LÖSUNGSHINWEISE ZUR ÜBUNG 1 ZUM MODUL 32581

– INVESTITIONSTHEORIE UND UNTERNEHMENSBEWERTUNG –

Teil: Unternehmensbewertung

Aufgabe 1 (Grenzpreisermittlung beim Unternehmensverkauf):

Lösung zu Aufgabe 1 a)

Vermögenszielfunktion:

$$\text{max. GW; } \text{GW} := \sum_{t=0}^{n} w_t \cdot G_t$$

Restriktionen:

Liquiditätsnebenbedingungen (Summe aller Einzahlungsüberschüsse ≥ Entnahme):

$$-\sum_{j=1}^{m} g_{jt} \cdot x_j + G_t \leq b_t \qquad \forall\, t \in \{0, 1, 2, ..., n\}$$

Objektobergrenzenrestriktionen (nur für die x_j mit $x_j^{max} < \infty$):

$$x_j \leq x_j^{max} \qquad \forall\, j \in \{1, 2, ..., m\}$$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$$x_j \geq 0 \qquad \forall\, j \in \{1, 2, ..., m\}$$

$$G_t \geq 0 \qquad \forall\, t \in \{0, 1, 2, ..., n\}$$

Mit:

b_t	fest vorgegebene Zahlung zum Zeitpunkt t
GW	Summe der gewichteten Entnahmen bei Vermögensmaximierung
G_t	Entnahme im Zeitpunkt t bei Vermögensmaximierung
g_{jt}	Zahlungsüberschuß des Objekts j zum Zeitpunkt t
j	Objekt
m	Anzahl der Objekte j
n	Länge des Planungszeitraums (Anzahl der Perioden)
t	Zeitpunkt, Zeitindex
w_t	Gewicht einer Entnahme zum Zeitpunkt t
x_j	Anzahl der Realisationen des Objekts j
x_j^{max}	maximal mögliche Anzahl der Realisationen des Objekts j

Lösung zu Aufgabe 1 b)

max. GW; GW := $3\,G_0 + 2{,}7\,G_1 + 2{,}6\,G_2 + 2{,}5\,G_3 + 1{,}5\,G_4 + 1\,G_5$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
150\,x_I & -\;60\,x_{AZ} & & -\;x_{S0} & & +\;x_{H0} & +\;G_0 & \leq & 0 \\
-30\,x_I & +\;0\,x_{AZ} & +\;1{,}1\,x_{S0} & -\;x_{S1} & -\;1{,}05\,x_{H0} & +\;x_{H1} & +\;G_1 & \leq & 120 \\
-30\,x_I & +\;0\,x_{AZ} & +\;1{,}1\,x_{S1} & -\;x_{S2} & -\;1{,}05\,x_{H1} & +\;x_{H2} & +\;G_2 & \leq & 125 \\
-30\,x_I & +\;0\,x_{AZ} & +\;1{,}1\,x_{S2} & -\;x_{S3} & -\;1{,}05\,x_{H2} & +\;x_{H3} & +\;G_3 & \leq & 130 \\
-30\,x_I & +\;0\,x_{AZ} & +\;1{,}1\,x_{S3} & -\;x_{S4} & -\;1{,}05\,x_{H3} & +\;x_{H4} & +\;G_4 & \leq & 120 \\
-230\,x_I & +\;88{,}16\,x_{AZ} & +\;1{,}1\,x_{S4} & & -\;1{,}05\,x_{H4} & & +\;G_5 & \leq & 2.210 \\
x_I & & & & & & & \leq & 1 \\
& x_{AZ} & & & & & & \leq & 1 \\
& & x_{S0} & & & & & \leq & 100 \\
& & & x_{S1} & & & & \leq & 100 \\
& & & x_{S2} & & & & \leq & 100 \\
& & & x_{S3} & & & & \leq & 100 \\
& & & & x_{S4} & & & \leq & 100 \\
& & & & & & x_I, x_{AZ}, x_{Ht}, x_{St}, G_t & \geq & 0 \quad \forall\, t
\end{array}
$$

