Prof. Dr. Luise Unger

Kurs 01143

Lineare Algebra

LESEPROBE

Fakultät für
Mathematik und Informatik

FernUniversität in Hagen

Inhaltsverzeichnis

Studierhinweise

Nachdem in den ersten beiden Kurseinheiten die Grundlagen gelegt wurden, wenden wir uns jetzt einem ziemlich anspruchsvollem Problem zu, dem so genannten Normalformenproblem quadratischer Matzrizen beziehungsweise Endomorphismen. Dieses Problem wird uns gleich zwei Kurseinheiten lang beschäftigen, und wir werden es auch nicht abschließend lösen können. Worum es bei dem Normalformenproblem geht, und warum es so interessant ist, wird in Abschnitt 3.1 erklärt; daher beschränke ich mich bei der Erklärung und einem Ausblick über die folgenden beiden Kurseinheiten auf das Notwendigste.

In Kurseinheit 1 haben wir im Zusammenhang mit Äquivalenzrelationen auch über die Ähnlichkeit quadratischer Matrizen gesprochen. Dabei sind zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ so gibt, dass $A = S^{-1}BS$ ist. Äquivalenzrelationen zerlegen eine Menge in zueinander disjunkte Teilmengen (die Äquivalenzklassen), also zerfällt $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ in Äquivalenzklassen bezüglich Ähnlichkeit. Diese Äquivalenzklassen werden **Konjugationsklassen** genannt, und jede Konjugationsklasse C enthält alle Matrizen, die zu einer beliebigen Matrix in C ähnlich sind.

Das Normalformenproblem adressiert die Frage, ob es in jeder Konjugationsklasse eine ganz besonders schöne, einfache Matrix gibt. Diese könnten wir quasi als Namensschild an jede Konjugationsklasse heften und sagen, dass hier alle Matrizen drin liegen, die zu der schönen Matrix ähnlich sind.

Ich hatte bereits angedeutet, dass wir das Normalformenproblem nicht umfassend lösen können. Der Grund dafür ist, dass man so eine schöne Matrix in einer Konjugationsklasse, die eine Matrix A enthält, nur dann finden kann, wenn das charakteristische Polynom zu A in Linearfaktoren zerfällt. Beispielsweise ist dies für die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ nicht der Fall, denn $\chi_A = T^2 + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{R}[T]$. Aber wir haben ja den Hauptsatz der Algebra zur Hand, der besagt, dass über $\mathbb{C}$ jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Für Matrizen über $\mathbb{C}$ können wir mithin das Normalformenproblem umfassend lösen, und ich möchte das

Hauptergebnis aus Kurseinheit 4 an dieser Stelle schon einmal etwas vereinfacht vorstellen:

Satz: (Jordan'sche Normalform für Matrizen über $\mathbb{C}$)

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{C})$. Dann ist A ähnlich zu einer Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J(\lambda_r)} \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $J(\lambda_1), \ldots, J(\lambda_r)$ quadratische Matrizen (nicht notwendigerweise derselben Größe) der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & * & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & * & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

und die Sternchen sind 0 oder 1. Ferner gilt $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $1 \leq i, j \leq r$ und $i \neq j$. Die Nullen rechts oben und links unten in der Matrix sollen andeuten, dass alle weiteren Einträge 0 sind.

Eine Matrix der Form $J = \begin{pmatrix} \boxed{J(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J(\lambda_r)} \end{pmatrix}$ wie oben nennt man eine Jordan'sche Normalform, und die Jordan'schen Normalformen sind eben diejenigen Matrizen, die ich oben „schön" genannt hatte. Eine Konjugationsklasse kann durchaus mehrere Matrizen in Jordan'scher Normalform enthalten, aber wir werden ebenfalls in Kurseinheit 4 zeigen, dass dies nur dann möglich ist, wenn sich diese Matrizen nur durch die Anordnung der Blöcke $J(\lambda_1), \ldots, J(\lambda_r)$ auf der Diagonalen unterscheiden.

So weit die Hauptergebnisse aus Kurseinheit 4, kommen wir nun zu den Inhalten dieser Kurseinheit.

