da  $K \setminus x_0$  konvex ist, können  $y$  und  $z$  nicht beide in  $K \setminus x_0$  liegen, also ist  $x_0 \in \{y, z\}$ .

c) Alle Randpunkte des Kreises sind Extrempunkte. Die Kreisscheibe hat also unendlich viele Extrempunkte. Da die Extrempunkte eines Polytops genau seine Ecken sind, kann  $K$  kein Polytop sein, da ein solches per definitionem nur endlich viele Ecken hat.

### Aufgabe 3

a) Die duale lineare Optimierungsaufgabe lautet

$$\min 10v_1 + 8v_2 + 26v_3$$

unter der Bedingung

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + 3v_3 &\geq 3 \\ 2v_1 + v_2 + 5v_3 &\geq 4 \\ v_1, v_2, v_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

b) Wir bestimmen zunächst eine Optimallösung mit dem Simplexalgorithmus. Dafür erhalten wir folgende Tableaus:

-3	-4	0	0	0	0	0	0	-1	0	3	0	24	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	25
1	2	1	0	0	10	0	1	1	-1	0	2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1</span>	1	0	1	0	8	1	1	0	1	0	8	1	0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7	
3	5	0	0	1	26	0	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span>	0	-3	1	2	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1.	

Als Optimallösung erhalten wir also  $\xi_1 = 7, \xi_2 = 1$ . Die erste Ungleichung  $\xi_1 + 2\xi_2 \leq 10$  ist in dieser Optimallösung strikt. Also muss die erste Dualvariable nach dem Komplementaritätssatz  $v_1 = 0$  gelten.

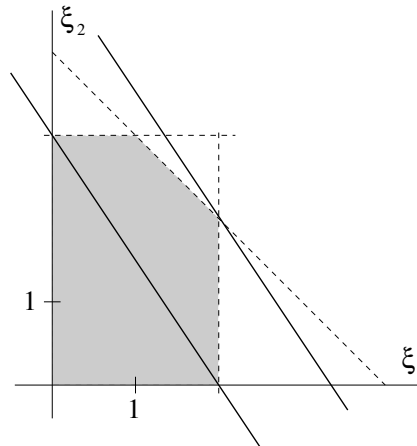
**Aufgabe 4**

a) Sei  $x_i$  die Menge Schweröl (in Tonnen), die auf Anlage  $i$  pro Tag verarbeitet wird, also  $0 \leq \xi_1 \leq 2$  und  $0 \leq \xi_2 \leq 3$ . Aus den Laufzeitrestriktionen erhalten wir dazu  $10\xi_1 \leq 20$  und  $5\xi_2 \leq 20$ , diese sind wegen der Mengenbeschränkungen redundant. Die Gesamtmengenbeschränkung liefert  $\xi_1 + \xi_2 \leq 4$ . Der Gesamterlös aus der Produktion beträgt  $1710(3/4\xi_1 + 1/4\xi_2) + 630(1/4\xi_1 + 3/4\xi_2) = 1440\xi_1 + 900\xi_2$  und die Kosten bei  $360\xi_1 + 180\xi_2$ . Die Zielfunktion ist also  $1080\xi_1 + 720\xi_2$ . Wir erhalten also als mathematisches Modell

$$\max 1080\xi_1 + 720\xi_2 = 360(3\xi_1 + 2\xi_2)$$

unter der Bedingung

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 &\leq 4 \\ \xi_1 &\leq 2 \\ \xi_2 &\leq 3 \\ \xi_1, \xi_2 &\geq 0. \end{aligned}$$



b) In der nebenstehenden Graphik lesen wir als Optimallösung  $\xi_1 = \xi_2 = 2$  ab mit einem Gewinn von 3600 €.

**Aufgabe 5**

Nach Einfügen der Schlupfvariablen  $y_1, y_2$  haben wir für die zweite Zeile keine Einheitsspalte. Um also ein zulässiges Starttableau zu erhalten, benötigen wir eine künstliche Schlupfvariable  $z$  in der zweiten Zeile. Wir erhalten in Phase 1 folgendes Starttableau:

-3	-4	-2	0	1	0	-8	
-3	-2	-3	0	0	0	0	
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span>	1	1	1	0	0	2	$y_1$
3	4	2	0	-1	1	8	$z$

Wählen wir die erste Spalte als Pivotspalte, so erhalten wir mittels des Minimalquotiententests die erste Zeile als Pivotzeile.