Lösung zu Aufgabe 1 c)

Zeitpunkt	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5
Entnahme G_t				–478,9775	–140	–2.241,8403
b_t		120	125	130	120	2.210
I	–150	30	30	30	30	230
AZ	60	0	0	0	0	–88,1597
Kreditaufnahme	90			100	100	
Geldanlage		–51	–208,55			
Rückzahlung		–99	53,55	218,9775	–110	–110
Kontostand	–90	51	208,55	–100	–100	0

Vollständiger Finanzplan des Basisprogramms

Lösung zu Aufgabe 1 d)

Der VOFI des Basisprogramms läßt als Grenzobjekte des Basisprogramms unmittelbar lediglich die einperiodige Kreditaufnahme zu t = 0 sowie die im zweiten und dritten Jahr stattfindenden einperiodigen Geldanlagen erkennen, weshalb deren endogene Grenzzinsfüße $i_1 = 10\%$ und $i_2 = i_3 = 5\%$ lauten. Die Höhe der endogenen Grenzzinsfüße i_4 und i_5 ist demnach noch zu ermitteln.

Da zu t = 3 und t = 4 kein Grenzobjekt im Sinne eines nur anteilig realisierten Objekts startet, können i_4 und i_5 nur über die sich gemäß der GW-Vermögenszielfunktion

$$GW = \sum_{t=0}^{n} w_t \cdot G_t = 3\ G_0 + 2{,}7\ G_1 + 2{,}6\ G_2 + 2{,}5\ G_3 + 1{,}5\ G_4 + 1\ G_5$$

ergebende Entnahmestruktur ermittelt werden. Da sowohl zu t = 3, t = 4 und t = 5 Entnahmen getätigt werden, setzt die Zielfunktion bspw. eine Entnahme zu t = 3 in Höhe von $w_3 \cdot 1$ mit einer Entnahme zu t = 4 in Höhe von $(1 + i_4) \cdot w_4$ und eine Entnahme zu t = 4 in Höhe von $w_4 \cdot 1$ mit einer Entnahme zu t = 5 in Höhe von $(1 + i_5) \cdot w_5$ gleich. Bezogen auf die Findung von i_4 und i_5 bedeutet dies:

$$w_3 \cdot 1 = (1 + i_4) \cdot w_4 \quad \Leftrightarrow \quad i_4 = \frac{w_3}{w_4} - 1 = \frac{2{,}5}{1{,}5} - 1 = {}^{2}\!/_{3} = 0{,}\overline{6} \approx 66{,}6667\%,$$

$$w_4 \cdot 1 = (1 + i_5) \cdot w_5 \quad \Leftrightarrow \quad i_5 = \frac{w_4}{w_5} - 1 = \frac{1{,}5}{1} - 1 = 0{,}5 = 50\%.$$

Die periodenspezifischen *endogenen Grenzzinsfüße des Basisprogramms* lauten mithin: $i_1 = 10\%$, $i_2 = i_3 = 5\%$, $i_4 = 66{,}6667\%$ und $i_5 = 50\%$.

Bestätigung von GW* mit Hilfe der *Endwertmethode*:

$$EW = \left(\sum_{t=0}^{n} b_t \cdot \rho_t + \sum_{C_j > 0} x_j^{max} \cdot C_j \right) \cdot \prod_{t=1}^{n} (1 + i_t).$$

