Lösungshinweise zur Übung 3

– Einführung in die Betriebswirtschaftslehre für Juristen –

Aufgabe 1: Kapitalwert

Lösung zu Aufgabe 1 a)

Der Kapitalwert C für ein beliebiges Investitionsobjekt mit der Zahlungsreihe **g** := (g_0, g_1, ... , g_t, ... , g_n) ergibt sich wie folgt:

$$C := \sum_{t=0}^{n} g_t \cdot (1+i)^{-t} \ .$$

Für die Beispielkonstruktion bedeutet dies:

$C = -200 - 22 \cdot 1{,}1^{-1} + 363 \cdot 1{,}1^{-2} = 80 > 0 \quad \rightarrow$ Die Sachinvestition ist vorteilhaft!

Lösung zu Aufgabe 1 b)

Der sofort konsumierbare Geldbetrag ist in nachstehendem VOFI als Entnahme zu t = 0 ausgewiesen:

Zeitpunkt t	t = 0	t = 1	t = 2
g_t	–200	–22	363
Entnahme	**–80**		
Kredit	280	50	
Tilgung			–330
Anlage			
Zinsen 10%		–28	–33
Schuld	280	330	
Guthaben			**0**

Aufgabe 2: Endwert

Lösung zu Aufgabe 2 a)

Falls zu t = 0 eigene liquide Mittel in Höhe von EK verfügbar sind und mit dem zu beurteilenden Zahlungsstrom **g** := (g_0, g_1, ... , g_t, ... , g_n) verrechnet werden, beträgt der Endwert EW:

$EW := (C + EK) \cdot (1 + i)^n = \Delta EW + EK \cdot (1 + i)^n.$

Für die Beispielkonstruktion bedeutet dies:

$$EW = (80 + 100) \cdot 1{,}1^2 = 96{,}80 + 121 = 217{,}80.$$

Lösung zu Aufgabe 2 b)

Möchte man zur Lösungsfindung nicht auf den bereits bekannten Kapitalwert C zurückgreifen, kann der Endwert alternativ auch mit einem VOFI direkt ermittelt werden:

Zeitpunkt t	t = 0	t = 1	t = 2
g_t	–200	–22	363
EK	**100**		
Kredit	100	32	
Tilgung			–132
Anlage			
Zinsen 10%		–10	–13,20
Schuld	100	132	
Guthaben			**217,80**

Lösung zu Aufgabe 2 c)

Die Sachinvestition ist vorteilhaft, wenn ihr Endwert mindestens so groß ist wie der Endwert der „Opportunität“, d.h. der alternativ möglichen Geldanlage der eigenen liquiden Mittel EK am vollkommenen Kapitalmarkt. Kapitalwert- und Endwertkriterium sind äquivalent, denn es gilt:

$$C \geq 0 \;\Leftrightarrow\; C + EK \geq EK \;\Leftrightarrow\; (C + EK) \cdot (1 + i)^n \geq EK \cdot (1 + i)^n \;\Leftrightarrow\; EW \geq EK \cdot (1 + i)^n.$$

Der Endwert der Sachinvestition ist genau dann größer als der Endwert der eigenen Mittel (Endwert der Opportunität bzw. Alternativanlage), wenn der Kapitalwert C positiv ist.

Aufgabe 3: Annuität

Lösung zu Aufgabe 4 a)

Die Annuität a für ein beliebiges Investitionsobjekt mit der Zahlungsreihe $\mathbf{g} := (g_0, g_1, \ldots, g_t, \ldots, g_n)$ ergibt sich wie folgt:

$$a := C \cdot ANF_{i,n} = C \cdot \frac{i \cdot q^n}{q^n - 1}.$$

Für die Beispielkonstruktion bedeutet dies:

$$a = 80 \cdot \frac{0{,}1 \cdot 1{,}1^2}{1{,}1^2 - 1} = 80 \cdot 0{,}576190476 = 46{,}095238095 \approx 46{,}10.$$

Lösung zu Aufgabe 3 b)

Der nachstehende VOFI zeigt, daß bei Durchführung der Sachinvestition an jedem Jahresende ein Einkommen in Höhe der Annuität entnommen werden kann:

Zeitpunkt t	t = 0	t = 1	t = 2
g_t	–200	–22	363
Entnahme		**–46,10**	**–46,10**
Kredit	200	88,10	
Tilgung			–288,10
Anlage			
Zinsen 10%		–20	–28,81
Schuld	200	288,10	
Guthaben			**0**

Lösung zu Aufgabe 3 c)

Da der Annuitätenfaktor stets positiv ist, gilt zwischen Kapitalwert und Annuität folgende Äquivalenzbeziehung:

$$C \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad C \cdot ANF_{i,n} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0.$$

Aufgabe 4: Interner Zinsfuß

Lösung zu Aufgabe 4 a)

Die Zahlungsreihe weist genau einen Vorzeichenwechsel auf (Normalinvestition) und besitzt deshalb einen eindeutigen internen Zinsfuß r im ökonomisch relevanten Bereich r > –100%.

