Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2018

Klausur am 08.09.2018:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion nach n.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{3\cdot 1+1}$. Also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Es gelte $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, dass $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n+1}{3(n+1)+1} = \frac{n+1}{3n+4}$ gilt. Es ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} + \frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{3n+1} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \qquad \text{mit der Induktionsannahme} \\
&= \frac{(3n+4)n}{(3n+1)(3n+4)} + \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{(3n+1)(n+1)}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{n+1}{3n+4}.
\end{aligned}
$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

(a) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^4$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}) &= f(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \\ x_4+y_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3) \\ (x_2+y_2)+(x_3+y_3)+(x_4+y_4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_2+x_3+x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+y_2+y_3 \\ y_2+y_3+y_4 \end{pmatrix} = f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix})
\end{aligned}
$$

© FernUniversität in Hagen, 2018

und

$$f(a\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}ax_1\\ax_2\\ax_3\\ax_4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}ax_1+ax_2+ax_3\\ax_2+ax_3+ax_4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_2+x_3+x_4\end{pmatrix} = af(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}).$$

Also ist f linear.

(b) Es gilt $f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\x_2+x_3+x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$, also $A = \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$.

(c) Es gilt $\mathrm{Kern}(f) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$. Es muss also das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ gelöst werden. Dazu bringen wir A in Treppennormalform. Es muss nur noch die zweite Zeile von der ersten subtrahiert werden. Das ergibt

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist bereits in Treppennormalform. Wir fügen zwei Nullzeilen und (-1)en auf der Diagonalen hinzu

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

und lesen ab, dass die Vektoren $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ bilden.

(d) Mit (c) ist $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0\}$. Also ist f nicht injektiv. Mit dem Rangsatz gilt weiter $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2 + \dim(\mathrm{Bild}(f))$, also folgt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = 2$. Weil auch $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ gilt, folgt $\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}^2$, und f ist surjektiv.

(e) Wir müssen die Basiselemente von $\mathcal{B}$ in f einsetzen und die Bilder als Linearkombination der Elemente aus $\mathcal{C}$ schreiben:

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

© FernUniversität in Hagen, 2018

$$f(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Nun werden die Koeffizienten in den Zeilen in die Spalten der Matrix geschrieben.

$${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

(a) Da $x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1$ Linearkombinationen von x_1, x_2, x_3 sind, folgt sofort $x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1 \in \langle x_1, x_2, x_3\rangle$ und damit auch $\langle x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1\rangle \subseteq \langle x_1, x_2, x_3\rangle$. Wegen

$$x_1 = \frac{1}{2}((x_1+x_2) - (x_2+x_3) + (x_3+x_1))$$
$$x_2 = \frac{1}{2}((x_2+x_3) - (x_3+x_1) + (x_1+x_2))$$
$$x_3 = \frac{1}{2}((x_3+x_1) - (x_1+x_2) + (x_2+x_3))$$

gilt $x_1, x_2, x_3 \in \langle x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1\rangle$ und damit auch $\langle x_1, x_2, x_3\rangle \subseteq \langle x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1\rangle$.

(b) Im Allgemeinen gilt nicht $\langle x_1, x_2, x_3\rangle = \langle x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1\rangle$. Ist zum Beispiel $x_1 \neq 0$ und $x_1 = x_2 = x_3$, dann ist $\langle x_1, x_2, x_3\rangle = \langle x_1\rangle \neq \{0\}$ und $\langle x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1\rangle = \langle 0,0,0\rangle = \{0\}$.

Aufgabe 4

(a) Ein lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen ist zum Beispiel $x_1 + x_2 = 0$ über den reellen Zahlen. Die Lösungsmenge ist $\{a\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(b) Das Intervall $(0,1)$ hat 0 als Häufungspunkt, denn die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ liegt in $(0,1)$ und konvergiert gegen 0, und $0 \notin (0,1)$.

(c) Es gilt

$$\int_a^b e^{-x}dx = [-e^{-x}]_a^b = -e^{-b} + e^{-a}.$$

Ist jetzt zum Beispiel $b = 0$, dann muss $e^{-a} = 2$ gelten, also $-a = \ln(2)$ oder $a = -\ln(2)$. Es gilt also $\int\limits_{-\ln(2)}^{0} e^{-x}dx = 1$.