Die Formelterme betragen:

$$\sum_{t=0}^{n} b_t \cdot \rho_t = \frac{120}{1{,}1} + \frac{125}{1{,}1 \cdot 1{,}05} + \frac{130}{1{,}1 \cdot 1{,}05^2} + \frac{120}{1{,}1 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67} + \frac{2.210}{1{,}1 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67 \cdot 1{,}5}$$

$$= 1.112{,}80148423 \approx 1.112{,}8015.$$

$$C_I = -150 + \frac{30}{1{,}1} + \frac{30}{1{,}1 \cdot 1{,}05} + \frac{30}{1{,}1 \cdot 1{,}05^2} + \frac{30}{1{,}1 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67} + \frac{230}{1{,}1 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67 \cdot 1{,}5}$$

$$= 18{,}68686869 \approx 18{,}6869.$$

$$C_{AZ} = 60 - \frac{88{,}1597}{1{,}1 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67 \cdot 1{,}5} = 30{,}92238809 \approx 30{,}9224.$$

$$C_{S3} = \frac{100}{1{,}1 \cdot 1{,}05^2} - \frac{110}{1{,}1 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67} = 28{,}03545661 \approx 28{,}0355.$$

$$C_{S4} = \frac{100}{1{,}1 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67} - \frac{110}{1{,}1 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67 \cdot 1{,}5} = 13{,}19315605 \approx 13{,}1932.$$

$$\prod_{t=1}^{n} (1 + i_t) = 1{,}1 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67 \cdot 1{,}5 = 3{,}03187500 \approx 3{,}0319.$$

Nach diesen Vorüberlegungen resultiert für den Endwert EW:

$$EW = (1.112{,}8015 + 18{,}6869 + 30{,}9224 + 28{,}0355 + 13{,}1932) \cdot 3{,}0319$$
$$= 1.203{,}6394 \cdot 3{,}0319 = 3.649{,}28406539 \approx 3.649{,}2841.$$

Damit liefert die GW-Vermögenszielfunktion:

$$GW^* = 1 \cdot 3.649{,}2841 = 3.649{,}2841.$$

Lösung zu Aufgabe 1 e)

Zielfunktion (Ermittlung des minimal zu fordernden Preises):

$$\text{min. } U;\ \ U := p$$
$$\Leftrightarrow\ \text{max. } -U;\ \ -U = -p$$

Restriktionen:

Liquiditätsnebenbedingungen (Summe aller Einzahlungsüberschüsse ≥ Entnahme):

$$-\sum_{j=1}^{m} g_{j0} \cdot x_j + G_0 - p \ \le\ b_0$$

$$-\sum_{j=1}^{m} g_{jt} \cdot x_j + G_t \ \le\ b_t - g_{Vt} \qquad \forall\, t \in \{1, 2, ..., n\}$$

Einhaltung des Zielfunktionswerts des Basisprogramms:

$$-\sum_{t=0}^{n} w_t \cdot G_t \ \le\ -GW^*$$

Objektobergrenzenrestriktionen (nur für die x_j mit $x_j^{max} < \infty$):

$$x_j \ \le\ x_j^{max} \qquad \forall\, j \in \{1, 2, ..., m\}$$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$$x_j \ \ge\ 0 \qquad \forall\, j \in \{1, 2, ..., m\}$$
$$G_t \ \ge\ 0 \qquad \forall\, t \in \{0, 1, 2, ..., n\}$$
$$p \ \ge\ 0$$

Mit:

b_t	fest vorgegebene Zahlung zum Zeitpunkt t
GW	Summe der gewichteten Entnahmen bei Vermögensmaximierung
GW*	maximaler Zielfunktionswert bei Vermögensmaximierung, d.h. maximaler Konsumnutzen des Basisprogramms
G_t	Entnahme im Zeitpunkt t bei Vermögensmaximierung

g_{jt}	Zahlungsüberschuß des Objekts j zum Zeitpunkt t
j	Objekt
m	Anzahl der Objekte j
n	Länge des Planungszeitraums (Anzahl der Perioden)
p	Preis des Bewertungsobjekts/Unternehmens
t	Zeitpunkt, Zeitindex
U	Preis des zu bewertenden Unternehmens
w_t	Gewicht einer Entnahme zum Zeitpunkt t
x_j	Anzahl der Realisationen des Objekts j
x_j^{max}	maximal mögliche Anzahl der Realisationen des Objekts j

