FernUniversität in Hagen

FernUniversität in Hagen
FAKULTÄT für Mathematik und Informatik

Bitte hier unbedingt Matrikelnummer und Adresse eintragen, sonst keine Bearbeitung möglich.

Postanschrift: FernUniversität ·58084 Hagen

(Name, Vorname)

(Straße, Nr.)

(PLZ, Wohnort)

KLAUSUR zum Kurs Mathematische Grundlagen (01141)
WS 2018/19

DATUM: 09.03.2019
UHRZEIT: 10.00 - 12.00 Uhr
KLAUSURORT:

Bearbeitungshinweise
(Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Füllen Sie bitte das Adressfeld leserlich und vollständig aus, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt, das Sie abgeben.
3. Die Reihenfolge, in der Sie die Aufgaben/Teilaufgaben lösen, ist Ihnen freigestellt. Kreuzen Sie in der Tabelle (s.u.) an, welche Aufgaben Sie bearbeitet haben.
4. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie **40** Punkte erreichen.
5. Erlaubt ist ein handgeschriebenes DIN-A4-Blatt mit eigenen Notizen.
6. Weitere Aufzeichnungen oder Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Taschenrechner, etc. dürfen während der Klausur nicht benutzt werden. Ihre Benutzung sowie andere Täuschungsversuche führen dazu, dass Ihre Klausur mit der Note 5,0 bewertet wird.

	Bemerkungen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8		Summe
Bearbeitet										
max. Punktezahl	8	14	10	14	10	8	8	8		80
erreichte Punktezahl										
Korrektur										

Prüfergebnis/Note	

Klausur am 09.03.2019:

Aufgabenstellungen

Die Lösungen aller Aufgaben müssen Sie begründen.

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2 \; .$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 2

Berechnen Sie in Abhängigkeit von $m \in \mathbb{R}$ die Treppennormalform der erweiterten Koeffizientenmatrix und ggf. die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \; .$$

[*14 Punkte*]

Aufgabe 3

Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5 \; , \; f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \\ x_4 - x_3 \\ x_3 - x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear (was Sie nicht zu zeigen brauchen). Bestimmen Sie Basen von Kern(f) und Bild(f) und überprüfen Sie die Aussage des Rangsatzes.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 4

Geben Sie jeweils ein Beispiel (mit kurzer Begründung) für

a) eine lineare Abbildung f mit dim(Kern(f))=1;

b) eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die Infimum und Maximum, aber kein Minimum besitzt;

c) eine divergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

d) eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in $x_0 = 1$ stetig, aber nicht diffferenzierbar ist.

[*4 + 3 + 3 + 4 = 14 Punkte*]

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass es genau ein $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $e^{-x} = \frac{x^2}{x^2+1}$. Geben Sie ein Intervall mit Länge ≤ 1 an, in dem dieses x liegt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^n}{(2n)!}$$

auf Konvergenz.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx \ .$$

[*8 Punkte*]

Aufgabe 8

Gegeben sei die Formel

$$\alpha = (A \to B) \vee (C \to (A \wedge B)) \ .$$

Bestimmen Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α und geben Sie jeweils die vorgenommenen Äquivalenzumformungen an.

[*8 Punkte*]

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \ln(-x)$
$x \mapsto x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$