**01657 — Grundlagen der Theoretischen Informatik A**
**Lösungen zur Klausur vom 28. März 2015**

**Aufgabe 1** (a) Die erste Behauptung ist falsch, die beiden anderen treffen zu.

(b) Die zweite Behauptung lässt sich durch vollständige Induktion nach $n$ beweisen. Wir führen dies aus:

<u>Induktionsanfang $n = 0$:</u>

Es sei $x \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}^{3\cdot 0}(1,(0,x,0,\dots)) &= (1,(0,x,0,\dots)) \text{ (da } \mathrm{ES}^0 = \mathrm{id}) \\ &= \big(1,(\textstyle\sum_{i=x+1-0}^{x} i, x \dot- 0, 0,\dots)\big). \end{aligned}$$

Also trifft die Behauptung in diesem Falle zu.

<u>Induktionsschluss $n \to n+1$:</u>

Es sei $x \in \mathbb{N}$, und es gelte $x \geq n+1$. Dann gilt sowohl

$$(*) \quad x \geq n$$

als auch

$$(**) \quad x \dot- n \neq 0.$$

Wegen $(*)$ liefert die Induktionsvoraussetzung

$$\mathrm{ES}^{3\cdot n}(1,(0,x,0,\dots)) = \left(1,(\sum_{i=x+1-n}^{x} i, x \dot- n, 0,\dots)\right).$$

Mit $(**)$ ergibt sich zudem

$$\begin{aligned} &\mathrm{ES}^3\big(1,(\textstyle\sum_{i=x+1-n}^{x} i, x \dot- n, 0,\dots)\big) \\ =\ &\big(1,(\textstyle\sum_{i=x+1-n}^{x} i + (x \dot- n), x \dot- n \dot- 1, 0,\dots)\big) \\ =\ &\Big(1,(\textstyle\sum_{i=x+1-(n+1)}^{x} i, x \dot- (n+1), 0,\dots)\Big), \end{aligned}$$

also insgesamt

$$\mathrm{ES}^{3\cdot(n+1)}(1,(0,x,0,\dots)) = \left(1,(\sum_{i=x+1-(n+1)}^{x} i, x \dot- (n+1), 0,\dots)\right),$$

was zu zeigen war.

(c) Die Behauptung (3) aus (a) ergibt sich aus (2), indem man $x$ für $n$ setzt. Mit (3) folgt dann

$$(\forall x)\, \mathrm{ES}^{3\cdot x+1}\,(1,(0,x,0,\dots)) = \left(4,(\sum_{i=1}^{x} i,0,0,\dots)\right).$$

Gemäß Ein-/Ausgabecodierung für verallgemeinerte Registermaschinen ergibt sich also

$$f_M(x) = \sum_{i=1}^{x} i$$

für alle $x \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 2**
Es sei $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(n,m) := n+m$ für alle $n,m \in \mathbb{N}$. Diese Funktion ist bekanntermaßen berechenbar. Die Standardnummerierung $\nu_\Sigma$ ist definiert durch $\nu_\Sigma(n) := \mathsf{a}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Man beachte, dass $\Sigma$ einelementig ist.) Es gilt dann

$$\nu_\Sigma^{-1} g \vec{\nu}_\Sigma(n,m) = \nu_\Sigma^{-1} g\,(\mathsf{a}^n,\mathsf{a}^m) = \nu_\Sigma^{-1}\,(\mathsf{a}^n\mathsf{a}^m) = \nu_\Sigma^{-1}\left(\mathsf{a}^{n+m}\right) = n+m$$

für alle $n,m \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\nu_\Sigma^{-1} g \vec{\nu}_\Sigma = f$. Da $f$ berechenbar ist, ergibt sich mit Satz 6.1.6 die Berechenbarkeit von $g$.