In Kurseinheit 3 betrachten wir zwei wichtige Spezialfälle von Jordan'schen Normalformen. Stellen wir uns zunächst einmal vor, A wäre ähnlich zu einer Jordan'schen Normalform J, bei der die Sternchen neben der Diagonalen alle 0 sind.

Dann ist J eine Diagonalmatrix. Und in der Tat nennen wir eine quadratische Matrix A diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist. Unser Hauptergebnis ist das so genannte Allgemeine Diagonalisierbarkeitskriterium in Abschnitt 3.2.4, welches besagt, unter welchen Voraussetzungen eine quadratische Matrix A diagonalisierbar ist. Auf dem Weg dahin müssen wir uns mit so genannten Eigenvektoren und Eigenwerten quadratischer Matrizen beschäftigen. Ein Eigenvektor einer quadratischen Matrix A ist ein Vektor $v \neq 0$, für den $Av = \lambda v$ für einen Skalar λ gilt. Anschaulich gesprochen ändert ein Eigenvektor v bei Multiplikation mit A seine „Richtung“ nicht, sondern wird nur durch den Faktor λ gestaucht oder gestreckt. Der Skalar λ wird dann ein Eigenwert von A genannt. Quadratische Matrizen müssen keine Eigenvektoren besitzen. Wenn die Multiplikation mit A beispielsweise eine Drehung um 90° um den Koordinatenursprung der reellen Ebene beschreibt, dann ändert jeder Vektor $\neq 0$ seine Richtung, es kann also keine Eigenvektoren geben. Es wird sich herausstellen, dass die Eigenwerte einer Matrix gerade die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms sind. Eine $n \times n$-Matrix A kann also nur n Eigenwerte haben, denn χ_A hat ja den Grad n. Eigenwerte einer Matrix ändern sich nicht unter Ähnlichkeit (das heißt, wenn A und B ähnlich sind, dann haben sie dieselben Eigenwerte), und die Eigenwerte einer Matrix in Jordan'scher Normalform J wie oben (und damit aller Matrizen in der Konjugationsklasse, die J enthält) sind gerade die Diagonalelemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

Der zweite Spezialfall, den wir in dieser Kurseinheit betrachten werden, ist der, wo alle Diagonalelemente einer Matrix in Jordan'scher Normalform 0 sind. Die einzigen Einträge $\neq 0$ liegen also direkt oberhalb der Diagonalen, und sie sind 1. Eine solche Matrix N hat die Eigenschaft, dass eine Potenz N^m, $m \in \mathbb{N}$, die Nullmatrix ist. Wir beginnen wieder allgemeiner und nehmen diese Beobachtung als definierende Eigenschaft: Wir nennen eine quadratische Matrix A **nilpotent**, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $A^m = 0$ ist. Wir werden als Hauptergebnis in Abschnitt 3.3.5 zeigen, dass jede nilpotente Matrix A ähnlich zu einer Matrix in Jordan'scher Normalform ist, deren Diagonalelemente 0 sind.

Die Spezialfälle der Jordan'schen Normalform, die wir in dieser Kurseinheit untersuchen, sind nicht als didaktische Anmoderation des allgemeinen Normalformenproblems zu verstehen. Ganz im Gegenteil: Sie (insbesondere der Abschnitt über nilpotente Matrizen) stellen wichtige Grundpfeiler des Beweises vom Hauptergebnis in Kurseinheit 4 dar.

Kapitel 3

Das Normalformenproblem I

3.1 Einführung in die Problemstellung

In Kapitel 1.1 haben wir Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen kennen gelernt. Ein wichtiges Beispiel, das wir auch in den Mathematischen Grundlagen ausführlich besprochen haben, ist die Zeilenäquivalenz. Zur Erinnerung: Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ haben wir zeilenäquivalent genannt, wenn sich die eine durch elementare Zeilenumformungen in die andere überführen lässt. Zeilenäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, das heißt, Zeilenäquivalenz liefert eine Klasseneinteilung auf $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Wir können nun folgende Fragen stellen:

3.1.1 Frage: (Normalformenproblem für Zeilenäquivalenz)

1. Wie können wir entscheiden, ob zwei Matrizen A und B in $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ zeilenäquivalent sind?