0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0	-5	
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	3	
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$x_1$
0	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>\frac{5}{2}</math></span>	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	1	5	$z$

Im Minimalquotiententest in der zweiten Spalte ist nun  $1 : 1/2 = 2 = 5 : 5/2$ . Wir wählen letzteres, damit  $z$  aus der Basis austritt.

0	0	0	0	0	1	0	
0	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	4	
1	0	$\frac{2}{5}$	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>\frac{4}{5}</math></span>	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$x_1$
0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	2	$x_2$

Wir haben also mit  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 2$  eine zulässige Lösung gefunden und Phase I abgeschlossen. Als letztes pivotieren wir noch  $x_3$  in die Basis:

$$\begin{array}{cccc|c|c} \frac{7}{2} & 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 4 & \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & y_1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 2 & x_2. \end{array}$$

Dieses Tableau ist optimal und wir erhalten als Optimallösung  $x_1 = 0 = x_3$  und  $x_2 = 2$  mit einem Zielfunktionswert von 4.

### Aufgabe 6

a) Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann ist

$$\text{Conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \mid m \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, x_i \in X \right\}.$$

b) Wir zeigen zunächst die Aussage im Hinweis. Seien also  $y \in \text{Conv}(S \cup \{x\}) \setminus \text{Conv}(S)$  und  $x \in \text{Conv}(S \cup \{y\}) \setminus \text{Conv}(S)$  sowie  $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}_+$  mit

$$\begin{aligned} y &= \lambda_0 x + \sum_{i=1}^m \lambda_i s_i, \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \\ x &= \mu_0 y + \sum_{i=1}^m \mu_i s_i, \quad \sum_{i=0}^m \mu_i = 1. \end{aligned}$$

Da  $x, y \notin \text{Conv}(S)$  gilt notwendig  $\lambda_0 \neq 0 \neq \mu_0$ . Wir haben zu zeigen, dass sogar  $\lambda_0 = \mu_0 = 1$  gilt. Angenommen dies wäre nicht der Fall. Dann ist  $1 - \lambda_0 \mu_0 > 0$  und

$$\begin{aligned} y &= \lambda_0 \left( \mu_0 y + \sum_{i=1}^m \mu_i s_i \right) + \sum_{i=1}^m \lambda_i s_i \\ &= \lambda_0 \mu_0 y + \sum_{i=1}^m (\lambda_0 \mu_i + \lambda_i) s_i, \end{aligned}$$

also

$$y = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_0 \mu_i + \lambda_i}{1 - \lambda_0 \mu_0} s_i$$

und  $\frac{\lambda_0 \mu_i + \lambda_i}{1 - \lambda_0 \mu_0} \in \mathbb{R}_+$  mit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_0 \mu_i + \lambda_i}{1 - \lambda_0 \mu_0} &= \frac{1}{1 - \lambda_0 \mu_0} \left( \lambda_0 \sum_{i=1}^m \mu_i + \sum_{i=1}^m \lambda_i \right) \\ &= \frac{1}{1 - \lambda_0 \mu_0} (\lambda_0 (1 - \mu_0) + 1 - \lambda_0) = 1. \end{aligned}$$

Also wäre dann  $y \in \text{Conv}(S)$  im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich muss  $x = y$  sein, womit der Hinweis gezeigt wurde. Der Hinweis ist aber logisch äquivalent zu der Aussage:

$$(y \in \text{Conv}(S \cup \{x\}) \setminus \text{Conv}(S) \text{ und } x \neq y) \implies x \notin \text{Conv}(S \cup \{y\}) \setminus \text{Conv}(S).$$

Wegen  $y \in \text{Conv}(S \cup \{x\}) \setminus \text{Conv}(S) \neq \emptyset$ , gilt auch  $x \notin \text{Conv}(S)$ .

