01657 — Grundlagen der Theoretischen Informatik A
Lösungen zur Klausur vom 29. März 2014

Aufgabe 1

(a) Die Behauptung (i) trifft zu.

(b) Wir beweisen die Behauptung (i) durch vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang $k = 0$:

Offensichtlich gilt

$$\mathrm{ES}^{3\cdot 0}(2,(3,n,0,...)) = (2,(3^{2^0}, n-0,0,...)).$$

Induktionsschritt $k \to k+1$:

Sei $k+1 \leq n$. Dann gilt insbesondere $k \leq n$, und wir dürfen die Induktionsannahme verwenden:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{ES}^{3(k+1)}(2,(3,n,0,...)) \\
= \; & \mathrm{ES}^{3}(2,(3^{2^k}, n-k,0,...)) && \text{(nach Ind.-annahme)} \\
= \; & \mathrm{ES}^{2}(3,(3^{2^k}, n-k,0,...)) && \text{(da } n-k \geq 1 > 0\text{)} \\
= \; & \mathrm{ES}(4,(3^{2^k} \cdot 3^{2^k}, n-k,0,...)) \\
= \; & (2,(3^{2^k+2^k}, n-k-1,0,...)) \\
= \; & (2,(3^{2^{k+1}}, n-(k+1),0,...)),
\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
& \mathrm{ES}^{3\cdot x+2}(1,(0,x,0,0,...)) \\
= \; & \mathrm{ES}^{3\cdot x+1}(2,(3,x,0,0,...)) \\
= \; & \mathrm{ES}(2,(3^{2^x}, x-x,0,...)) && \text{(nach Teil (a))} \\
= \; & (5,(3^{2^x},0,0,...))
\end{aligned}$$

Da die letztgenannte Konfiguration eine Endkonfiguration ist, ergibt sich daraus

$$\mathrm{GS}(1,(0,x,0,0,...)) = (5,(3^{2^x},0,0,...)).$$

Mit dem Flussdiagramm F aus der Aufgabenstellung erhalten wir also

$$\begin{aligned} f_M(x) &= \mathrm{AC} \circ f_F \circ \mathrm{EC}^{(1)}(x) \\ &= \mathrm{AC} \circ f_F(0, x, 0, 0, ...) \\ &= \mathrm{AC}(3^{2^x}, 0, 0, ...) \\ &= 3^{2^x} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

Es sei $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$h(x, y, z) := |x \cdot z - 2 \cdot y|.$$

Dann ist h berechenbar, denn

$$h = \mathrm{Sub}\left(|\cdots|, \mathrm{Sub}\left(m, \mathrm{pr}_1^{(3)}, \mathrm{pr}_3^{(3)}\right), \mathrm{Sub}\left(m, c_2^{(3)}, \mathrm{pr}_2^{(3)}\right)\right),$$

geht also durch Substitution aus bekannten berechenbaren Funktionen hervor (m bezeichnet hier die Multiplikation); s. Anhang im Klausurtext und Satz 6.2.2.

Ferner gilt, falls $x > 0$ und ein Teiler von $2y$ ist,

$$t(x, y) = \frac{2y}{x} = \min\{z \in \mathbb{N} \mid x \cdot z = 2y\} = \min\{z \in \mathbb{N} \mid |x \cdot z - 2 \cdot y| = 0\}.$$

Und falls sowohl $x = 0$ als auch $y = 0$ gilt, erhalten wir ebenfalls

$$t(x, y) = 0 = \min\{z \in \mathbb{N} \mid h(x, y, z) = 0\}.$$

Andernfalls ist die Menge $\{z \in \mathbb{N} \mid x \cdot z = 2y\}$ leer, und außerdem ist dann $t(x, y) = \mathrm{div}$. Also gilt in jedem Falle $t(x, y) = \tilde{\mu}(h)(x, y)$, d. h., $t = \tilde{\mu}(h)$.

