Klausur am 09.03.2019:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Induktionsanfang: Es sei $n_0 = 1$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{1} 2^k = 2 = 2^2 - 2 = 2^{n_0+1} - 2 \;,$$

also gilt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2$ für ein $n \geq 1$ gilt. Daraus müssen wir (im Induktionsschritt) schließen, dass $\sum\limits_{k=1}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 2$ folgt. Mit der Induktionsannahme ist aber tatsächlich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 2^k &= \sum_{k=1}^{n} 2^k + 2^{n+1} && \text{(Aufspalten der Summe)}\\
&= 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} && \text{(Induktionsannahme)}\\
&= 2 \cdot 2^{n+1} - 2 \;=\; 2^{n+2} - 2 \;.
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 2

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ des linearen Gleichungssystems ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & -1 & m & 2 \end{array}\right) .$$

Wir subtrahieren von der zweiten Zeile die erste und von der dritten Zeile das doppelte der ersten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & m-2 & 0 \end{array}\right)$$

und addieren die zweite Zeile zur dritten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & m-1 & 1 \end{array}\right) . \qquad (*)$$

Im Fall $\underline{m = 1}$ haben wir in $(*)$ fast schon die Treppennormalform erreicht; wir müssen zum Aufräumen in der letzten Spalte nur noch die dritte Zeile von der ersten und der zweiten abziehen und erhalten die Treppennormmalform

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

Es gilt $\operatorname{Rg}(A|b) = 3 \neq \operatorname{Rg}(A) = 2$, das Gleichungssystem ist in diesem Fall also nicht lösbar.

Im Fall $\underline{m \neq 1}$ dividieren wir die letzte Zeile von $(*)$ durch $m-1$, subtrahieren sie anschließend von der ersten und von der zweiten Zeile und erhalten die Treppennormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & 1-\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1-\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{m-1} \end{pmatrix} .$$

Es gilt $\operatorname{Rg}(A|b) = \operatorname{Rg}(A) = 3$, das Gleichungssystem ist also lösbar; zum Auffüllen auf Dreiecksform fügen wir eine Nullzeile und dann auf der Diagonalen -1 ein

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & \frac{m-2}{m-1} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{m-2}{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{m-1} \end{pmatrix}$$

und lesen daraus die Lösungsmenge ab:

$$\mathcal{L}_{m\neq 1} = \left\{ \frac{1}{m-1} \begin{pmatrix} m-2 \\ 0 \\ m-2 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} .$$

Aufgabe 3

Es ist

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \\ x_4 - x_3 \\ x_3 - x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ x_2 = -x_1, x_3 = x_4$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (x_1, x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}) ,$$

also $\operatorname{Kern}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Die beiden Vektoren sind linear unabhängig, denn es gilt

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ x_1 = x_3 = 0 ,$$

sie bilden also eine Basis von Kern(f). Diese Vektoren können z.B. durch

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzt werden; es ist

$$a\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\-a\\b+d\\b\end{pmatrix}=0\ \Leftrightarrow\ a=b=c=d=0\ ,$$

also sind die Vektoren linear unabhängig. Damit bilden

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ und } f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

eine Basis von Bild(f) (was man aber auch direkt hätte zeigen können).

Es ist dim(Kern(f))+dim(Bild(f))=2+2=4=dim($\mathbb{R}^4$), wie es der Rangsatz aussagt.

Aufgabe 4

a) Das wohl einfachste Beispiel ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, also Kern(f)=$\mathbb{R}$ und dim(Kern(f))=1.

b) Das halboffene Intervall $(0,1]$ hat 1 als Maximum; 0 ist Infimum, aber kein Minimum, da es nicht im Intervall liegt.

c) Die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist divergent, obwohl $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{n}{n+1}<1$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.

d) Für die Betragsfunktion gilt das Gewünschte (stetig, aber nicht differenzierbar) in $x_0=0$; die verschobene Betragsfunktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-1|$ hat dann die gleichen Eigenschaften in $x_0=1$: Sie ist als Komposition stetiger Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber für den Differenzenquotienten in $x_0=1$ gilt mit den beiden Nullfolgen $a_n=1/n$ bzw. $b_n=-1/n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1+a_n)-f(1)}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{a_n}=1$, aber $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1+b_n)-f(1)}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|b_n|}{b_n}=-1$.

(„ ... hat den Knick in $x_0=1$“ reicht als Begründung aber auch aus.)

