FernUniversität in Hagen

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

Matr.-Nr. | | | | | | | |

Name ____________________

Vorname ____________________

PRÜFUNGSKLAUSUR	61411 Algorithmische Mathematik
TERMIN	26.03.2021 14:30-16:30
PRÜFER	Prof. Dr. Hochstättler

Aufgaben und Bewertung der Prüfungsklausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
Maximale Punktzahl	7	6	5	12	8	6	8
Bearbeitet							
Erreichte Punktzahl							

Aufgabe	8	9	10	11	12	Gesamt
Maximale Punktzahl	8	4	8	8	10	90
Bearbeitet						
Erreichte Punktzahl						

Bewertung/Note ____________________

Datum der Bewertung ____________________

Unterschrift Prüfer ____________________

Bearbeitungshinweise:

- ▷ Für die Bearbeitung der Prüfungsklausur haben Sie 120 Minuten zur Verfügung.
- ▷ Verwenden Sie keinen Bleistift oder Rotstift für Ihre Lösungen.
- ▷ Für die Prüfungsklausur sind alle Hilfsmittel zugelassen. Darunter zählen der Kurstext, ein Taschenrechner, Einsendeaufgaben etc. aber selbstverständlich nicht die Zusammenarbeit mit anderen.
- ▷ Geben Sie stets einen nachvollziehbaren Lösungsweg an.
- ▷ Dokumentieren Sie am Ende Ihre Abgabe indem Sie ein oder zwei möglichst datensparende Fotos oder Scans anlegen und diese bis spätestens 15 Minuten nach Klausurende in die entsprechende Moodle Umgebung hochladen.
- ▷ Senden Sie zusätzlich Ihre Abgabe per Post an
FernUniversität in Hagen
Prüfungsamt Mathematik und Informatik
58084 Hagen
Geben Sie dabei die Nummer des Moduls, Ihre Matrikelnummer sowie Ihren Vor- und Nachnamen an.
- ▷ Es handelt sich bei dieser Prüfungsklausur um eine Auswahlklausur. Für eine vollständige Bearbeitung würden wir 3 Stunden ansetzen. Es können maximal 90 Punkte erreicht werden, das entspricht 150% bei einer Bearbeitungszeit von 2 Stunden. Wenn Sie 60 Punkte erreichen, liegen Sie somit bei 100%. Sie haben die Prüfungsklausur bestanden, wenn Sie mindestens 30 Punkte erreichen. Die Ihnen vom Prüfungsamt mitgeteilten Punktzahlen errechnen wir mittels

$$\max\left\{100, \frac{\text{Klausurpunkte} * 150}{90}\right\}.$$

Mit der Abgabe der Klausurbearbeitung erkläre ich, dass ich die Klausur selbstständig und ohne Inanspruchnahme Dritter verfasst habe. Ich wurde über die zulässigen Hilfsmittel informiert und versichere, keine anderen Hilfsmittel verwendet zu haben. Mir ist bekannt, dass eine nachweisliche Zuwiderhandlung gegen diese Regelung als Täuschungsversuch bewertet wird.

____

bitte unterschreiben

Aufgabe 1: 7 Punkte

Wir definieren $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ durch

$$f(n) := \begin{cases} 0 \text{ , falls } n = 1 \\ 4f(\frac{n}{2}) + 3 \text{ , falls } n \text{ gerade} \\ f(n-1) + 2n - 1 \text{ , sonst.} \end{cases}$$

Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für f und beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion.
Hinweis: Betrachten Sie $f(n) + 1$. (7 P)

Aufgabe 2: 6 Punkte

Gegeben seien zwei Würfel W_1 und W_2 mit folgenden sechs Seiten, deren Auftreten jeweils gleichwahrscheinlich ist:

W_1	5	5	5	5	5	2
W_2	6	6	6	3	3	3

Sie wählen einen Würfel und Ihr Gegenspieler den jeweils anderen. Jeder darf einmal würfeln, wobei der Spieler, der die größte Augenzahl wirft, gewinnt.

