01657 Grundlagen der Theoretischen Informatik A
Klausur vom 29. März 2014

Es müssen Ihnen 7 Seiten Klausurtext vorliegen:

- das Deckblatt für Ihre Lösungen,
- eine Teilnahmebescheinigung zur Vorlage beim Finanzamt,
- diese Vorbemerkungen,
- 3 Blätter mit 7 Aufgaben,
- 1 Seite Anhang.

Prüfen Sie zunächst die Vollständigkeit Ihrer Klausurunterlagen.

Für die Bearbeitung der Klausuraufgaben haben Sie 2 Stunden Zeit. Einen Leistungsnachweis zum Kurs 01657 erhalten Sie, wenn Sie in dieser Klausur mindestens 26 der möglichen 65 Punkte erreichen.

Die Benutzung von **Hilfsmitteln** (z. B. Kurstext) ist **nicht** gestattet!

Füllen Sie bitte zunächst das Deckblatt für Ihre Lösungen aus und, falls gewünscht, die Bescheinigung für das Finanzamt. Schreiben Sie auf jedes Ihrer Lösungsblätter oben rechts Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Falls es sich um ein Fortsetzungsblatt zu einer Aufgabe handelt, geben Sie bitte zusätzlich die Nummer der Aufgabe an. Bei Abgabe Ihrer Lösungsblätter heften Sie diese bitte – beginnend mit dem Deckblatt und möglichst nach Aufgaben sortiert – zusammen.

Schreiben Sie Ihre Lösungen bitte **nicht mit Bleistift** auf!

Bei der Bearbeitung der Klausuraufgaben wünschen wir Ihnen viel Erfolg.

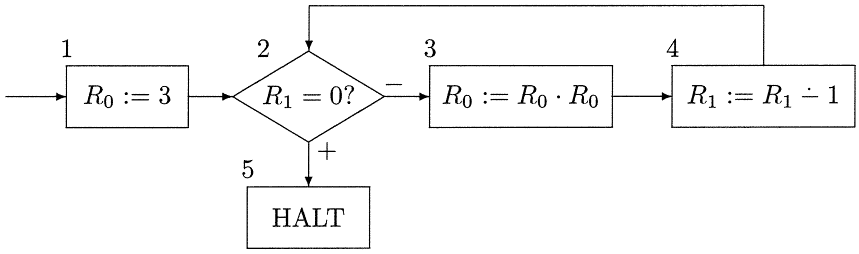
Wir senden Ihnen die korrigierten Klausuren so rasch wie möglich zurück.

Mit freundlichen Grüßen

IHRE KURSBETREUER

Aufgabe 1 *(11 Punkte)*

Eine einstellige verallgemeinerte Registermaschine M sei durch folgendes Flussdiagramm F gegeben:



(a) *(1 Punkt)*

Welche der folgenden beiden Behauptungen trifft zu?

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\mathrm{ES}^{3k}\big(2, (3, n, 0, 0, ...)\big) = \Big(2, (3^{2^k}, n - k, 0, 0, ...)\Big) .$$

(ii) Für alle $x \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $x \geq n$ gilt

$$\mathrm{ES}^{3n}\big(2, (3, x, 0, 0, ...)\big) = \big(2, (3^{n+1}, x - n, 0, 0, ...)\big) .$$

(b) *(7 Punkte)*

Beweisen Sie die zutreffende Behauptung aus (a).

(c) *(3 Punkte)*

Beweisen Sie, dass $f_M(x) = 3^{2^x}$ für alle $x \in \mathbb{N}$ oder $f_M(x) = 3^{x+1}$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2 *(9 Punkte)*

Es sei $t :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$t(x,y) := \begin{cases} \frac{2y}{x} & \text{falls } x > 0 \text{ und ein Teiler von } 2y \text{ ist,} \\ 0 & \text{falls } x = 0 \text{ und } y = 0, \\ \text{div} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass t durch μ-Rekursion aus einer berechenbaren Funktion entsteht. (Beachten Sie dazu den Anhang.)

Aufgabe 3 *(9 Punkte)*

Es sei $u_\Phi :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ die universelle Funktion der Standardkomplexität Φ zu φ, also

$$u_\Phi(i,x) := \Phi_i(x)$$

für alle $i, x \in \mathbb{N}$. Ferner sei eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für alle $x \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } u_\Phi(x,x) \neq \text{div und } u_\Phi(x,x) \leq 8 \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass f berechenbar ist.

Aufgabe 4 *(9 Punkte)*

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ Teilmengen von $\mathbb{N}$, für die $K_\varphi = (\mathbb{N} \setminus A) \cap (\mathbb{N} \setminus B)$ gelte. Zeigen Sie mit Hilfe von Abschlusseigenschaften, dass dann A oder B nicht rekursiv-aufzählbar ist.