2. Gibt es in jeder Äquivalenzklasse bezüglich Zeilenäquivalenz eine besonders schöne, einfache Matrix?

Das Normalformenproblem für Zeilenäquivalenz können wir mit dem, was wir in den Mathematischen Grundlagen bewiesen haben, umfassend lösen.

1. Zwei Matrizen A und B in $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ sind genau dann zeilenäquivalent, wenn sie dieselbe Treppennormalform haben.

2. In jeder Äquivalenzklasse bezüglich Zeilenäquivalenz liegt genau eine Matrix, die eine Treppennormalform ist.

In Kapitel 1.1 sind wir in den Aufgaben auf eine weitere Äquivalenzrelation gestoßen. Sei nämlich $n \in \mathbb{N}$, und seien $A, B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. In Definition 2.4.22 haben wir A und B ähnlich genannt, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ so gibt, dass $B = S^{-1}AS$ ist. In Aufgabe 1.1.4 haben Sie gezeigt, dass Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ definiert. Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation sind so wichtig, dass sie eine eigene Bezeichnung erhalten.

3.1.2 Definition: Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation auf $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$, die durch Ähnlichkeit definiert wird, werden **Konjugationsklassen** genannt.

Wir können jetzt dieselben Fragen wie in 3.1.1 stellen.

3.1.3 Frage: (Normalformenproblem für Ähnlichkeit)

1. Wie können wir entscheiden, ob zwei Matrizen A und B in $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ ähnlich sind?
2. Gibt es in jeder Konjugationsklasse eine besonders schöne, einfache Matrix?

Sollte die Antwort auf die zweite Frage des Normalformenproblems für Ähnlichkeit positiv sein, so würden wir diese besonders schöne, einfache Matrix eine **Normalform** nennen.

Das Normalformenproblem für Ähnlichkeit ist deutlich schwieriger als das analoge Problem für Zeilenäquivalenz, und wir werden eine umfassende Lösung des Problems schuldig bleiben. Allerdings werden wir in einem wichtigen Spezialfall eine vollständige Antwort geben, und zwar in dem Fall, dass der Körper $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist.

Vielleicht fragen Sie sich, was so besonders an der Äquivalenzrelation „Ähnlichkeit“ auf $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ ist. Der Grund liegt in dem Zusammenspiel zwischen linearen Abbildungen und Matrizen. Wir beginnen mit einer Definition.

3.1.4 Definition: Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ wird eine **Matrixdarstellung** von f (bezüglich $\mathcal{B}$) genannt.

In den Mathematischen Grundlagen haben wir ebenfalls Matrixdarstellungen betrachtet. Diese waren von der Form ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$, wobei $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$ möglicherweise verschiedene Basen waren. Bei Matrixdarstellungen im Sinne von Definition 3.1.4 haben wir nur eine Basis zur Verfügung.

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus.

Wenn wir in V eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ auszeichnen, so können wir f die Matrixdarstellung $A = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ zuordnen. Sei C_A die Konjugationsklasse, die A enthält. Wenn $\mathcal{B}'$ eine andere Basis von V ist, dann haben wir in 2.4.23 gesehen, dass $A' = {}_{\mathcal{B}'}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(f) = S^{-1}AS$ ist. Dabei ist $S = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$, und es ist $S^{-1} = {}_{\mathcal{B}'}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$. Die Matrizen A und A', beide Matrixdarstellungen von f, sind also ähnlich, und es folgt $A' \in C_A$. Die Konjugationsklasse C_A enthält also alle Matrixdarstellungen von f.

Kann C_A mehr enthalten? Genauer, kann es ein $B \in C_A$ geben, sodass B nicht von der Form ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f)$ für eine Basis $\mathcal{C}$ von V ist? Die Antwort ist „nein“, wie wir jetzt zeigen werden.