Der interne Zins der Zahlungsreihe (–200, –22, 363) ergibt sich aus

$$C = -200 - 22 \cdot (1 + r)^{-1} + 363 \cdot (1 + r)^{-2} = 0$$

nach quadratischer Ergänzung (mal $(1 + r)^2$)

$$-200 \cdot (1 + r)^2 - 22 \cdot (1 + r)^1 + 363 \cdot (1 + r)^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -200 \cdot (1 + r)^2 - 22 \cdot (1 + r) + 363 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 + r)^2 + 0{,}11 \cdot (1 + r) - 1{,}815 = 0$$

sowie Anwendung der p,q-Formel wie folgt:

$$(1 + r)_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow \quad r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} - 1 = \frac{-0{,}11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0{,}11}{2}\right)^2 + 1{,}815} - 1$$

r_1 = –0,055 + 1,348341574 – 1 = 0,2933415739 = 29,33%.

r_2 = –0,055 – 1,348341574 – 1 = –2,4033415739 = –240,33%.

Die zweite Lösung (r_2) scheidet aus, denn ökonomisch relevant sind nur interne Zinssätze größer als –1. Die Zahlungsreihe (–200, –22, 363) hat demnach den eindeutigen internen Zins r = 29,33%.

Lösung zu Aufgabe 4 b)

t	Kapitalbindung t–1	Zinsen r = 29,33%	Tilgung Σ = 200	Summe = Rückfluß g_t	Kapitalbindung t
0					**200**
1	200	58,67	–80,67	**–22**	280,67
2	280,67	82,33	280,67	**363**	0

Lösung zu Aufgabe 4 c)

Für Zahlungsreihen mit durchweg nichtnegativem gebundenen Kapital (z.B. Normalinvestitionen) gilt:

$C \geq 0 \Leftrightarrow r \geq i.$

Die Sachinvestition ist vorteilhaft, da ihre Rendite r größer ist als der Kalkulationszins i, welcher die Rendite der Opportunität am Kapitalmarkt darstellt.

Aufgabe 5: Unternehmensbewertung

Lösung zu Aufgabe 5 a)

Ertragswert: $E_K = \sum_{t=1}^{n} g_{Kt} \cdot (1+i)^{-t}$.

$E_K = 12.000 \cdot 1{,}1^{-1} + 12.000 \cdot 1{,}1^{-2} + 12.000 \cdot 1{,}1^{-3} = 29.842{,}22$ GE.

$$C_K = -p + \sum_{t=1}^{n} g_{Kt} \cdot (1+i)^{-t} = -p + E_K \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \leq E_K.$$

$C_K = -p + 29.842{,}22 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \leq 29.842{,}22$ GE.

Die Welt AG darf also zu t = 0 maximal p* = 29.842,22 GE für die Lästig GmbH zahlen, damit der Kauf nicht ökonomisch nachteilig wird.

Zeitpunkt t	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
g_{Kt}		12.000	12.000	12.000
p*	**–29.842,22**			
Kredit	29.842,22			
Tilgung		–9.015,78	–9.917,36	–10.909,09
Anlage				
Zinsen 10%		–2.984,22	–2.082,64	–1.090.90
Schuld	29.842,22	20.826,45	10.909,09	
Guthaben				**0**

Lösung zu Aufgabe 5 b)

$$p_{K1}^* := E_K \cdot (1 + i_1) = \sum_{t=1}^{n} g_{Kt} \cdot (1+i)^{-t} \cdot (1 + i_1).$$

$$E_K = 15.000 \cdot 1{,}1^{-1} + 25.000 \cdot 1{,}1^{-2} + 20.000 \cdot 1{,}1^{-3} = 49.323{,}82 \text{ GE}.$$

$$p_{K1}^* = E_K \cdot (1 + i_1) = 49.323{,}82 \cdot 1{,}1 = 54.256{,}20 \text{ GE}.$$

Die Welt AG darf also zum Zeitpunkt t = 1 maximal eine Einmalzahlung in Höhe von 54.256,20 GE für die Lästig GmbH entrichten, damit der Kauf nicht ökonomisch nachteilig wird.

