Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2017

Klausur am 09.09.2017:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Sei $n_0 = 1$. Mit der Produktregel für die Ableitung und der Kettenregel für die Ableitung von e^{-x} gilt

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-1)e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x} = (-1)^{n_0}(n_0(n_0-1) - 2n_0x + x^2)e^{-x}.$$

Also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Es gelte $f^{(n)}(x) = (-1)^n(n(n-1) - 2nx + x^2)e^{-x}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\left((n+1)n - 2(n+1)x + x^2\right)e^{-x}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\
&= \left((-1)^n(n(n-1) - 2nx + x^2)e^{-x}\right)' \quad \text{Induktionsannahme} \\
&= (-1)^n\left((-2n + 2x)e^{-x} + (n(n-1) - 2nx + x^2)(-1)e^{-x}\right) \quad \text{Produktregel für die Ableitung} \\
&= (-1)^n(-2n + 2x - n(n-1) + 2nx - x^2)e^{-x} \\
&= (-1)^n(-n(n-1+2) + 2(n+1)x - x^2)e^{-x} \\
&= (-1)^{n+1}((n+1)n - 2(n+1)x + x^2)e^{-x}
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

(a) Wir bestimmen die Treppennormalform von A. Dazu subtrahieren wir das Zweifache der ersten Zeile von der zweiten, und wir subtrahieren die erste Zeile von der dritten. Wir erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & a-2 \end{pmatrix}.$$

Nun subtrahieren wir die zweite Zeile von der ersten und addieren das Zweifache der zweiten Zeile zur dritten. Es ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Nun müssen wir unterscheiden, ob $a = 0$ oder $a \neq 0$ gilt. Ist $a = 0$, dann ist die obige Matrix bereits in Treppennormalform. Ist $a \neq 0$, dann teilen wir die dritte

Zeile durch a und erhalten
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Nun wird die dritte Zeile von der ersten und zweiten subtrahiert. Dies ergibt die Einheitsmatrix I_3, die in Treppennormalform ist.

(b) Für $a = 0$ ist die Abbildung f_A nicht bijektiv. Aus der Treppennormalform
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
von A lesen wir mit dem Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen ab, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in der Lösungmenge des Gleichungssystems $Ax = 0$ liegt. Es gilt also
$$f_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}).$$
Damit ist f_A nicht injektiv und darum auch nicht bijektiv.

Aufgabe 3

(a) Wir zeigen mit dem Unterraumkriterium, dass U_f ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist. Wegen $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_f$. Seien nun $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in U_f$. Dann gilt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ und
$$f(\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+d \\ a+c \end{pmatrix}.$$
Also gilt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in U_f$. Sei nun noch $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U_f$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist
$$f(\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \lambda f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \lambda \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda b \\ \lambda a \end{pmatrix}.$$
Also gilt auch $\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U_f$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U_f ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Da U_f und $\mathrm{Kern}(f)$ Unterräume von $\mathbb{R}^2$ sind, gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_f$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f)$, also auch $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subseteq U_f \cap \mathrm{Kern}(f)$.

Sei nun $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U_f \cap \mathrm{Kern}(f)$. Dann gilt

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

denn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f)$, und

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix},$$

denn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U_f$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also auch

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit insgesamt $U_f \cap \mathrm{Kern}(f) \subseteq \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Aufgabe 4

Seien $a, b \in \mathbb{K}$, so dass $av + bw = 0$ gilt. Wir wenden f auf diese Gleichung an und erhalten

$$0 = f(0) = f(av + bw) = f(av) + f(bw) = af(v) + bf(w) = a\lambda v + b\mu w = \lambda av + \mu bw.$$

Aus $av + bw = 0$ folgt $bw = -av$. Dies setzen wir in die Gleichung $\lambda av + \mu bw = 0$ ein und bekommen

$$0 = \lambda av + \mu bw = \lambda av + \mu(-av) = (\lambda - \mu)av.$$

Da $v \neq 0$ gilt und aus $\lambda \neq \mu$ auch $\lambda - \mu \neq 0$ folgt, muss $a = 0$ gelten. Aus $a = 0$ folgt dann aber auch sofort $b = 0$, und die beiden Vektoren sind linear unabhängig.

Aufgabe 5

(a) Die Menge A der ungeraden natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt, besitzt also auch kein Maximum. Sie ist nach unten beschränkt (zum Beispiel durch 1), und 1 ist auch ihr Minimum.

(b) Es gilt

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 1\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -1 \text{ oder } x > 1\}.$$

Die Menge ist also weder nach oben noch nach unten beschränkt, und sie besitzt weder Minimum noch Maximum.

(c) Es ist

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| - 1 < 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}.$$

Die Menge ist also zum Beispiel durch 0 nach unten und durch 2 nach oben beschränkt, besitzt aber weder Minimum noch Maximum.

(d) Mit der ersten binomischen Formel erhalten wir

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0\}.$$

Die Menge ist also zum Beispiel durch -2 nach unten und durch 0 nach oben beschränkt. Außerdem ist -2 das Minimum und 0 das Maximum von D.

Aufgabe 6

Sei $m \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - 0| = |a_n| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Wir wählen nun ganz speziell $\epsilon = |a_m| > 0$. Dann gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < |a_m|$ für alle $n \geq n_0$. Da aber $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $|a_n| = -a_n$ und $|a_m| = -a_m$. Es gilt also $-a_n < -a_m$ für alle $n \geq n_0$ und damit $a_n > a_m$ für alle $n \geq n_0$.

Aufgabe 7

(a) Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7)^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-7)^n}{5^n} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{7}{5})^n.$$

Dies ist bis auf den Faktor $\frac{1}{5}$ eine geometrische Reihe der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, wobei $|q| > 1$ gilt. Die Reihe ist damit divergent.

(b) Für die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ benutzen wir das Wurzelkriterium. Es ist

$$\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{2^n}} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt[n]{n}}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}} = 1$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2} < 1$. Es folgt, dass die Reihe konvergiert.

Aufgabe 8

(a) Als Wahrheitstafel für die Formel $\alpha = ((P \to Q) \wedge (R \vee Q)) \to (P \wedge Q)$ erhalten wir:

P	Q	R	$P \to Q$	$R \vee Q$	$(P \to Q) \wedge (R \vee Q)$	$P \wedge Q$	α
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Wir sehen, dass die Formel erfüllbar ist, denn es gibt eine Bewertung der Atome (z.B. $\mathfrak{I}(P) = \mathfrak{I}(Q) = \mathfrak{I}(R) = \mathbf{0}$), so dass die Bewertung der Formel **1** ist.

(b) Wir beginnen mit der ersten Formel und versuchen, sie mit Hilfe der Äquivalenzregeln in die zweite zu überführen.

$$\begin{aligned}
(P \wedge ((Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R))) \vee (R \wedge Q) &\approx (P \wedge (Q \wedge (R \vee \neg R))) \vee (R \wedge Q) \\
&\text{(Distributivgesetze)} \\
&\approx (P \wedge (Q \wedge \mathbf{1})) \vee (R \wedge Q) \\
&(\alpha \vee \neg\alpha \approx \mathbf{1}) \\
&\approx (P \wedge Q) \vee (R \wedge Q) \\
&(\alpha \wedge 1 \approx \alpha) \\
&\approx (P \vee R) \wedge Q \\
&\text{(Distributivgesetze).}
\end{aligned}$$

Also sind die beiden Formeln logisch äquivalent.