(a) Welchen der Würfel wählen Sie, um die besten Gewinnchancen zu erzielen? Beweisen Sie Ihre Antwort. (3 P)

(b) Der Gewinner erhält vom Verlierer die Differenz der geworfenen Augenzahlen in Euro. Welchen Würfel wählen Sie nun? (3 P)

Aufgabe 3: 5 Punkte

Ein *Homomorphismus* zwischen zwei Graphen $G = (V(G), E(G))$ und $H = (V(H), E(H))$ ist eine Abbildung

$$\phi : V(G) \to V(H),$$

sodass für zwei adjazente Knoten x, y in G gilt, dass ihre Bilder $\phi(x), \phi(y)$ auch adjazent in H sind. Wir definieren eine Relation $\sim$ zwischen zwei Graphen wie folgt

$$G \sim H :\Leftrightarrow \exists \text{ ein Homomorphismus } \phi : V(G) \to V(H).$$

(a) Ist $\sim$ reflexiv? (1 P)

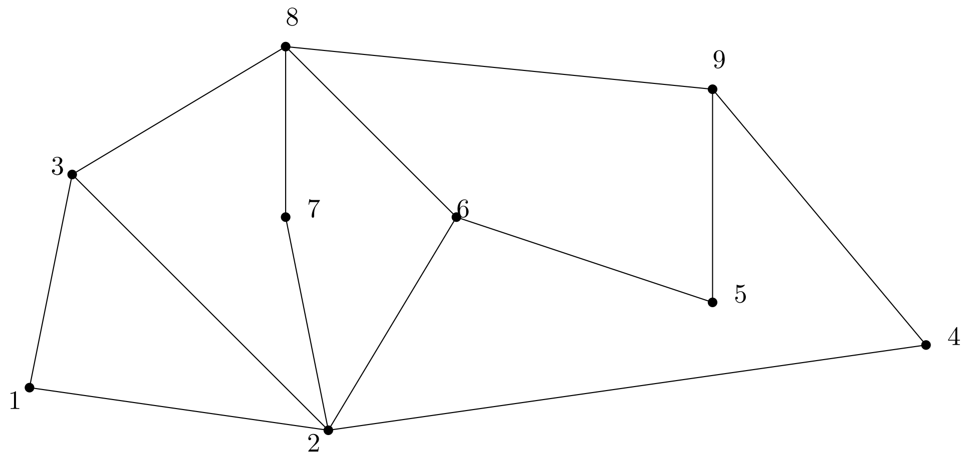
(b) Ist $\sim$ antisymmetrisch? (3 P)

(c) Ist $\sim$ transitiv? (1 P)

Beweisen Sie jeweils Ihre Behauptung bzw. geben Sie ggf. ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 4: 12 Punkte

Betrachten Sie den folgenden Graphen G:



(a) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist bipartit. (2 P)

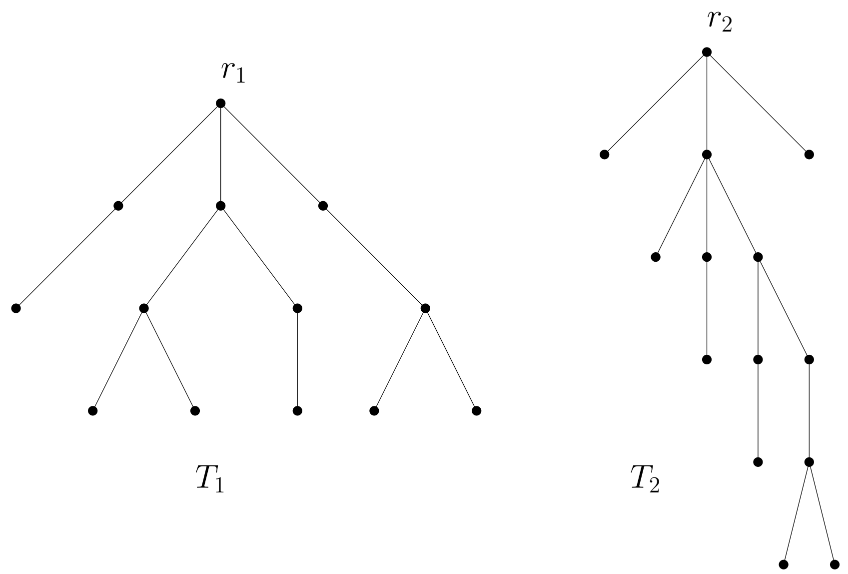
(b) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist eulersch. (2 P)