Sommer 06

**Aufgabe 1**

a) Die affine Hülle  $\text{Aff}(S)$  von  $S$  ist der kleinste affine Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ , der  $S$  enthält.

$$\text{Aff}(S) = \left\{ \sum_{s \in S} \lambda_s s \mid \sum_{s \in S} \lambda_s = 1, \text{ nur endliche viele } \lambda_s \neq 0 \right\}.$$

b) Seien  $\{a_0, \dots, a_p\}$  *affin abhängig*. Nach Definition gibt es dann  $\lambda_0, \dots, \lambda_p$  nicht alle Null, mit  $\sum_{i=0}^p \lambda_i a_i = 0$  und  $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 0$ . Sei o.E.  $\lambda_0 \neq 0$ . Dann ist

$$a_0 = \sum_{i=1}^p \frac{-\lambda_i}{\lambda_0} a_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^p \frac{-\lambda_i}{\lambda_0} = \sum_{i=0}^p \frac{\lambda_i}{\lambda_0} + \sum_{i=1}^p \frac{-\lambda_i}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0} = 1.$$

Also ist  $a_0 \in \text{Aff}\{a_1, \dots, a_p\}$ .

Ist umgekehrt  $a_{i_0} \in \text{Aff}(\{a_0, \dots, a_n\} \setminus \{a_{i_0}\})$ , so ist

$$a_{i_0} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^n \lambda_i a_i \quad \text{mit} \quad \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^n \lambda_i = 1$$

und somit zeigt

$$(-1)a_{i_0} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^n \lambda_i a_i = 0$$

die affine Abhängigkeit von  $\{a_0, \dots, a_p\}$ .

**Aufgabe 2**

a) Seien  $x, y \in S$ , gelte  $cx \leq \delta$  und  $cy \leq \delta$  und sei  $0 \leq t \leq 1$ . Dann ist

$$c(tx + (1-t)y) = t cx + (1-t)cy \leq t\delta + (1-t)\delta.$$

Also gelten lineare Ungleichungen, die für zwei Punkte gelten auch für deren Verbindungsgerade. Da  $S$  durch lineare Ungleichungen definiert ist, folgt die Behauptung.

b) Wir haben 5 Ungleichungen, von denen wir jeweils drei zu Gleichungen machen. Zunächst ist  $v_1 = (0, 0, 0)$  eine Ecke. Sind  $x = y = 0$ , so liefert die erste Ungleichung  $v_2 = (0, 0, 2)$  und die zweite einen unzulässigen Punkt. Analog erhalten wir  $v_3 = (0, 2, 0)$  und  $v_4 = (1, 0, 0)$ . Setzen wir  $x = 0$  kann nicht gleichzeitig  $y + z = 2$  und  $y + z = 3$  gelten. Für  $y = 0$  erhalten wir  $v_5 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$  und für  $z = 0$   $v_6 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ .

c) Nach dem Hauptsatz der linearen Optimierung wird das Optimum an einer Ecke angenommen. Das Optimum liegt offensichtlich in  $v_3$  und hat den Wert 4.

**Aufgabe 3**

a)  $x$  ist eine Ecke des Polyeders

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ -a_1 & \cdots & -a_n \\ 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \\ -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



genau dann, wenn es eine Teilmenge  $I$  der Zeilenindizes gibt, so dass  $A_I$  vollen Zeilenrang hat und  $A_I x = b_I$  ist. Da die ersten beiden Zeilen von  $A$  linear abhängig sind, müssen mindestens  $n - 1$  der Ungleichungen  $x_i \geq 0$  oder  $x_i \leq 1$  mit Gleichheit erfüllt sein. Offensichtlich müssen für diese die Indizes der  $x_i$  verschieden sein. Also müssen mindestens  $n - 1$  Koordinaten von  $x$  gleich 0 oder 1 sein.

b) Sei  $x^*$  optimale Ecke. Wir setzen

$$\lambda = \min \left\{ \frac{c_j}{a_j} \mid x_j^* > 0 \right\}$$

und sei  $i_0$  ein Index, an dem dieses Minimum angenommen wird. Angenommen, es gäbe ein  $i$  mit  $c_i > \lambda a_i$  und  $x_i^* < 1$ . Dann ist für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$

$$x = x^* + \varepsilon e_i - \varepsilon \frac{a_i}{a_{i_0}} e_{i_0}$$

zulässig und

$$\sum_{j=1}^p c_j x_j = \sum_{j=1}^p c_j x_j^* + \varepsilon c_i - \varepsilon \frac{c_{i_0} a_i}{a_{i_0}} > \sum_{j=1}^p c_j x_j^* + \varepsilon a_i (\lambda - \lambda) = \sum_{j=1}^p c_j x_j^*$$

im Widerspruch zur Optimalität von  $x$ . Analog führt die angenommene Existenz eines  $i$  mit  $c_i < \lambda a_i$  und  $x_i^* > 0$  vermöge

$$x = x^* - \varepsilon e_i + \varepsilon \frac{a_i}{a_{i_0}} e_{i_0}$$

für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  zu

$$\sum_{j=1}^p c_j x_j = \sum_{j=1}^p c_j x_j^* - \varepsilon c_i + \varepsilon \frac{c_{i_0} a_i}{a_{i_0}} > \sum_{j=1}^p c_j x_j^* - \varepsilon a_i (\lambda - \lambda) = \sum_{j=1}^p c_j x_j^*$$

und somit zum Widerspruch zur Optimalität von  $x^*$ .