Sei nämlich $B \in C_A$. Dann gibt es eine invertierbare Matrix

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K}) \text{ mit } B = T^{-1}AT.$$

Für alle $1 \leq j \leq n$ sei $w_j = \sum\limits_{i=1}^{n} t_{ij}v_i$. Sei $f_T : V \to V$ die lineare Abbildung, die jedes Basiselement v_j aus $\mathcal{B}$ auf w_j abbildet. Dann ist $T = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_T)$. Da T invertierbar ist, ist f_T invertierbar, und es folgt, dass $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von V ist. Die Matrix T lässt sich auch anders interpretieren. Es ist nämlich $T = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$. Dann ist $T^{-1} = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$, und es folgt

$$B = T^{-1}AT = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)\,{}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)\,{}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V \circ f \circ \mathrm{id}_V) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f).$$

Somit ist jedes $B \in C_A$ eine Matrixdarstellung von f. Unsere Überlegungen zeigen:

3.1.5 Satz: (Interpretation von Konjugationsklassen)

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum der Dimension n über $\mathbb{K}$, und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Sei A eine Matrixdarstellung von f, und sei C_A die Konjugationsklasse, die A enthält.

Dann ist $C_A = \{M \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K}) \mid M \text{ ist Matrixdarstellung von } f\}$. □

Wenn wir in dem Vektorraum V keine Basis besonders auszeichnen, dann entspricht einem Endomorphismus f von V zwar keine Matrix mehr, aber eine eindeutig bestimmte Konjugationsklasse, nämlich jene, die eine (und damit jede) Matrixdarstellung von f enthält. Wenn wir das Normalformenproblem gelöst haben, also in jeder Konjugationsklasse eine Normalform identifizieren können, dann erhalten wir dadurch, dass wir einem Endomorphismus f die Normalform in der zu f

gehörenden Konjugationsklasse zuordnen, eine Klassifikation aller Endomorphismen auf V.

Im Zentrum der Linearen Algebra stehen endlich erzeugte Vektorräume und lineare Abbildungen. Dass in diesem Umfeld die Frage, ob man alle Endomorphismen eines endlich erzeugten Vektorraums klassifizieren kann, ebenfalls zentral ist, sollte einleuchtend sein. Diese Frage – in Matrizen-Sprache übersetzt – ist aber gerade das Normalformenproblem.

Wir wissen bereits, dass ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom und dasselbe Minimalpolynom haben. Dies erlaubte uns, das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom eines Endomorphismus zu definieren. Ähnliche Matrizen haben auch dieselbe Determinante, wie aus dem Determinantenmultiplikationssatz folgt.

3.1.6 Bemerkung: Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante.

Beweis: Sei $B = S^{-1}AS$ für eine invertierbare Matrix S. Dann gilt

$$\det(B) = \det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \det(S)^{-1}\det(A)\det(S) = \det(A).$$

□

Diese Bemerkung erlaubt uns, die Determinante eines Endomorphismus zu definieren.

3.1.7 Definition: Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, und sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Wir definieren die **Determinante von** f durch $\det(f) = \det({}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f))$.

3.1.8 Aufgabe: Beweisen Sie: Wenn A und B ähnlich sind, dann haben A und B denselben Rang.

3.1.9 Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel für zwei Matrizen A und B, die denselben Rang haben, die aber nicht ähnlich sind.

Wir wollen noch eine andere Interpretation von Konjugationsklassen geben. Wir beginnen mit einer Definition:

3.1.10 Definition: Zwei Endomorphismen $f, g \in \mathrm{End}(V)$ heißen **ähnlich** oder **konjugiert**, wenn es einen Isomorphismus $h \in \mathrm{End}(V)$ gibt, sodass $f = h^{-1} \circ g \circ h$ ist.

Die folgende Bemerkung besagt, dass Endomorphismen genau dann konjugiert sind, wenn ihre Matrixdarstellungen in derselben Konjugationsklasse liegen.

3.1.11 Bemerkung: Seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$, und sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. f und g sind ähnlich.
2. $A = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ und $B = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g)$ sind ähnlich.
3. Es gibt eine Basis $\mathcal{C}$ von V, sodass ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g)$ ist.

Beweis:

1.⇒2. Sei $f = h^{-1} \circ g \circ h$. In den Mathematischen Grundlagen haben wir gezeigt, dass gilt:

$${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(h^{-1} \circ g \circ h) = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(h^{-1})\,{}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g)\,{}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(h).$$

Ferner gilt

$${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(h^{-1}) = \left({}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(h)\right)^{-1}.$$

Es folgt, dass ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ und ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g)$ ähnlich sind.