Zeitpunkt t	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
g_{Kt}		15.000	25.000	20.000
p_{K1}^*		**–54.256,20**		
Kredit		39.256,20		
Tilgung			–21.074,38	–18.181,81
Anlage				
Zinsen 10%			–3.925,62	–1.818,18
Schuld	0	39.256,20	18.181,81	
Guthaben				**0**

Aufgabe 6: Nullkuponanleihen

Beim *durchschnittlichen Wertzuwachs* handelt sich lediglich um eine Durchschnittsgröße, die Auskunft darüber erteilt, um wieviel Prozent, bezogen auf die ursprünglich eingesetzten Mittel, der Kapitalbetrag des Investors pro Jahr im Durchschnitt steigt:

$$\text{durchschnittlicher Wertzuwachs} = \frac{\text{durchschnittlicher Ertrag pro Jahr}}{\text{Kapitaleinsatz}} \cdot 100\%$$

$$= \frac{(100-40)/10}{40} \cdot 100\% = 15\%.$$

Da bei der Bestimmung des durchschnittlichen Wertzuwachses der ursprüngliche Kapitaleinsatz die Bezugsbasis der Rechnung bildet, wird implizit unterstellt, daß sich der zu Laufzeitbeginn eingezahlte und zu verzinsende Kapitalbetrag bis zum Fälligkeitstermin der Nullkuponanleihe nicht ändert, was eine jährlich wiederkehrende Auszahlung der Zinsen erfordert, die jedoch bei der Nullkuponanleihe gerade nicht erfolgt.

Die den Anleihekäufer eigentlich interessierende *Emissionsrendite* r (Effektivverzinsung, interner Zinsfuß zum Zeitpunkt der Emission) ergibt sich wie folgt:

$$C = -40 + \frac{100}{(1+r)^{10}} = 0 \;\Leftrightarrow\; (1+r)^{10} = \frac{100}{40} \;\Leftrightarrow\; r = \sqrt[10]{\frac{100}{40}} - 1 = 0{,}095958226 \approx 9{,}6\%.$$

Aufgabe 7: Langfristiger Bankkredit

Die *Ratentilgung* zeichnet sich durch eine Rückführung des Kredits mit meist über die Kreditlaufzeit gleichbleibenden Tilgungszahlungen aus, wobei die sich aus Tilgungsrate und Zinsanteil zusammensetzende Gesamtzahlung wegen der mit abnehmender Restschuld sinkenden Zinsbelastung im Zeitablauf abnimmt.

Sind hingegen über die Kreditlaufzeit gleichbleibende Gesamtzahlungen (Zins und Tilgung) an den Gläubiger zu leisten, so ist eine *Annuitätentilgung* vereinbart. Da auch in diesem Fall die Tilgungszahlungen die Restschuld mindern, sinkt im Zeitablauf der Zinsanteil der Annuität, während der Tilgungsanteil steigt.

Die bei der *Ratentilgung* jährlich zu leistende Tilgungszahlung beträgt:

50.000/5 = 10.000 €.

Als jährlich anfallende *Annuität* ergibt sich:

$50.000 \cdot [(1 + 0{,}1)^5 \cdot 0{,}1/((1 + 0{,}1)^5 - 1)] = 13.189{,}87404$ €.

t	Ratentilgung				Annuitätentilgung			
	Zins-zahlung	Tilgungs-zahlung	Gesamt-zahlung	Rest-schuld	Zins-zahlung	Tilgungs-zahlung	Annui-tät	Rest-schuld
0	–	–	–	50.000	–	–	–	50.000
1	5.000	10.000	15.000	40.000	5.000	8.189,87	13.189,87	41.810,13
2	4.000	10.000	14.000	30.000	4.181,01	9.008,86	13.189,87	32.801,26
3	3.000	10.000	13.000	20.000	3.280,13	9.909,75	13.189,87	22.891,52
4	2.000	10.000	12.000	10.000	2.289,15	10.900,72	13.189,87	11.990,79
5	1.000	10.000	11.000	0	1.199,08	11.990,79	13.189,87	0

Literaturhinweise

- *HERING, TH., TOLL, CH.*: BWL-Klausuren, 5. Aufl., Berlin/Boston 2022.
- *HERING, TH., TOLL, CH.*: BWL kompakt, 2. Aufl., Berlin/Boston 2025.
- *WÖHE, G., DÖRING, U., BRÖSEL, G.*: Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, 28. Aufl., München 2023.