Lösung zu Aufgabe 1 f)

min. U; U := p

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
150\,x_I & -\;60\,x_{AZ} & & -\;x_{S0} & & +\;x_{H0} & +\;G_0 & -\;p & \leq\; 0 \\
-30\,x_I & +\;0\,x_{AZ} & +\;1{,}1\,x_{S0} & -\;x_{S1} & -\;1{,}05\,x_{H0} & +\;x_{H1} & +\;G_1 & & \leq\; 100 \\
-30\,x_I & +\;0\,x_{AZ} & +\;1{,}1\,x_{S1} & -\;x_{S2} & -\;1{,}05\,x_{H1} & +\;x_{H2} & +\;G_2 & & \leq\; 100 \\
-30\,x_I & +\;0\,x_{AZ} & +\;1{,}1\,x_{S2} & -\;x_{S3} & -\;1{,}05\,x_{H2} & +\;x_{H3} & +\;G_3 & & \leq\; 100 \\
-30\,x_I & +\;0\,x_{AZ} & +\;1{,}1\,x_{S3} & -\;x_{S4} & -\;1{,}05\,x_{H3} & +\;x_{H4} & +\;G_4 & & \leq\; 100 \\
-230\,x_I & +\;88{,}16\,x_{AZ} & +\;1{,}1\,x_{S4} & & -\;1{,}05\,x_{H4} & & +\;G_5 & & \leq\; 2.100
\end{array}
$$

$$-3\,G_0 - 2{,}7\,G_1 - 2{,}6\,G_2 - 2{,}5\,G_3 - 1{,}5\,G_4 - 1\,G_5 \leq -3.649{,}28$$

$$
\begin{aligned}
x_I &\leq 1 \\
x_{AZ} &\leq 1 \\
x_{S0} &\leq 100 \\
x_{S1} &\leq 100 \\
x_{S2} &\leq 100 \\
x_{S3} &\leq 100 \\
x_{S4} &\leq 100 \\
x_I, x_{AZ}, x_{Ht}, x_{St}, G_t, p &\geq 0 \qquad \forall\, t
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 1 g)

Zeitpunkt	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5
Entnahme G_t	–20,9604			–509,8250	–120	–2.131,8403
$b_t - g_{Vt}$		100	100	100	100	2.100
p*	110,9604					
I	–150	30	30	30	30	230
AZ	60	0	0	0	0	–88,1597
Kreditaufnahme				100	100	
Geldanlage		–130	–266,50			
Rückzahlung			136,50	279,8250	–110	–110
Kontostand	0	130	266,50	–100	–100	0

Vollständiger Finanzplan des Bewertungsprogramms

Lösung zu Aufgabe 1 h)

Ein Vergleich mit dem VOFI des Basisprogramms macht deutlich, daß der Verkauf der AUTO GmbH strukturelle Veränderungen auslöst, womit eine Änderung der endogenen Grenzzinsfüße einhergeht. Demzufolge sind nur die endogenen Grenzzinsfüße $i_2 = i_3 = 5\%$, $i_4 = 66{,}6667\%$ und $i_5 = 50\%$ beiden Programmen gemein, nicht aber der endogene Grenzzinsfuß i_1.

Der endogene Grenzzinsfuß i_1 des Bewertungsprogramms läßt sich wie folgt ermitteln:

$$w_0 \cdot 1 = (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3) \cdot w_3$$

$$\Leftrightarrow \quad i_1 = \frac{w_0}{(1+i_2)\cdot(1+i_3)\cdot w_3} - 1 = 0{,}088435374 \approx 8{,}8435\%.$$

Die periodenspezifischen *endogenen Grenzzinsfüße des Bewertungsprogramms* lauten mithin: $i_1 = 8{,}8435\%$, $i_2 = i_3 = 5\%$, $i_4 = 66{,}6667\%$ und $i_5 = 50\%$.