Aufgabe 5 *(9 Punkte)*

Es sei S die Nachfolgerfunktion auf den natürlichen Zahlen. Zeigen Sie, dass es keine berechenbare Funktion $g \in P^{(1)}$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$g(i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi(i) = S, \\ \text{div} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 6 *(8 Punkte)*

Es sei $\nu_{\mathbb{Z}}$ die Standardnummerierung von $\mathbb{Z}$. Eine Funktion $\nu :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$\nu(n) := \begin{cases} 1 + \nu_{\mathbb{Z}}(n) & \text{falls } \nu_{\mathbb{Z}}(n) \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie:

(a) *(2 Punkte)*

ν ist eine Nummerierung von $\mathbb{N}$.

(b) *(6 Punkte)*

ν ist reduzierbar auf die Identitätsfunktion $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$; in Zeichen: $\nu \leq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Aufgabe 7 *(10 Punkte)*

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig und welche falsch?

(Bei dieser Aufgabe erhalten Sie für jede richtige Antwort (entweder „richtig" oder „falsch") einen Punkt. Für eine falsche Antwort wird Ihnen dagegen ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt kann pro Teilblock keine negative Punktzahl erzielt werden. Ihre Antworten brauchen Sie nicht zu begründen.)

1. (a) Im Flussdiagramm einer verallgemeinerten Registermaschine M kommen nur berechenbare Funktionen und rekursive Tests vor.

   (b) Jede primitiv-rekursive Funktion ist ein Element von $P^{(1)}$.

   (c) Es gibt eine bijektive Abbildung von $R^{(4)}$ auf $R^{(1)}$.

   (d) Im Bildbereich der Standardnummerierung φ gibt es nicht-berechenbare Funktionen.

   (e) Die Standardnummerierung φ ist total.

2. (f) Wenn die Menge $\{\langle i, j\rangle \mid i, j \in \mathbb{N}, \varphi_i = \varphi_j\}$ rekursiv-aufzählbar ist, dann ist die Menge K_φ rekursiv.

   (g) Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv und gilt $A \leq B$ für die Teilmenge $B \subseteq \mathbb{N}$, dann ist auch B rekursiv.

   (h) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $f \in R^{(1)}$ die Eigenschaft $\varphi_{f(n)} = \varphi_n$ zutrifft.

   (i) Die Identitätsfunktion $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ ist die einzige Nummerierung von $\mathbb{N}$.

   (j) Ist ν eine Nummerierung einer beliebigen Menge M, so ist jede ν-rekursive Teilmenge von M auch ν-rekursiv-aufzählbar.

Anhang

Berechenbare Zahlenfunktionen

Die wie folgt definierten Funktionen f und Tests t auf den natürlichen Zahlen sind berechenbar.

1. $\tilde{0} : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$, $\tilde{0}() := 0$ (nullstellige Nullfunktion).
2. $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $Z(x) := 0$ (einstellige Nullfunktion).
3. $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $S(x) := x + 1$ (Nachfolgerfunktion).
4. $V : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $V(x) := x \dot{-} 1$ (Vorgängerfunktion).
5. $\mathrm{pr}_i^{(k)} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $\mathrm{pr}_i^{(k)}(x_1, \dots, x_k) := x_i$ für $1 \leq i \leq k$ (Projektion).
6. $f(x_1, \dots, x_n) := k$ für $n, k \in \mathbb{N}$ (konstante Funktionen).
7. $f(x, y) := x + y$ (Summe).
8. $f(x, y) := x \dot{-} y$ (arithmetische Differenz).
9. $f(x, y) := x \cdot y$ (Produkt).
10. $q, r :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $x = q(x, y) \cdot y + r(x, y)$ und $r(x, y) < y$ für $y \neq 0$ und $q(x, y) = r(x, y) = \mathrm{div}$ für $y = 0$ (Quotient und Rest).
11. $f(x, y) := x^y$ mit $0^0 := 1$ (Exponentiation).
12. $f(x) := (\sqrt{x}$ falls x Quadratzahl, div sonst).
13. $\max(x, y)$.
14. $\min(x, y)$.
15. $f(x) := (1$ falls x Primzahl, 0 sonst).
16. $f(x) :=$ die x-te Primzahl.
17. $f(x, y) := |x - y|$ (Absolutbetrag).

μ-Rekursion

1. Es sei $Q(x)$ eine Eigenschaft, in der eine natürliche Zahl x als Parameter vorkommt. Dann sei

$$\mu x[Q(x)] := \begin{cases} \min M & \text{falls } M := \{k \in \mathbb{N} \mid Q(k)\} \neq \emptyset \\ \mathrm{div} & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Es sei $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine totale Funktion. Dann sei die Funktion $\tilde{\mu}(h) :\subseteq \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\tilde{\mu}(h)(\bar{x}) = \mu y[h(\bar{x}, y) = 0]$$

für alle $\bar{x} \in \mathbb{N}^k$. Man sagt, $\tilde{\mu}(h)$ entsteht aus h durch *μ-Rekursion.*

Standardnummerierung von $\mathbb{Z}$

$\nu_{\mathbb{Z}} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist definiert durch $\nu_{\mathbb{Z}}\langle n, k\rangle := n - k$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$.