

LÖSUNGSHINWEISE ZUR ÜBUNG 1

– EINFÜHRUNG IN DIE BETRIEBSWIRTSCHAFTSLEHRE –

Teil: Moduleinheit 1

Aufgabe 1: Rentabilitätsmaximierung

Lösung zu Aufgabe 1 a)

$$R(x) := G(x)/K(x).$$

Dann gilt aufgrund der Differentialrechnung (Quotientenregel!) folgende notwendige Bedingung für ein (relatives) Rentabilitätsmaximum:

$$\begin{aligned} R'(x) &= \frac{G'(x) \cdot K(x) - G(x) \cdot K'(x)}{[K(x)]^2} = 0 \\ &= G'(x) \cdot K(x) - K'(x) \cdot G(x) = 0. \end{aligned}$$

$$G'(x) \cdot K(x) = K'(x) \cdot G(x).$$

$$\Rightarrow \frac{G'(x)}{K'(x)} = \frac{G(x)}{K(x)}.$$

Lösung zu Aufgabe 1 b)

Die letzte Gleichung besagt, daß im Rentabilitätsmaximum der Grenzgewinn des Kapitals gleich dem Durchschnittsgewinn ist.

Aufgabe 2: Gewinn- vs. Rentabilitätsmaximierung

Lösung zu Aufgabe 2 a)

Die Rentabilitätsfunktion lautet:

$$R(x) := \frac{G(x)}{K(x)} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot x^2 + 20 \cdot x - 50}{\frac{1}{4} \cdot x}.$$

Lösung zu Aufgabe 2 b)

Zur Gewinnmaximierung ist die Gewinnfunktion $G(x)$ nach der Absatzmenge x zu differenzieren und gleich null zu setzen:

$$G(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 20 \cdot x - 50.$$

$$G'(x) = -1 \cdot x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 20.$$

Die gewinnmaximale Menge beträgt:

$$x^* = 20 \text{ ME.}$$

Die Erzeugung der gewinnmaximalen Menge bedingt nachstehenden Kapitaleinsatz:

$$K(x) = 1/4 \cdot x = 1/4 \cdot 20 = 5 \text{ GE.}$$

Für den maximalen Gewinn resultiert:

$$G(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 20 \cdot x - 50 = -\frac{1}{2} \cdot 20^2 + 20 \cdot 20 - 50 = 150 \text{ GE.}$$

Das Verhältnis des maximalen Gewinns zum gewinnmaximalen Kapitaleinsatz ist als gewinnmaximale Rentabilität definiert:

$$R(x) := \frac{G(x)}{K(x)} = \frac{150}{5} = 30 = 3.000\%.$$

Lösung zu Aufgabe 2 c)

Eine Rentabilitätsmaximierung bedingt die Differentiation der Rentabilitätsfunktion $R(x)$ nach der Absatzmenge x :

$$R'(x) = \frac{G'(x) \cdot K(x) - G(x) \cdot K'(x)}{[K(x)]^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-1 \cdot x + 20) \cdot \frac{1}{4} \cdot x - \left(-\frac{1}{2} \cdot x^2 + 20 \cdot x - 50\right) \cdot \frac{1}{4}}{\left[\frac{1}{4} \cdot x\right]^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-1 \cdot x + 20) \cdot \frac{1}{4} \cdot x - \left(-\frac{1}{2} \cdot x^2 + 20 \cdot x - 50\right) \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \cdot x^2 + 5 \cdot x - \left(-\frac{1}{8} \cdot x^2 + 5 \cdot x - 12,5\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \cdot x^2 + 5 \cdot x + \frac{1}{8} \cdot x^2 - 5 \cdot x + 12,5 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{8} \cdot x^2 + 12,5 = 0.$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -12,5 \cdot (-8).$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{100}.$$

$$\Rightarrow x_1 = 10 \text{ ME} = \text{rentabilitätsmaximale Menge!}$$

$$\Rightarrow x_2 = -10 \text{ ME} \Rightarrow \text{ökonomisch nicht relevant!}$$

Das Einsetzen der rentabilitätsmaximalen Menge $x = 10 \text{ ME}$ in die Kapitaleinsatzfunktion $K(x)$ führt zum rentabilitätsmaximalen Kapitaleinsatz:

$$K(x) = 1/4 \cdot x = 1/4 \cdot 10 = 2,5 \text{ GE.}$$

Der Gewinn im Rentabilitätsmaximum beträgt:

$$G(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 20 \cdot x - 50 = -\frac{1}{2} \cdot 10^2 + 20 \cdot 10 - 50 = 100 \text{ GE.}$$