#### Aufgabe 4

a) Falsch. In die Verbesserung geht nicht nur der Gradient, also der Eintrag in der Kopfzeile, sondern auch die Länge der verbessernden Kante ein. Ist  $-\bar{c}_j$  der Eintrag in der Kopfzeile der Pivotspalte,  $i$  der Index der Pivotzeile und sind  $\bar{b}_i$  bzw.  $\bar{a}_{ij}$  die relevanten Einträge im Tableau, so ändert sich die Zielfunktion um

$$\frac{\bar{b}_i}{a_{ij}} \bar{c}_j.$$

b) Richtig. Ist  $i_0$  die Pivotzeile aber

$$\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} < \frac{\bar{b}_{i_0}}{\bar{a}_{i_0j}},$$

so ist im nachfolgenden Tableau

$$\bar{b}'_i = \bar{b}_i - \frac{\bar{b}_{i_0}}{a_{i_0j}} \bar{a}_{ij} < 0$$

und somit die neue Ecke unzulässig.

c) Falsch. Man findet nur eine Basis für ein Hilfsproblem. Solange die künstliche Variable verschieden von Null ist, sind die restlichen Werte unzulässig für die Gleichungsrestriktion.

d) Wie in a) festgestellt, berechnet sich der Fortschritt als

$$\frac{\bar{b}_i}{a_{ij}} \bar{c}_j.$$

Um diesen Wert für alle Nichtbasisvariablen mit negativem Kopfzeileneintrag zu berechnen, müssen wir im ungünstigsten Fall zunächst in allen  $n - m$  Nichtbasisspalten die Pivotzeile bestimmen und dann obigen Ausdruck berechnen. Also braucht man bis zu  $n(m - n)$  Divisionen,  $(n - m)$  Multiplikationen und  $(n + 1)(m - n)$  Vergleiche. Dies ist in etwa so teuer wie ein kompletter Pivotschritt. Bei dieser Methode ist ein einzelner Pivotschritt also etwa doppelt so teuer wie z.B. beim Gradientenverfahren.

### Aufgabe 5

a) Wir bezeichnen mit  $x, y$  bzw.  $z$  die Menge der Teile,  $X, Y$  bzw.  $Z$ , die wir herstellen. Aus der Maschinenlaufzeit erhalten wir als Restriktionen für die beiden Maschinen

$$36x + 72y + 180z \leq 40 \cdot 3600 \text{ bzw. } 180x + 72y + 144z \leq 40 \cdot 3600.$$

Wir kürzen die Ungleichungen durch 36 und erhalten als Modell

$$\max 5x + 4y + 3z$$

unter der Bedingung

$$\begin{aligned} x + 2y + 5z &\leq 4000 \\ 5x + 2y + 4z &\leq 4000 \\ x, y, z &\geq 0. \end{aligned}$$

b) Wir erhalten, wenn wir mit  $s_1, s_2$  die Schlupfvariablen bezeichnen als Starttableau

$$\begin{array}{cccccc|c|c} -5 & -4 & -3 & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 4000 & & s_1 \\ 5 & \boxed{2} & 4 & 0 & 1 & 4000 & & s_2. \end{array}$$

Aus Bequemlichkeit pivotieren wir in der zweiten Zeile, zweite Spalte und erhalten mit

$$\begin{array}{cccccc|c|c} 5 & 0 & 5 & 0 & 2 & 8000 & & \\ \hline -4 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & & s_1 \\ \frac{5}{2} & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 2000 & & y \end{array}$$

direkt ein finales Tableau, aus dem wir den optimalen Produktionsplan  $x = z = 0$  und  $y = 2000$  ablesen.