2.⇒3. Seien $A = S^{-1}BS$ für eine invertierbare Matrix S. Dann liegt B in der Konjugationsklasse C_A, und Satz 3.1.5 impliziert, dass es eine Basis $\mathcal{C}$ von V so gibt, dass $A = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g)$ ist.

3.⇒1. Sei $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ eine Basis von V, sodass ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g) = (a_{ij})$ ist. Definiere die lineare Abbildung $h : V \to V$ durch $h(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Dann ist h ein Isomorphismus, und $h^{-1}(w_i) = v_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Nach Annahme gelten $f(v_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} v_j$ und $g(w_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} w_j$. Für alle $1 \leq i \leq n$ folgt

$$\begin{aligned} (h^{-1} \circ g \circ h)(v_i) &= h^{-1}(g(h(v_i))) = h^{-1}(g(w_i)) = h^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} w_j\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j = f(v_i). \end{aligned}$$

Da f und $h^{-1} \circ g \circ h$ auf einer Basis übereinstimmen, folgt, dass $f = h^{-1} \circ g \circ h$ gilt.

□

3.2 Diagonalisierbarkeit

3.2.1 Definition: Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ heißt eine **Diagonalmatrix**, wenn für alle $1 \leq i, j \leq n$ und $i \neq j$ stets $a_{ij} = 0$ ist.

In einer Diagonalmatrix sind also alle Einträge außerhalb der Diagonalen 0. Die Einträge auf der Diagonalen können – müssen aber nicht – 0 sein.

3.2.2 Definition: Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ heißt **diagonalisierbar**, wenn A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

Analog definieren wir für Endomorphismen:

3.2.3 Definition: Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V so gibt, dass ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

Mit Satz 3.1.5 gilt:

3.2.4 Bemerkung: Sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V.

Ein Endomorphismus f auf V ist genau dann diagonalisierbar, wenn ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ diagonalisierbar ist. Ist $\mathcal{C}$ eine Basis von V, bezüglich der ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist, so gilt ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f) = ({}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V))^{-1}{}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f){}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$. □

In diesem Abschnitt werden wir untersuchen, welche Matrizen/Endomorphismen diagonalisierbar sind, und wie wir gegebenenfalls eine Matrix S beziehungsweise eine Basis $\mathcal{B}$ finden können, sodass $S^{-1}AS$ beziehungsweise ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist. Dafür benötigen wir allerdings noch einige Hilfsmittel, die auch in den folgenden Kurseinheiten eine wichtige Rolle spielen werden.

3.2.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenvektoren können wir geometrisch interpretieren. Ein Vektor $u \neq 0$ ist Eigenvektor einer quadratischen Matrix A zum Eigenwert λ, wenn Au dieselbe „Richtung“ wie u hat, jedoch um den Faktor λ gestreckt/gestaucht wird.

Beginnen wir aber mit einer formalen Definition.

3.2.5 Definition: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Ein Körperelement $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt **Eigenwert** von A, wenn es einen Vektor $u \in \mathbb{K}^n$, $u \neq 0$, gibt, sodass $Au = \lambda u$ ist. Ein Vektor $u \in \mathbb{K}^n$ heißt **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ, wenn $u \neq 0$, und wenn $Au = \lambda u$ ist.

Warnung: Eigenvektoren müssen immer $\neq 0$ sein, Eigenwerte dürfen aber durchaus 0 sein.

3.2.6 Aufgaben:

1. Sei $u \in \mathbb{K}^n$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \neq 0$ von $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

   Beweisen Sie, dass auch Au Eigenvektor zum Eigenwert λ von A ist.

2. Beweisen Sie: Wenn $0 \in \mathbb{K}$ Eigenwert einer Matrix $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ ist, dann ist A nicht invertierbar.

3. Sei $u \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor von $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ und von $B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

   Beweisen Sie, dass u ein Eigenvektor von $aA + bB$ ist, für alle $a, b \in \mathbb{K}$.

3.2.7 Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, und seien $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, das heißt, u_1 ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 5, und $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, somit ist u_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert -2.

Matrizen müssen keine Eigenvektoren besitzen, wie das folgende Beispiel zeigt.