Damit ergeben sich jeweils andere Kapitalwerte und andere Vorteilhaftigkeitsentscheidungen, weshalb die partialanalytische Ermittlung des zu t = 0 für den Verkauf der AUTO GmbH mindestens zu fordernden Preises die Anwendung der „*komplexen Bewertungsformel*“ bedingt.

$$p^* = \sum_{t=0}^{n} g_{Vt} \cdot \rho_t + \sum_{G_t>0} G_t \cdot \rho_t - \sum_{t=0}^{n} b_t \cdot \rho_t - \sum_{C_j>0} x_j^{max} \cdot C_j$$

Die Formelterme betragen:

$$\sum_{t=0}^{n} g_{Vt} \cdot \rho_t = \frac{20}{1{,}09} + \frac{25}{1{,}09 \cdot 1{,}05} + \frac{30}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2} + \frac{20}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67} + \frac{110}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67 \cdot 1{,}5}$$

$$= 111{,}91666667 \approx 111{,}9167.$$

$$\sum_{G_t>0} G_t \cdot \rho_t = 20{,}9604 + \frac{509{,}8250}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2} + \frac{120}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67} + \frac{2.131{,}8403}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67 \cdot 1{,}5}$$

$$= 1.216{,}42802180 \approx 1.216{,}4280.$$

$$\sum_{t=0}^{n} b_t \cdot \rho_t = \frac{120}{1{,}09} + \frac{125}{1{,}09 \cdot 1{,}05} + \frac{130}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2} + \frac{120}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67} + \frac{2.210}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67 \cdot 1{,}5}$$

$$= 1.124{,}6250.$$

$$C_I = -150 + \frac{30}{1{,}09} + \frac{30}{1{,}09 \cdot 1{,}05} + \frac{30}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2} + \frac{30}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67} + \frac{230}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67 \cdot 1{,}5}$$

$$= 20{,}47916667 \approx 20{,}4792.$$

$$C_{AZ} = 60 - \frac{88{,}1597}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67 \cdot 1{,}5} = 30{,}61343846 \approx 30{,}6134.$$

$$C_{S3} = \frac{100}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2} - \frac{110}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67} = 28{,}33333333 \approx 28{,}3333.$$

$$C_{S4} = \frac{100}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67} - \frac{110}{1{,}09 \cdot 1{,}05^2 \cdot 1{,}67 \cdot 1{,}5} = 13{,}33333333 \approx 13{,}3333.$$

$$\sum_{C_j > 0} x_j^{max} \cdot C_j = 20{,}4792 + 30{,}6134 + 28{,}3333 + 13{,}3333 = 92{,}75927180 \approx 92{,}7593.$$

Nach diesen Vorüberlegungen resultiert:

$$p^* = 111{,}9167 + 1.216{,}4280 - 1.124{,}6250 - 92{,}7593 = 110{,}9604.$$

Lösung zu Aufgabe 1 i)

Mittels eines Partialmodells (z.B. Ertragswertmethode) ist es bei Kenntnis der modellendogenen Grenzzinsfüße möglich, einzelne Objekte isoliert zu bewerten und dabei gleichzeitig die im Entscheidungsfeld wirkenden Interdependenzen korrekt zu berücksichtigen. In unüberschaubaren Situationen scheitert dies jedoch an der Unkenntnis dieser endogenen Steuerungszinsfüße, weshalb die Ermittlung dieser äquivalent mit der Lösung eines unternehmensweiten Totalmodells wäre. Das Partialmodell benötigt also Informationen, die nur aus dem gerade zu vermeidenden Totalmodell erhältlich sind. In diesem Fall ist die vollständige Lösung schon durch das Totalmodell erbracht, weshalb eine zusätzliche partialanalytische Lösung obsolet ist.

Literaturhinweise:

- *Hering, Th.*: Unternehmensbewertung, 4. Aufl., Berlin/Boston 2021.
- *Matschke, M.J., Brösel, G., Toll, Ch.*: Unternehmensbewertung, 5. Aufl., Wiesbaden 2024.
- *Toll, Ch.*: Investitionstheoretische Unternehmensbewertung bei Vorliegen verhandelbarer Zahlungsmodalitäten, Wiesbaden 2011.