Aufgabe 3

Nach (3) des Φ-Theorems 7.2.7 ist die charakteristische Funktion g_Φ der Menge

$$\{(i,x,t) \in \mathbb{N}^3 \mid \Phi_i(x) \leq t\}$$

berechenbar. Dann ist aber auch die durch

$$h(x) := g_\Phi(x,x,8) \text{ für alle } x \in \mathbb{N}$$

definierte Funktion berechenbar, denn sie entsteht durch Substitution berechenbarer Funktionen in g_Φ. Offenbar gilt für alle $x \in \mathbb{N}$

$$\begin{gathered} h(x) = 1 \iff g_\Phi(x,x,8) = 1 \iff \Phi_x(x) \leq 8 \iff \\ u_\Phi(x,x) \neq \text{div und } u_\Phi(x,x) \leq 8 \iff f(x) = 1. \end{gathered}$$

Damit erhalten wir aber auch

$$h(x) = 0 \iff f(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{N}$., d. h., $f = h$. Folglich ist f berechenbar.

Aufgabe 4

Aus $K_\varphi = (\mathbb{N} \setminus A) \cap (\mathbb{N} \setminus B)$ folgt unter Benutzung bekannter mengentheoretischer Gesetze

$$\mathbb{N} \setminus K_\varphi = \mathbb{N} \setminus ((\mathbb{N} \setminus A) \cap (\mathbb{N} \setminus B)) = (\mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \setminus A)) \cup (\mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \setminus B)) = A \cup B.$$

Wären nun sowohl A als auch B rekursiv-aufzählbar, dann auch $A \cup B$, denn die rekursiv-aufzählbaren Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind unter Vereinigung abgeschlossen (Satz 8.2.3). Dann wäre aber auch $\mathbb{N} \setminus K_\varphi$ rekursiv-aufzählbar, was Satz 8.3.1 des Kurstextes widerspricht. Also ist A oder B nicht rekursiv-aufzählbar.

Aufgabe 5

Es sei g wie in der Aufgabenstellung, also, für alle $i \in \mathbb{N}$,

$$g(i) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \varphi(i) = S, \\ \text{div} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist offenbar $\mathrm{Def}(g) = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i = S\}$. Damit gilt mit der in Satz 8.3.9.1 des Kurses eingeführten Schreibweise: $\mathrm{Def}(g) = M_S$. Wegen $S \neq d$ folgt aus diesem Satz, dass $\mathrm{Def}(g)$ nicht rekursiv-aufzählbar ist. Damit kann g nicht berechenbar sein.

Aufgabe 6

(a) Es sei $m \in \mathbb{N}$. Ist $m = 0$, so gilt z. B. $\nu\langle 0, 1\rangle = m$. Ist $m > 0$, dann lässt sich m wie folgt darstellen: $m = 1 + ((m-1) - 0) = \nu\langle m-1, 0\rangle$. Damit ist ν surjektiv, also eine Nummerierung von $\mathbb{N}$.

(b) Wir zeigen $\nu \leq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, indem wir zunächst eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie folgt definieren:

$$f\langle i, j\rangle := \begin{cases} 1 + (i - j), & \text{falls } i \geq j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $\langle i, j\rangle \in \mathbb{N}$. Die Funktion f ist u. a. wegen Satz 4.2.2 über die Cantorschen Tupelfunktionen berechenbar. (Wir verzichten hier darauf, das Flussdiagramm einer verallgemeinerten Registermaschine M mit berechenbaren Funktionen und Tests explizit anzugeben, für die $f = f_M$ gilt.) Offenbar erhalten wir nun

$$\nu\langle i, j\rangle = f\langle i, j\rangle = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}\left(f\langle i, j\rangle\right)$$

für alle $\langle i, j\rangle \in \mathrm{Def}(\nu) = \mathbb{N}$. Damit ist $\nu \leq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ gezeigt.

Aufgabe 7

1. (a) Falsch.

(b) Falsch.
(c) Richtig.
(d) Falsch.
(e) Richtig.

2. (f) Richtig.
(g) Falsch.
(h) Falsch.
(i) Falsch.
(j) Richtig.