### Aufgabe 6

Wir erhalten als duale Aufgabe

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{unter} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 18 \\ & x_1 - 2x_3 \leq -4 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Die zweite Zeile formen wir um zu  $-x_1 + 2x_3 \geq 4$  und führen für diese Ungleichung nicht nur eine Schlupfvariable  $s_2$ , sondern zusätzlich noch eine künstliche Schlupfvariable  $z$  ein. Wir erhalten als Starttableau mit künstlicher Zielfunktion

$$\begin{array}{cccc|cccc|c|c}
 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & & \\
 -1 & -3 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 18 & s_1 & \\
 -1 & 0 & \boxed{2} & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 & z & \\
 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & s_3 & 
 \end{array}$$

Ein Pivot in der dritten Spalte sieht vielversprechend aus. Beim Minimalquotiententest erhalten wir das Pivotelement in der zweiten Zeile. Das nächste Tableau ist

$$\begin{array}{cccc|cccc|c|c}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\
 -\frac{7}{2} & -3 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 10 & & \\
 \hline
 \frac{3}{2} & \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 16 & s_1 & \\
 -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 & x_3 & \\
 \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 6 & s_3 & 
 \end{array}$$

Wir streichen die künstliche Zielfunktion und die künstliche Variable und pivotieren in der zweiten Spalte in der ersten Zeile

$$\begin{array}{cccc|cccc|c|c}
 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 58 & & & \\
 \frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 16 & x_2 & & \\
 -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 & x_3 & & \\
 3 & 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & 22 & s_3 & & 
 \end{array}$$

Nach einem weiteren Pivot erhalten wir als finales Tableau

$$\begin{array}{cccc|cccc|c|c}
 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 80 & & & \\
 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 5 & x_2 & & \\
 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 13 & x_3 & & \\
 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 22 & s_2 & & 
 \end{array}$$

$x_1 = 0, x_2 = 5$  und  $x_3 = 13$ . Damit gilt in den ersten beiden Restriktionen Gleichheit aber in der zweiten strikte Ungleichheit. Damit folgt aus dem Satz vom komplementären Schlupf, dass im primalen Programm die zweite Variable Null sein muss und in der zweiten und dritten Ungleichung Gleichheit gilt. Wir erhalten somit die Lösung des primalen Problems durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
 y_1 - y_3 &= 3 \\
 y_1 + y_3 &= 5
 \end{aligned}$$

also  $y_1 = 4, y_2 = 0, y_3 = 1$  mit Zielfunktionswert 80.

Wintersemester 06/07

### Aufgabe 1

a)  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt (positiver) Kegel, wenn

**C1**  $C \neq \emptyset$ ,

**C2**  $\forall x, y \in C : x + y \in C$ .

**C3**  $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \forall x \in C : \alpha x \in C$ .

b)

„ $\Rightarrow$ “ Wegen C1 gibt es  $x \in C$ . Wegen C3 ist  $0 = 0 \cdot x \in C$ , also gilt auch C1'. Seien  $x, y \in C$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$  beliebig aber fest gewählt. Wegen C3 sind dann  $\alpha x, \beta y \in C$  und somit wegen C2 auch  $\alpha x + \beta y \in C$ . Somit gilt auch C2'.

„ $\Leftarrow$ “ Nach C1' ist  $0 \in C \neq \emptyset$ , also gilt C1. Seien nun  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  und  $x \in \mathbb{R}$  beliebig aber fest gewählt. Nach C2' ist dann auch  $\alpha x = \alpha x + 0 \cdot x \in C$  und somit gilt C2. Als letztes wählen wir  $x, y \in C$  beliebig aber fest und haben wiederum nach C2'  $x + y = 1 \cdot x + 1 \cdot y \in C$ . Also gilt auch C3.

c) Da die Nullmatrix symmetrisch und positiv semidefinit ist, gilt C1'. Seien nun  $X, Y \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$  positiv semidefinit und symmetrisch, sowie  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ . Sei ferner  $v \in \mathbb{R}^n$  fest aber beliebig gewählt. Dann ist wegen der Linearität der Matrix-Vektor Multiplikation

$$\begin{aligned} {}^t v(\alpha X + \beta Y)v &= {}^t v(\alpha Xv + \beta Yv) \\ &= {}^t v\alpha Xv + {}^t v\beta Yv \\ &= \underbrace{\alpha}_{\geq 0} \underbrace{{}^t vXv}_{\geq 0} + \underbrace{\beta}_{\geq 0} \underbrace{{}^t vYv}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

Also erfüllt die Menge der positiv semidefiniten, symmetrischen Matrizen auch C2' und ist somit nach b) ein (positiver) Kegel.