Schließlich ist die maximale Rentabilität wie folgt definiert:

$$R(x) := \frac{G(x)}{K(x)} = \frac{100}{2,5} = 40 = 4.000\%.$$

Lösung zu Aufgabe 2 d)

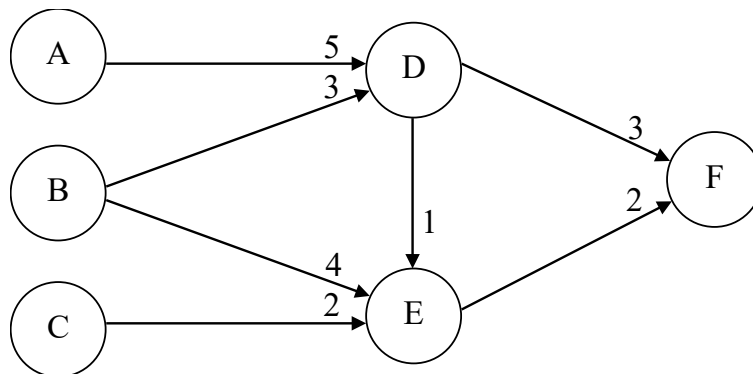
Bei konsequenter Verfolgung des Ziels Rentabilitätsmaximierung dürfte der „Renditemaximierer“ nicht mehr als 10 ME seines Gutes produzieren bzw. absetzen, denn jedes weitere Geschäft würde die bisher erzielte Rendite verschlechtern. Die Fragwürdigkeit dieser Schlußfolgerung dürfte einleuchten: Was nützt die hohe Rentabilität, wenn der zum Konsum entnehmbare Gewinn im Rentabilitätsmaximum deutlich kleiner ist als derjenige Gewinn, welcher bei Gewinnmaximierung erzielbar wäre. Letztlich können nur ausschüttungsfähige Gewinne und nicht Renditen die Konsumentnahmewünsche des Unternehmenseigners befriedigen. Es wird also notwendig sein, die Geschäftstätigkeit über das Rentabilitätsmaximum hinaus auszudehnen und das Ziel Gewinnmaximierung zu verfolgen.

Aufgabe 3: Programmgebundene Bedarfsplanung mittels Gozinto-Graphen

Lösung zu Aufgabe 3 a)

Nachstehende Abbildung zeigt den Gozinto-Graphen, dessen Elemente sich wie folgt interpretieren lassen: Der Graph besteht aus Knoten, die durch Pfeile (auch gerichtete Kanten genannt) miteinander

verbunden sind. Während die fremdbezogenen Rohstoffe A, B und C mit Hilfe von Knoten dargestellt werden, von denen Pfeile ausschließlich ausgehen, kennzeichnen in den Knoten lediglich einmündende Pfeile das Endprodukt F. Zur Illustration der Zwischenprodukte D und E werden Knoten verwendet, in die Pfeile ein- und von denen Pfeile ausgehen. Die Mengenbeziehungen zwischen den Komponenten (Direktbeziehungen) sind durch die Zahlen (Produktionskoeffizienten) an den Pfeilen angegeben. Sie offenbaren demzufolge die Menge eines Rohstoffs oder Zwischenprodukts, die für die Herstellung einer ME eines Zwischenprodukts oder des Endprodukts notwendig ist.



Aus dem Gozinto-Graphen lassen sich durch retrograde Auswertung die Gesamtbedarfe M_j ($j = A, B, C, D, E, F$) wie folgt ableiten:

$$M_F = 50;$$

$$M_E = 2 \cdot M_F = 100;$$

$$M_D = 3 \cdot M_F + 1 \cdot M_E = 3 \cdot 50 + 1 \cdot 100 = 250;$$

$$M_A = 5 \cdot M_D = 5 \cdot 250 = 1.250;$$

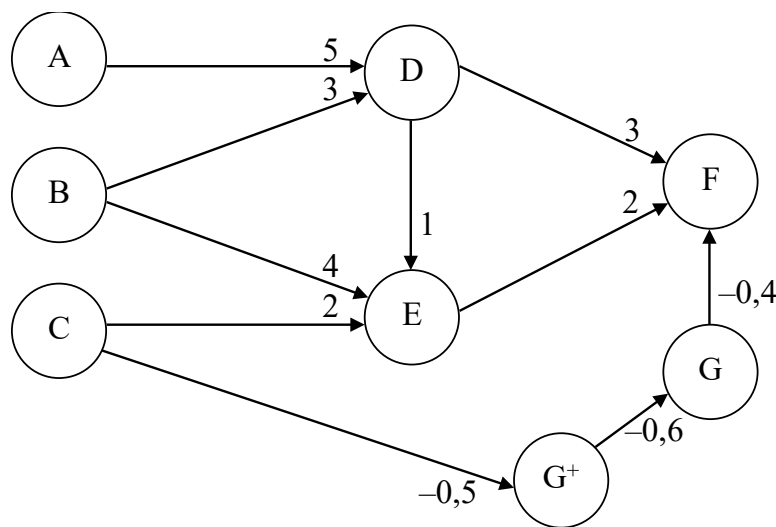
$$M_B = 3 \cdot M_D + 4 \cdot M_E = 3 \cdot 250 + 4 \cdot 100 = 1.150;$$