(c) Bestimmen Sie einen Breitensuchbaum von G ausgehend von dem Knoten mit Label 1. Die Nachbarn werden in der Reihenfolge des Labels gefunden, d.h. die mit kleinerem Label werden als Erstes gefunden. (5 P)

(d) Zeigen oder widerlegen Sie: G ist 2-zusammenhängend. Geben Sie gegebenenfalls eine Ohrenzerlegung an. (3 P)

Aufgabe 5: 8 Punkte

Gegeben sind die folgenden zwei gepflanzten und gewurzelten Bäume T_1 und T_2 mit Wurzel r_1 und r_2 und der in der Zeichnung gegebenen Pflanzung ρ_1 bzw. ρ_2.



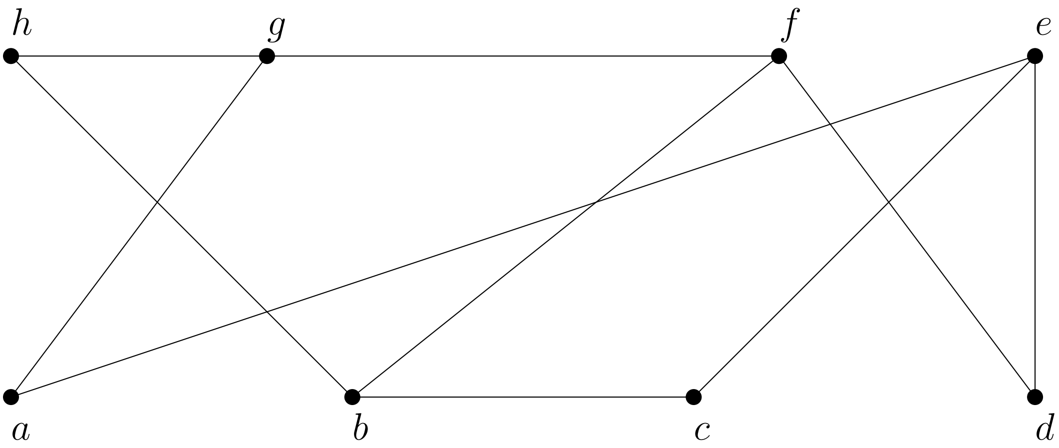
(a) Bestimmen Sie den Code des gepflanzten Baumes (T_1, r_1, ρ_1). (3 P)

(b) Bestimmen Sie den Code von T_2 als Wurzelbaum. (3 P)

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: T_1 und T_2 sind als Bäume isomorph. (2 P)

Aufgabe 6: 6 Punkte

Gegeben Sei der folgende Graph H:



mit dem Matching $M = \{bc, ae, fg\}$.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: M ist ein Matching maximaler Kardinalität. (3 P)

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: H besitzt ein perfektes Matching. (3 P)

Aufgabe 7: 8 Punkte

Sei

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 7 & -1 \\ 5 & 19 & a \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die LU-Zerlegung der Matrix $A(a)$ für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$. (3 P)

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem $A(2)x = b$ mit $a = 2$ und $b = (1, 3, 9)^\top$. (3 P)

(c) Bestimmen Sie $||A(a)||_1$ für alle $a \in \mathbb{R}$. (2 P)

Aufgabe 8: 8 Punkte

Wir betrachten den Algorithmus zur Goldenen-Schnitt-Suche:

```
1  leftfak = (3-sqrt(5))/2
2  rightfak = (sqrt(5)-1)/2
3  def choosepoint(f,a,x,b,fx):
4      if b-x <= x-a then
5          return a+leftfak*(b-a), x, f(a+leftfak*(b-a)), fx
6      else
7          return x, a+rightfak*(b-a), fx, f(a+rightfak*(b-a))
8  def findmin(f,a,x,b):
9      laenge=abs(a)+abs(b)
10     fx=f(x)
11     while (b-a) / laenge >= eps do
12         x,y,fx,fy = choosepoint(f,a,x,b,fx)
13         if fx >= fy then
14             a=x
15             x=y
16             fx=fy
17         else
18             b=y
19     end
20 return (a+b)/2
```