### Aufgabe 2

a) Seien

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leq b \right\}$$

und somit ein Polyeder.

b) Wir bestimmen zunächst die Ecken von  $P$ . Dafür müssen wir die Lösungen von durch je drei linear unabhängige Ungleichungen bestimmten linearen Gleichungssysteme (LGS) auf Zulässigkeit testen. Wir beginnen also mit

$$x = z \quad y = z \quad x + z = 2.$$

Dieses LGS hat die Lösung  $x = y = z = 1$  und wir erhalten als erste Ecke  $v_1 = {}^t(1, 1, 1)$ . Diese Ecke erfüllt auch die vierte Ungleichung  $y + z = 2$  mit Gleichheit. Zu untersuchen bleiben also nur noch Paare aus den ersten vier Ungleichungen zusammen mit  $z = 0$ .

Also haben wir

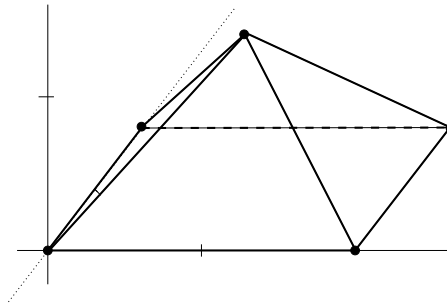
$$\begin{array}{llllll}
 x = z & y = z & z = 0 & \text{liefert} & v_2 = {}^t(0, 0, 0) \\
 x = z & x + z = 2 & z = 0 & \text{ist nicht lösbar} & \\
 x = z & y + z = 2 & z = 0 & \text{liefert} & v_3 = {}^t(0, 2, 0) \\
 y = z & x + z = 2 & z = 0 & \text{liefert} & v_4 = {}^t(2, 0, 0) \\
 y = z & y + z = 2 & z = 0 & \text{ist nicht lösbar} & \\
 x + z = 2 & y + z = 2 & z = 0 & \text{liefert} & v_5 = {}^t(2, 2, 0).
 \end{array}$$

Kanten entstehen durch Gleichsetzen zweier Ungleichungen, also haben wir an  $v_1$  die Kanten  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_1, v_3)$ ,  $(v_1, v_4)$ ,  $(v_1, v_5)$  und weiter  $(v_2, v_3)$ ,  $(v_3, v_5)$ ,  $(v_5, v_4)$  und  $(v_4, v_2)$ .

Die ersten vier Ungleichungen werden von je drei Ecken mit Gleichheit erfüllt, die letzte von vieren.

Also sind alle Ungleichungen facettendefinierend.

c) Es handelt sich um eine Viereckspyramide:



### Aufgabe 3

a) Die lineare Optimierungsaufgabe hat die Gestalt

$$\min\{cx \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\} = -\max\{(-c)x \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\}.$$

Also lautet die duale Aufgabe

$$\min\{yb \mid y \in \mathbb{R}_m, yA \geq -c\} = -\max\{(-y)b \mid -y \in \mathbb{R}_m, (-y)A \leq c\}.$$

Ersetzen wir  $-y$  durch  $u$ , erhalten wir als duale Aufgabe

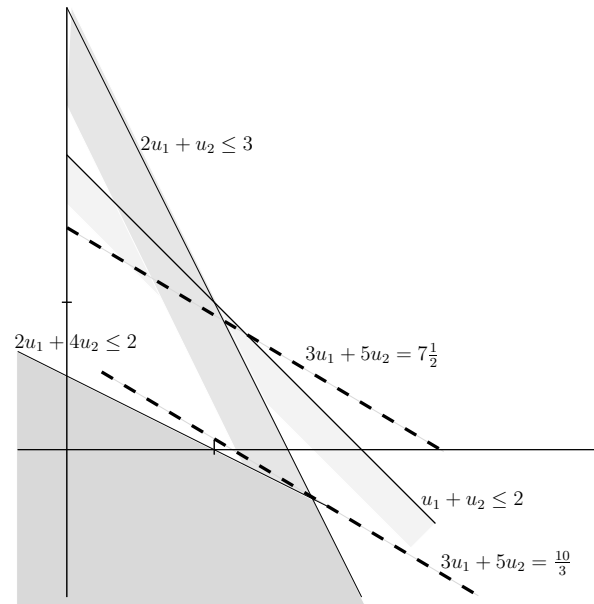
$$\max\{ub \mid u \in \mathbb{R}_m, uA \leq c\}.$$