**Aufgabe 3**
Die Funktion $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ erfüllt die folgenden Rekursionsgleichungen:

$$f(x,0) = 1 = c_1^{(1)}$$

und

$$f(x,y+1) := (x+y+1)\cdot f(x,y) = m\,(S(s(x,y)), f(x,y))$$

für alle $x,y \in \mathbb{N}$. (Dabei sind $m$ und $s$ wie im Satz über primitiv-rekursive Funktionen aus dem Anhang, und $S$ ist die Nachfolgerfunktion.) Definiert man nun $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ durch $h(x, y, z) := m\,(S(s(x, y)), z)$, dann gilt offenbar $f = \mathrm{Prk}(c_1^{(1)}, h)$. Ferner ist sowohl $c_1^{(1)}$ als auch $h$ primitiv-rekursiv, denn

$$h = \mathrm{Sub}\left(m, \mathrm{Sub}\left(S, \mathrm{Sub}\left(s, \mathrm{pr}_1^{(3)}, \mathrm{pr}_2^{(3)}\right)\right), \mathrm{pr}_3^{(3)}\right).$$

Es folgt, dass $f$ ebenfalls primitiv-rekursiv ist.

**Aufgabe 4**
Es sei $h :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch $h(i, n) := g(i)$ für alle $i, n \in \mathbb{N}$. Als Komposition der berechenbaren Funktion $g$ und einer Projektion ist $h$ berechenbar. Nach dem smn-Theorem existiert also eine totale berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$(\forall i, n \in \mathbb{N})\left(\varphi_{f(i)}(n) = h(i, n) = g(i)\right).$$

**Aufgabe 5**
Es sei $A$ eine rekursiv-aufzählbare Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann existiert eine berechenbare Funktion $g \in P^{(1)}$ mit $\mathrm{Def}(g) = A$. Nach der vorhergehenden Aufgabe existiert dann auch eine Funktion $f \in R^{(1)}$ mit

$$(\forall i, n \in \mathbb{N})(\varphi_{f(i)}(n) = g(i)).$$

Damit folgt insbesondere für alle $i \in \mathbb{N}$ und $n = f(i)$:

$$i \in A \Leftrightarrow i \in \mathrm{Def}(g) \Leftrightarrow g(i) \text{ existiert } \Leftrightarrow \varphi_{f(i)}(f(i)) \text{ existiert } \Leftrightarrow f(i) \in K_\varphi.$$

Dies beweist $A \leq K_\varphi$.

**Aufgabe 6**
Wir definieren eine Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ durch

$$h(i) := \begin{cases} i+1, & \text{falls } i \in B \quad (\iff \varphi_i(i) = i) \\ i & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun nehmen wir an, dass $B$ rekursiv ist. Dann können wir daraus unschwer schließen, dass die Funktion $h$ berechenbar ist. Es existiert also ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_j = h$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. $j \in B$. Dann gilt $\varphi_j(j) = j + 1$ nach Definition von $h$, aber $\varphi_j(j) = j$ nach Definition von $B$.

2. $j \notin B$. Dann gilt $\varphi_j(j) = j$ nach Definition von $h$, aber $\varphi_j(j) \neq j$ nach Definition von $B$.

In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch, d. h., $B$ ist *nicht* rekursiv.

**Aufgabe 7** (a) Es sei $m \in \mathbb{N}$. Ist $m = 0$, so gilt z. B. $\nu\langle 0, 1\rangle = m$. Ist $m > 0$, dann lässt sich $m$ wie folgt darstellen: $m = 1 + ((m-1) - 0) = \nu\langle m-1, 0\rangle$. Damit ist $\nu$ surjektiv, also eine Nummerierung von $\mathbb{N}$.

(b) Wir zeigen $\nu \leq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, indem wir zunächst eine Funktion $f :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie folgt definieren:

$$f\langle i, j\rangle := \begin{cases} 1 + (i - j), & \text{falls } i \geq j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $\langle i, j\rangle \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f$ ist u. a. wegen Satz 4.2.2 über die Cantorschen Tupelfunktionen berechenbar. (Wir verzichten hier darauf, das Flussdiagramm einer verallgemeinerten Registermaschine $M$ mit berechenbaren Funktionen und Tests explizit anzugeben, für die $f = f_M$ gilt.) Offenbar erhalten wir nun

$$\nu\langle i, j\rangle = f\langle i, j\rangle = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}\left(f\langle i, j\rangle\right)$$

für alle $\langle i, j\rangle \in \mathrm{Def}(\nu) = \mathbb{N}$. Damit ist $\nu \leq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ gezeigt.