3.2.8 Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Angenommen, es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Da $\mathrm{Rg}(A) = 2$, ist A invertierbar, und $Ax = 0$ ist nur für $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ möglich. Es folgt, dass 0 kein Eigenwert von A ist, denn Eigenvektoren sind $\neq 0$. Es gilt $b = -\lambda a$ und $a = \lambda b$. Setzen wir die zweite Gleichung in die erste ein, so erhalten wir $b = -\lambda^2 b$. Da $\lambda \neq 0$, folgt $\lambda^2 > 0$, und die Gleichung $b = -\lambda^2 b$ ist genau dann erfüllbar, wenn $b = 0$ ist. Dies impliziert $a = 0$, ein Widerspruch, denn wir hatten angenommen, dass $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Versuchen wir geometrisch zu interpretieren, was im Beispiel 3.2.8 geschieht. Sei f die lineare Abbildung, die jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel 90° um den Nullpunkt gegen den Uhrzeigersinn dreht. Berechnen wir die Matrix zu f bezüglich der Standardbasis $\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Den Vektor e_1 veranschaulichen wir durch den Pfeil der Länge 1 auf der x-Achse, er wird unter f auf den Pfeil der Länge 1 auf der y-Achse abgebildet. Es gilt damit $f(e_1) = e_2$, und analog gilt $f(e_2) = -e_1$. Die Matrix zu f bezüglich der Standardbasis ist damit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nun wird klar, warum A keine Eigenvektoren haben kann. Jeder Vektor außer dem Nullvektor verändert durch Multiplikation mit A seine Richtung, denn er wird um 90° um den Nullpunkt gedreht.

Wenn $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ einen Eigenvektor u zum Eigenwert λ besitzt, dann ist auch au für alle $a \in \mathbb{K}^\times$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, denn $A(au) = a(Au) = a(\lambda u) = \lambda(au)$. Mit einem Eigenvektor zum Eigenwert λ erhalten wir also mindestens so viele Eigenvektoren zum Eigenwert λ wie es Elemente in $\mathbb{K}^\times$ gibt. Kann es auch beliebig viele Eigenwerte geben? Diese Frage wird durch das folgende Resultat beantwortet.

3.2.9 Proposition: (Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms)

Zu einer Matrix $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ gibt es genau dann einen Eigenvektor zum Eigenwert λ, wenn λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A ist.

Beweis: Es gilt

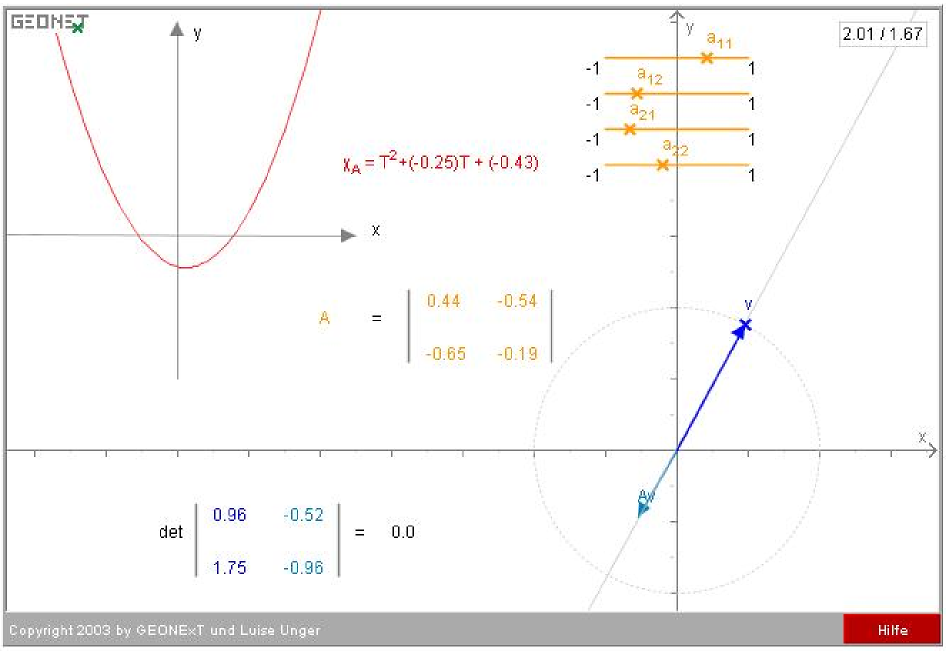
$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \det(\lambda I_n - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{das lineare Gleichungssystem } (\lambda I_n - A)x = 0 \\ & \quad \text{hat eine Lösung } u \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } u \in \mathbb{K}^n, u \neq 0, \text{ mit } Au = \lambda u \\ &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt einen Eigenvektor } u \text{ von } A \text{ zum Eigenwert } \lambda. \end{aligned}$$