Also erhalten wir als duale Aufgabenstellung

$$\begin{array}{rll}
 \max & 3u_1 & + & 5u_2 \\
 \text{unter} & u_1 & + & u_2 \leq 2 \\
 & 2u_1 & + & u_2 \leq 3 \\
 & u_1 & + & 2u_2 \leq 2 \\
 & 2u_1 & + & 4u_2 \leq 2.
 \end{array}$$

Die letzte Ungleichung dominiert die vorletzte, welche also redundant ist. Man beachte, dass keine Vorzeichenrestriktionen vorkommen.

b) In der nebenstehenden Graphik lesen wir ab, dass die optimale Ecke die Gleichungen  $2u_1 + 4u_2 = 2$  und  $2u_1 + u_2 = 3$  erfüllt, woraus wir sofort  $3u_2 = -1$ , also  $u_2 = -\frac{1}{3}$  erhalten. Einsetzen liefert  $u_1 = \frac{5}{3}$ . Das Optimum wird also angenommen in  $\frac{1}{3}(5, -1)$  und liefert den Zielfunktionswert  $\frac{10}{3}$ .



c) Nach dem Komplementaritätssatz gilt für die Optimallösung des primalen Programms, dass Ungleichungen, die im dualen strikt sind, Variablen vom Wert Null entsprechen. Da  $\frac{1}{3}(5 - 1) < 2$  und  $\frac{1}{3}(5 - 2) < 2$  sind, schließen wir auf  $\xi_1 = \xi_3 = 0$  für die Optimallösung der primalen Aufgabenstellung. Also erfüllt die Optimallösung die Gleichungen  $2\xi_2 + 2\xi_4 = 3$  und  $\xi_2 + 4\xi_4 = 5$ . Dieses Gleichungssystem hat die Lösung  $\xi_4 = \frac{7}{6}, \xi_2 = \frac{1}{3}$ . Also nimmt die primale Aufgabe ihr Minimum in  $\frac{1}{6}(0, 2, 0, 7)$  an. Der Wert ist wiederum  $\frac{10}{3}$ .

#### Aufgabe 4

Wir bezeichnen mit  $x_{He}, x_D, x_K, x_S, x_{Ha}, x_E, x_A$  die Verkaufsflächen für die entsprechenden Abteilungen. Dass jede Abteilung mindestens  $750m^2$  einnehmen soll, ergibt die sieben Ungleichungen

$$x_* \geq 750,$$

wobei \* ein Joker ist. Die Abteilungen für Bekleidung und Haushaltwaren beanspruchen keinen zusätzlichen Lagerraum und 20% von 7.000 sind 1.400, also erhalten wir die vier Ungleichungen

$$x_{He} \leq 1400, \quad x_D \leq 1400, \quad x_K \leq 1400, \quad x_{Ha} \leq 1400.$$

Für die übrigen Abteilungen erhalten wir wegen des zusätzlichen Lagerraums

$$1.1x_S \leq 1400, \quad 1.1x_E \leq 1400, \quad 1.1x_A \leq 1400.$$

Die Gesamtfläche ergibt die Bedingung

$$x_{He} + x_D + x_K + 1.1x_S + x_{Ha} + 1.1x_E + 1.1x_A = 7000.$$

Mit der Zielfunktion erhalten wir also als lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{rcccccccc}
 \max & 85x_{He} & +102x_D & +90x_K & +104x_S & +82x_{Ha} & +98x_E & +76x_A & & \\
 \text{unter} & x_{He} & & & & & & & & \leq 1400 \\
 & & x_D & & & & & & & \leq 1400 \\
 & & & x_K & & & & & & \leq 1400 \\
 & & & & 1.1x_S & & & & & \leq 1400 \\
 & & & & & x_{Ha} & & & & \leq 1400 \\
 & & & & & & 1.1x_E & & & \leq 1400 \\
 & & & & & & & 1.1x_A & & \leq 1400 \\
 & x_{He} & +x_D & +x_K & +1.1x_S & +x_{Ha} & +1.1x_E & +1.1x_A & = & 7000 \\
 & & & & & & & x_* & \geq & 750
 \end{array}$$