(a) Welche Zeile(n) müssen wie angepasst werden, um anstelle eines Minimums einer unimodalen Funktion ein Maximum einer Funktion, deren Negatives unimodal ist, zu finden? (1 P)

(b) Bestimmen Sie eine Approximation für ein Maximum der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit (4 P)

$$f(x) := -\frac{1}{2}x^2 - e^{-x}$$

auf dem Intervall $[0,1]$ mittels einer Goldenen-Schnitt-Suche mit zwei Schritten.

(c) Führen Sie bei gegebenem Startpunkt $x = 0$ drei Schritte des Newton-Verfahrens durch, um approximativ einen stationären Punkt der Funktion aus Aufgabenteil (b) zu finden. (3 P)

Sie dürfen in Aufgabenteil (b) und (c) bis auf drei Nachkommastellen runden.

Aufgabe 9: 4 Punkte

Es seien I, J Intervalle und $f : I \to J$ bijektiv, monoton fallend und konvex. Zeigen Sie: Die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ ist auch monoton fallend und konvex. (4 P)

Aufgabe 10: 8 Punkte

Wir betrachten das gleichungsrestringierte Problem

$$\min f(x) \text{ unter } h(t,x) = 0$$

für

$$f(x) := \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2),$$
$$h(t,x) := x_2 - \frac{t}{2}x_1^2 - 1$$

und einen Parameter $t \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Punkt $x^* = (0,1)^\top$ die notwendigen Bedingungen erster Ordnung erfüllt. (4 P)

(b) Für welche t sind auch die hinreichenden Bedingungen erfüllt? (4 P)

Aufgabe 11: 8 Punkte

Der Lokalpolitiker Hagen von Tronje (BiW) bewirbt sich als Direktkandidat um ein Bundestagsmandat. Sein Wahlkreis besteht aus einer kleineren Großstadt mit 100.000 Wahlberechtigten, einem ausgedehnten Speckgürtel mit 200.000 Wahlberechtigten und einer kleineren, eher ländlichen Region, in der nur 50.000 Wahlberechtigte wohnen.

Um das Mandat in jedem Falle zu gewinnen und sich langfristig als Direktkandidat zu etablieren, strebt er an, die Mehrheit in allen drei Regionen zu erlangen. Die vier wesentlichen Punkte seines Wahlprogramms sind Straßenbau, Förderung der Windenergie, Förderung der regionalen Landwirtschaft und die Einführung eines Aufschlags auf die Benzinpreise zur Unterstützung des ÖPNV.

Die folgende Tabelle zeigt, wieviele Wähler man durch Kampagnen, die 1.000 € kosten, zu den jeweiligen Themen in den jeweiligen Regionen gewinnen kann. Negative Eintrge bedeuten einen Verlust an Wählerstimmen.

Thema	Stadt	Speckgürtel	Land
Straßenbau	-3000	6000	4000
Windenergie	9000	3000	-6000
regionale Landwirtschaft	0	0	9000
ÖPNV-Pfennig	9000	0	-3000

(a) Modellieren Sie die Aufgabe, in jeder Region mindestens die Hälfte der Wählerstimmen zu minimalen Kosten zu gewinnen, als Lineares Programm. (5 P)

(b) Geben Sie ein ad-hoc Argument, warum das Programm immer eine zulässige Lösung hat. (3 P)

Aufgabe 12: 10 Punkte

Betrachten Sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcl}
\min & & & -x_2 & & \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 200 \\
& -x_1 & + & x_2 & \leq & 40 \\
& x_1 & + & x_2 & \geq & 50 \\
& x_1 & - & x_2 & \leq & 80 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

(a) Lösen Sie das Optimierungsproblem mit Hilfe des Simplex-Algorithmus unter Verwendung von Bland's Rule. (6 P)

(b) Lösen Sie das Problem graphisch und visualisieren Sie den vom Simplex-Algorithmus verwendeten Weg. (4 P)