$$M_C = 2 \cdot M_E = 2 \cdot 100 = 200.$$

Lösung zu Aufgabe 3 b)

In nachstehender Abbildung wird ein Produktionsprozeß mit einer unechten Rückkopplung gezeigt, welche im Beispiel dadurch charakterisiert ist, daß ein Teil des Kuppelprodukts „Abfall“ als Erzeugnis höherer Produktionsreife den Rohstoff C ersetzen kann, aber nicht zwingend muß. Im Gozinto-Graphen führt ein Pfeil mit negativer Bewertung $(-0,4)$ von G zu F, womit das bei der Herstellung des Endprodukts F automatisch und zunächst unerwünscht anfallende Kuppelprodukt „Abfall“ gekennzeichnet ist. Wer also 50 ME des Endprodukts F erzeugen möchte, muß 20 ME des Abfalls G in Kauf nehmen. Das sich ergebende negative Vorzeichen vor der doch positiven Abfallmenge steht für die grundsätzliche Unerwünschtheit des Kuppelprodukts. Zur Darstellung der unechten Rückkopplung ist der Hilfsknoten G^+ unerlässlich, da ein direkter positiv bewerteter Pfeil von C nach G unter Angabe der Recyclingquote $((-0,6) \cdot (-0,5) = +0,3 [FE_C/ME_G])$ die Produktionsbeziehungen nicht richtig wiedergäbe. Zwar ergäbe sich rechnerisch das richtige Ergebnis für den zu deckenden Bedarf an C, doch graphisch entstünde fälschlicherweise der Eindruck, als wäre der Rohstoff C für

die „Produktion des Abfalls G“ erforderlich. Um den Recyclingfall anhand eines Gozinto-Graphen sinnvoll darzustellen, bleibt nur der Weg über den Hilfsknoten G^+ . Da der erwünschte Sekundärrohstoff G^+ erst durch Aufbereitung von G entsteht, muß ein negativ bewerteter Pfeil von G^+ zu G führen, der die unerwünschte Abfallmenge (negatives Vorzeichen) in die erwünschte Sekundärrohstoffmenge (positives Vorzeichen) transformiert. Der negative Produktionskoeffizient des Pfeils von G^+ nach G gibt die Aufbereitungsquote $[FE_{G^+}/ME_G]$ an. Durch den Aufbereitungsprozeß können also 0,6 FE des Sekundärrohstoffs G^+ aus einer ME des Abfalls G gewonnen werden. Der von C zu G^+ zeigende negativ bewertete Pfeil läßt die Substitutionsquote erkennen, welche im Beispielfall 0,5 $[FE_C/ME_{G^+}]$ beträgt; d.h., jede eingesetzte FE des Sekundärrohstoffs G^+ reduziert (negatives Vorzeichen) den Primärrohstoffbedarf an C um 0,5 FE. Insgesamt werden bei der Herstellung von 50 ME des Endprodukts F durch Aufbereitung der 20 ME des Abfalls G zwölf FE des Sekundärrohstoffs G^+ gewonnen, durch deren Einspeisung in den Produktionsprozeß auf sechs FE des Primärrohstoffs C verzichtet werden kann.



Während die Gesamtbedarfe der Zwischenprodukte D und E sowie der Primärrohstoffe A und B gleichbleiben, sinkt der Rohstoffbedarf an C aufgrund des Recyclingprozesses auf $M_C = 200 - 6 = 194$ FE.