### Aufgabe 5

Wir benutzen die Zweiphasenmethode wie in den Übungen vorgeschlagen, also minimieren wir die Summe zweier künstlicher Schlupfvariablen  $y_1 + y_2$ . Wenn wir in der Kopfzeile die reduzierten Kosten der künstlichen Zielfunktion eintragen, so erhalten wir dort über den echten Variablen die negative Summe der beiden Zeilen der Restriktionsmatrix. Da wir die echte Zielfunktion minimieren wollen, tragen wir sie mit positivem Vorzeichen ein. Also haben wir das Starttableau

$$\begin{array}{cccccc|c|c}
 -5 & -4 & -3 & 0 & 0 & -7 & & \\
 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\
 2 & 1 & \boxed{2} & 1 & 0 & 4 & y_1 & \\
 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 & y_2 & 
 \end{array}$$

Wie im Tipp angegeben wählen wir die dritte Spalte als Pivotspalte und finden das Pivotelement in der ersten Zeile, da  $4/2 < 3$ .

$$\begin{array}{cccccc|c|c}
 -2 & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -1 & & \\
 3 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 & & \\
 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & \xi_3 & \\
 \boxed{2} & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & y_2 & 
 \end{array}$$

Als Pivotspalte wählen wir nun die erste, der Minimalquotiententest führt auf die zweite Zeile.

$$\begin{array}{cccccc|c|c}
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & \\
 0 & -\frac{13}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & & \\
 0 & -\frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \xi_3 & \\
 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \xi_1 & 
 \end{array}$$

Die künstlichen Variablen haben die Basis verlassen und wir haben die zulässige Startlösung  $\frac{1}{2}(1, 0, 3)$  gefunden. Als reduziertes Tableau erhalten wir

$$\begin{array}{cccc|c|c}
 0 & -\frac{13}{4} & 0 & -\frac{7}{2} & & \\
 0 & -\frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{2} & \xi_3 & \\
 1 & \boxed{\frac{5}{4}} & 0 & \frac{1}{2} & \xi_1 & 
 \end{array}$$

Als Pivotspalte bleibt nur die zweite, und als Pivotzeile ergibt sich ebenfalls die zweite.

$$\begin{array}{ccc|c|c}
 \frac{13}{5} & 0 & 0 & -\frac{11}{5} & & \\
 \frac{3}{5} & 0 & 1 & \frac{9}{5} & \xi_3 & \\
 \frac{4}{5} & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \xi_2 & 
 \end{array}$$

Dieses Tableau ist optimal. Wir erhalten also das Minimum in  $\frac{1}{5}(0, 2, 9)$  vom Wert  $\frac{11}{5}$ .

### Aufgabe 6

a) Die duale Aufgabe lautet laut Vorlesung

$$\min\{ub \mid u \in \mathbb{R}_m, uA \geq c\}.$$

b) Seien  $x, u$  zulässig für die primale bzw. duale Optimierungsaufgabe. Dann ist  $Ax = b$  und somit

$$uAx = ub.$$

Da  $uA \geq c$  und  $x \geq 0$  ist, haben wir aber auch

$$uAx \geq cx$$

und somit insgesamt

$$cx \leq uAx = ub.$$

c) Da nach b) für jedes paar zulässiger Lösungen  $x^*, u^*$  stets gilt  $cx \leq ub$  erhalten wir unter Zuhilfenahme des Dualitätssatzes der linearen Optimierung, dass  $x^*, u^*$  genau dann optimal sind, wenn  $u^*b = cx^*$ . Hieraus folgern wir

$$\begin{aligned} x^*, u^* \text{ optimal} &\Leftrightarrow u^*b = cx^* \\ &\Leftrightarrow u^*Ax - cx^* = 0 \\ &\Leftrightarrow (u^*A - c)x^* = 0. \end{aligned}$$

Da  $x^*, u^*$  zulässig sind, ist  $u^*A - c \geq 0$  und  $x^* \geq 0$ . Der Ausdruck ist also genau dann gleich Null, wenn in jedem Summand des Skalarprodukts mindestens ein Faktor Null ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn

1.  $x_i^* > 0 \implies (u^*A)_i = c_i$  und
2.  $(u^*A)_i > c_i \implies x_i^* = 0$ .