© FernUniversität in Hagen, 2018

Aufgabe 5

In allen Punkten $x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ ist f_a Quotient stetiger Funktionen, wobei der Nenner nicht 0 ist. Also ist f_a dort stetig, und wir müssen nur noch den Punkt $x = \frac{\pi}{2}$ untersuchen. Die Funktion f_a ist stetig in $x = \frac{\pi}{2}$, wenn $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f_a(x) = f(\frac{\pi}{2}) = a$ gilt. Es ist

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f_a(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)}.$$

Es gilt (weil sin und cos stetig sind) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(2x) = \sin(\pi) = 0$ und $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Wir können also versuchen, die Regel von de l'Hospital anzuwenden. Zähler und Nenner sind differenzierbar, und wir betrachten

$$\frac{(\sin(2x))'}{(\cos(x))'} = \frac{2\cos(2x)}{-\sin(x)} = -\frac{2\cos(2x)}{\sin(x)}.$$

Nun gilt

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} -\frac{2\cos(2x)}{\sin(x)} = -\frac{-2}{1} = 2,$$

also mit der Regel von de l'Hospital auch

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} = 2.$$

Für $a = 2$ ist also f_a stetig, für alle $a \neq 2$ ist f_a nicht stetig.

Aufgabe 6

Die Funktion f ist als Differenz zweier stetiger und differenzierbarer Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar. Weiter gilt $f(0) = -1 < 0$ und $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$. Da $\frac{\pi}{2} > 1$ gilt, ist $\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} < \frac{1}{e}$ und damit $1 - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} > 1 - \frac{1}{e} > 0$. Es ist also $f(\frac{\pi}{2}) > 0$. Aus dem Nullstellensatz folgt nun, dass f im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ eine Nullstelle besitzt. Weiter gilt

$$f'(x) = \cos(x) + e^{-x},$$

wobei $\cos(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ und $e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Das heißt, $f'(x) > 0$ für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv in diesem Intervall. Damit ist gezeigt, dass es nur eine Nullstelle im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ geben kann.

Aufgabe 7

Wir versuchen, das Konvergenzkriterium von Cauchy-Hadamard anzuwenden und betrachten die Folge $(\sqrt[n]{\left|\frac{2n+1}{n}\right|})_{n \in \mathbb{N}}$. Es gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2n+1}{n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{2n+1}{n}} = \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da

$$\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim \sqrt[n]{2} = \lim \sqrt[n]{3} = 1$ gilt, folgt mit dem Einschnürungssatz auch $\lim \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}} = 1$. Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard gilt also, dass die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ divergiert. Es bleiben noch $x = 1$ und $x = -1$ zu betrachten. Da jedoch $\lim \frac{2n+1}{n} = \lim 2 + \frac{1}{n} = 2 \neq 0$ gilt, konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n}$ nicht. Es ist auch $((-1)^n \frac{2n+1}{n}) = ((-1)^n(2+\frac{1}{n})$ keine Nullfolge, denn die Folgenglieder sind für gerades n größer als 2 und für ungerades n kleiner als -2. Auch für $x = -1$ divergiert die Potenzreihe also.

Aufgabe 8

(a) Die Wahrheitstafel für die Formel sieht folgendermaßen aus:

A	B	C	$B \wedge \neg C$	$A \to (B \wedge \neg C)$	$\neg A \vee C$	$\neg B \to (\neg A \vee C)$	α
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**

Da die Formel α für jede Bewertung der Atome die Bewertung **1** besitzt, ist es eine Tautologie.

(b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
(A \to (B \wedge \neg C)) \to (\neg B \to (\neg A \vee C)) &\approx (\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \to (B \vee (\neg A \vee C)) (\text{ Junktorminimierung})\\
&\approx \neg(\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \vee (B \vee (\neg A \vee C)) \text{ (Junktorminimierung)}\\
&\approx (A \wedge \neg(B \wedge \neg C)) \vee (B \vee (\neg A \vee C)) \text{ (De Morgan)}\\
&\approx (A \wedge (\neg B \vee C)) \vee (B \vee (\neg A \vee C)) \text{ (De Morgan)}\\
&\approx (A \wedge (\neg B \vee C)) \vee B \vee \neg A \vee C \text{ (Klammern)}
\end{aligned}
$$

Die letzte Formel ist in Negationsnormalform.

© FernUniversität in Hagen, 2018