Aufgabe 4: Verbrauchsgebundene Bedarfsplanung

Die dem Verfahren der exponentiellen Glättung erster Ordnung zugrundeliegende Hypothese besagt, daß in die Prognose alle Verbrauchswerte der Vergangenheit einbezogen werden sollen, wobei diese aber ihrem zunehmenden Alter entsprechend eine immer geringere Gewichtung erfahren. Der Prognosewert für die Periode $T+1$ (P_{T+1}^{eg}) wird dabei aus dem Prognosewert der Periode T (P_T^{eg}) abgeleitet, und zwar indem man den alten Prognosewert um den mit einem Glättungsfaktor α gewichteten Prognosefehler korrigiert. Zur Feststellung des Prognosefehlers bedarf es daher eines Vergleichs des alten Prognosewerts mit dem tatsächlich eingetretenen Verbrauch in der Periode T (V_T).

$$P_{T+1}^{eg} = P_T^{eg} + \alpha \cdot (V_T - P_T^{eg}) = \alpha \cdot V_T + (1 - \alpha) \cdot P_T^{eg}; \quad \text{mit } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Die nachstehende Tabelle verdeutlicht die Prognose des zukünftigen Materialbedarfs:

Periode t	Verbrauch V_T	Prognosewerte P_T^{eg} für $\alpha = 0,2$	Prognosefehler $V_T - P_T^{eg}$
1	206	-	-
2	215	206	9
3	209	207,8¹⁾	1,2
4	212	208,04	3,96
5	208	208,832	-0,832
6	Prognose	208,6656	MAA = 3,748 ²⁾

1) $207,8 = 206 + 0,2 \cdot 9 = 0,2 \cdot 215 + 0,8 \cdot 206$
2) MAA = Mittlere Absolute Abweichung = $3,748 = (9 + 1,2 + 3,96 + 0,832)/4$

Aufgabe 5: Minimalkostenkombination

Lösung zu Aufgabe 5 a)

Die Grenzrate der Substitution (GRS) gibt das marginale Faktoraustauschverhältnis an, d.h. die Einsatzmenge eines Produktionsfaktors, welche bei konstanter Ausbringungsmenge notwendig ist, um eine infinitesimal kleine Einheit eines anderen Faktors zu ersetzen.

Mathematisch wird die Grenzrate der Substitution des Faktors r_2 durch den Faktor r_1 ($GRS_{2,1}$) durch den Differentialquotienten dr_2/dr_1 ausgedrückt:

$$GRS_{2,1} = \frac{dr_2}{dr_1}.$$

Lösung zu Aufgabe 5 b)

Totales Differential bei zwei Faktoren:

$$dM = \frac{\partial M}{\partial r_1} \cdot dr_1 + \frac{\partial M}{\partial r_2} \cdot dr_2.$$

Auf einer Isoquante gilt definitionsgemäß $dM = 0$.

$$dM = \frac{\partial M}{\partial r_1} \cdot dr_1 + \frac{\partial M}{\partial r_2} \cdot dr_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial r_1} \cdot dr_1 = -\frac{\partial M}{\partial r_2} \cdot dr_2.$$

$$\Leftrightarrow \text{GRS}_{2,1} = \frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial r_1}}{\frac{\partial M}{\partial r_2}}.$$

Lösung zu Aufgabe 5 c)

Zielfunktion: $K = q_1 \cdot r_1 + q_2 \cdot r_2 \rightarrow \min.$

Nebenbedingung: $\bar{M} = f(r_1, r_2).$

Hieraus läßt sich die Lagrange-Funktion aufstellen:

$$L(r_1, r_2, \lambda) = \text{Zielfunktion} + \lambda \cdot (\text{Nebenbedingung in Nullform}).$$

$$L(r_1, r_2, \lambda) = q_1 \cdot r_1 + q_2 \cdot r_2 + \lambda \cdot (\bar{M} - f(r_1, r_2)) \rightarrow \min.$$

Lösung zu Aufgabe 5 d)

Durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen ergeben sich die notwendigen Bedingungen für den zu ermittelnden Optimalpunkt (Minimalkostenkombination):

$$\frac{\partial L}{\partial r_1} = q_1 - \lambda \cdot \frac{\partial M}{\partial r_1} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{q_1}{\frac{\partial M}{\partial r_1}}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_2} = q_2 - \lambda \cdot \frac{\partial M}{\partial r_2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \frac{q_2}{\frac{\partial M}{\partial r_2}}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \bar{M} - f(r_1, r_2) \stackrel{!}{=} 0.$$

Der Optimalpunkt ist dadurch gekennzeichnet, daß bei gegebenem Output die Kosten nicht durch eine Substitution der Faktoren gesenkt werden können, so daß die Grenzkosten beider Faktoren gleich hoch sein müssen. Die kostenminimale Faktoreinsatzmengenkombination ist daher durch folgende Gleichung charakterisiert:

$$\lambda = \frac{q_1}{\frac{\partial M}{\partial r_1}} = \frac{q_2}{\frac{\partial M}{\partial r_2}} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{\frac{\partial M}{\partial r_1}}{\frac{\partial M}{\partial r_2}} = -\frac{dr_2}{dr_1}.$$

$$\Rightarrow \text{GRS}_{2,1} = \frac{dr_2}{dr_1} = -\frac{q_1}{q_2}.$$

Die Minimalkostenkombination ist mithin erreicht, wenn die Grenzrate der Substitution ($GRS_{2,1}$) dem negativen reziproken Faktorpreisverhältnis entspricht.