Aufgabe 5

Wir betrachten die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = e^{-x}\,,\ g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Sie sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar (g ist eine rationale Funktion, deren Nenner keine Nullstelle hat). f ist als Spiegelung der e-Funktion an der y-Achse streng monoton fallend ($f'(x) = -e^{-x} < 0$). Wir untersuchen die (ebenfalls stetige und differenzierbare) Differenzfunktion $h = f - g$ auf Nullstellen. Für $x < 0$ gilt $f(x) > f(0) = e^0 = 1\,,\ g(x) = \frac{x^2}{x^2+1} < 1$, also jedenfalls $h(x) > 0$. In $x = 0$ gilt $h(0) = e^0 - \frac{0}{1} = e^0 = 1 > 0$ (auch hier liegt also keine Nullstelle vor), in (z.B.) $x = 1$ gilt dagegen $h(1) = e^{-1} - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{2} = \frac{2-e}{2e} < 0$ (wegen $e > 2$). Also hat h nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $(0, 1)$. In ganz $(0, \infty)$ kann es aber höchstens eine geben, denn wegen

$$h'(x) = -e^{-x} - \frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -e^{-x} - \frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \quad \text{für} \quad x > 0$$

ist h streng monoton fallend auf ganz $(0, \infty)$. Also gibt es genau ein x (und zwar in $(0, 1)$) mit $f(x) = g(x)$.

Aufgabe 6

Für $a_n = \frac{n!n^n}{(2n)!}$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \frac{(n+1)!(n+1)^{n+1}(2n)!}{(2(n+1))!n!n^n} = \frac{(n+1)n!(n+1)(n+1)^n(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!n!n^n} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2 \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &\to \frac{1}{4} \cdot e < 1 \text{ für } n \to \infty\,,\end{aligned}$$

also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

Aufgabe 7

Wir setzen $f(x) = \ln(x)\,,\ g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$, also $f'(x) = \frac{1}{x}\,,\ g(x) = 2x^{1/2} = 2\sqrt{x}$, und erhalten mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx &= f(x)g(x)\big|_1^2 - \int_1^2 f'(x)g(x)\,dx = \ln(x) \cdot 2\sqrt{x}\big|_1^2 - \int_1^2 \frac{2\sqrt{x}}{x}\,dx \\ &= 2\sqrt{2}\ln(2) - 0 - \int_1^2 2x^{-1/2}\,dx = 2\sqrt{2}\ln(2) - 2 \cdot 2x^{1/2}\Big|_1^2 \\ &= 2\sqrt{2}\ln(2) - 4(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}(2\ln(2) - 4) + 4\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 8

Wir erhalten

$$\begin{array}{rcll} \alpha & = & (A \to B) \vee (C \to (A \wedge B)) & \\ & \approx & (B \vee \neg A) \vee ((A \wedge B) \vee \neg C) & \text{Junktorminimierung} \\ & \approx & B \vee \neg A \vee (A \wedge B) \vee \neg C & \text{Klammern weglassen .} \end{array}$$

Dies ist schon eine Disjunktion von Monomen, also eine disjunktive Normalform von α.

Wenn wir darauf das Kommutativgesetz anwenden und erneut Klammern setzen, erhalten wir

$$\begin{array}{rcll} \alpha & \approx & (A \wedge B) \vee (B \vee \neg A \vee \neg C) & \\ & \approx & (A \vee (B \vee \neg A \vee \neg C)) \wedge (B \vee (B \vee \neg A \vee \neg C)) & \text{Distributivgesetz} \\ & \approx & (A \vee B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (B \vee B \vee \neg A \vee \neg C) & \text{Klammern weglassen ;} \end{array}$$

Das ist bereits eine Konjunktion von Klauseln, also eine konjunktive Normalform; sie kann deutlich „verschönert“ werden durch

$$\begin{array}{rcll} \alpha & \approx & \mathbf{1} \wedge (B \vee B \vee \neg A \vee \neg C) & (A \vee \neg A = \mathbf{1}, \mathbf{1} \vee \beta = \mathbf{1}) \\ & \approx & (B \vee \neg A \vee \neg C) & \mathbf{1} \wedge \beta = \beta, \text{Idempotenz .} \end{array}$$

Das ist eine einzelne Klausel, also ebenfalls eine konjunktive Normalform von α (und gleichzeitig ebenfalls eine disjunktive Normalform!).