Aufgabe 6: Gutenberg-Produktionsfunktion

Lösung zu Aufgabe 6 a)

Stückkostenminimale Intensität:

$$k'(x) = 1x - 25 = 0 \Rightarrow x_{\text{opt}} = 25.$$

Die minimalen Stückkosten betragen:

$$k_{\text{min}}(x_{\text{opt}}) = 0,5 \cdot 25^2 - 25 \cdot 25 + 500 = 187,5.$$

Lösung zu Aufgabe 6 b)

Zeitliche Anpassung im Intervall von:

$$0 \leq M \leq x_{\text{opt}} \cdot t_{\text{max}}$$

$$0 \leq M \leq 25 \cdot 16$$

$$0 \leq M \leq 400.$$

Die zugehörige Gesamtkostenfunktion lautet:

$$K_T(M) = k(x_{\text{opt}}) \cdot M = k_{\text{min}} \cdot M = 187,5 \cdot M.$$

Lösung zu Aufgabe 6 c)

Intensitätsmäßige Anpassung im Intervall von:

$$400 < M \leq x_{\text{max}} \cdot t_{\text{max}}$$

$$400 < M \leq 100 \cdot 16$$

$$400 < M \leq 1.600.$$

Die zugehörige Gesamtkostenfunktion lautet:

$$\begin{aligned} K_T(M) &= k(x) \cdot M = (0,5x^2 - 25x + 500) \cdot M \\ &= (0,5 \cdot (M/t_{\text{max}})^2 - 25 \cdot M/t_{\text{max}} + 500) \cdot M \\ &= (0,5 \cdot (M/16)^2 - 25 \cdot M/16 + 500) \cdot M \\ &= (0,5 \cdot M^2/256 - 25 \cdot M/16 + 500) \cdot M \end{aligned}$$

$$K_T(M) = 0,001953125 \cdot M^3 - 1,5625 \cdot M^2 + 500 \cdot M.$$

Lösung zu Aufgabe 6 d)

Die Ausbringungsmenge $M = 300$ kann durch zeitliche Anpassung erzeugt werden, weshalb mit der stückkostenminimalen Intensität gearbeitet wird:

$$x_{\text{opt}} = 25.$$

Die Einsatzzeit ergibt sich gemäß:

$$M = x \cdot t_{\text{max}} \Rightarrow t = M/x_{\text{opt}} = 300/25 = 12.$$

Literaturhinweise

- *HERING, TH., TOLL, CH.:* *BWL-Klausuren*, 5. Aufl., Berlin/Boston 2022.
- *HERING, TH., TOLL, CH.:* *BWL kompakt*, 2. Aufl., Berlin/Boston 2025.
- *TOLL, CH., HERING, TH.:* *eLearning-Kurs BWL: Beschaffung – 100 Fragen und Antworten (Mobilgerät- und Desktop-Applikation)*, Tübingen 2025.
- *TOLL, CH., HERING, TH.:* *eLearning-Kurs BWL: Produktionstheorie – 100 Fragen und Antworten (Mobilgerät- und Desktop-Applikation)*, Tübingen 2025.
- *TOLL, CH., HERING, TH.:* *eLearning-Kurs BWL: Kostentheorie – 100 Fragen und Antworten (Mobilgerät- und Desktop-Applikation)*, Tübingen 2025.
- *TOLL, CH.:* *Materialbedarfsermittlung mit graphentheoretischen Verfahren*, in: *ROLLBERG, R., HERING, TH., BURCHERT, H.* (Hrsg.), *Produktionswirtschaft*, 2. Aufl., München 2010, S. 95-100.

© Copyright: Urheberrechtshinweis

Alle Inhalte dieses Werkes, insbesondere Texte, Grafiken etc., sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, einschließlich der Vervielfältigung, Veröffentlichung, Bearbeitung und Übersetzung, bleiben vorbehalten.

Wer gegen das Urheberrecht verstößt (z.B. Texte, Grafiken etc. unerlaubt kopiert), macht sich gem. §§ 106 ff. UrhG strafbar, wird zudem kostenpflichtig abgemahnt und ist zum Schadensersatz verpflichtet (§ 97 UrhG).