□

3.2.10 Korollar: Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ hat höchstens n Eigenwerte.

Beweis: Es ist χ_A ein Polynom vom Grad n, hat also maximal n Nullstellen. (Vergleichen Sie mit Korollar 1.3.71.) □

Das folgende Bild ist ein Screenshot eines Applets in Ihrem virtuellen Studienplatz. Mit ihm wird die geometrische Interpretation von Eigenwerten und Eigenvektoren für reelle (2×2)-Matrizen veranschaulicht. Der Graph des charakteristischen Polynoms von A wird angezeigt, und Sie können daran ablesen, ob A reelle Eigenwerte besitzt. Falls dies der Fall ist, können Sie nach Eigenvektoren von A suchen. Weiter können Sie die Matrixeinträge von A modifizieren.



3.2.11 Korollar: Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte.

Beweis: Da ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom haben, folgt die Behauptung unmittelbar aus Proposition 3.2.9. □

Sie haben in Aufgabe 2.4.4 in gezeigt, dass eine Matrix A und ihre Transponierte A^T dasselbe charakteristische Polynom haben. Mit Proposition 3.2.9 folgt:

3.2.12 Korollar: A und A^T haben dieselben Eigenwerte. □

3.2.13 Aufgabe: Haben A und A^T auch dieselben Eigenvektoren?

3.2.14 Korollar: (Eigenwerte sind Nullstellen des Minimalpolynoms)

Zu einer Matrix $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ gibt es genau dann einen Eigenvektor zum Eigenwert λ, wenn λ Nullstelle des Minimalpolynoms μ_A ist.

Beweis: Da μ_A und χ_A dieselben Nullstellen haben (siehe Korollar 2.4.16), folgt die Behauptung unmittelbar aus Proposition 3.2.9. □

3.2.15 Beispiele: 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Es ist

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} T-2 & 2 \\ 6 & T-1 \end{pmatrix} = (T-2)(T-1) - 12 = (T-5)(T+2).$$

Somit sind 5 und -2 die Eigenwerte von A. Wir berechnen die Treppennormalform von

$$(5I_2 - A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diese ist $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Für jeden Vektor $u \neq 0$ mit $u \in \left\langle \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ gilt $(5I_2 - A)u = 5u - Au = 0$, also $Au = 5u$. Insbesondere gilt für $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ die Gleichung $Au_1 = 5u_1$, wie oben in Beispiel 3.2.7. Analog gilt

$$(-2I_2 - A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Die Treppennormalform dieser Matrix ist $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Für jeden Vektor $u \neq 0$ in $\left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ gilt $(-2I_2 - A)u = -2u - Au = 0$, also $Au = -2u$. Mit $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ haben wir also $Au_2 = -2u_2$, und wir erhalten die Eigenvektoren u_1 und u_2 wie oben in Beispiel 3.2.7.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Es ist

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} T & 1 \\ -1 & T \end{pmatrix} = T^2 + 1.$$

Das Polynom $T^2 + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{R}[T]$, hat also keine Nullstelle in $\mathbb{R}$. Es folgt, dass $A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ keine Eigenvektoren und Eigenwerte hat, was wir etwas umständlich in Beispiel 3.2.8 bereits gezeigt haben.

3. Wir betrachten nun $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{C})$. In $\mathbb{C}[T]$ gilt $\chi_A = T^2 + 1 = (T+i)(T-i)$, und $i, -i$ sind Nullstellen von χ_A, also Eigenwerte von A. Lösen der homogenen linearen Gleichungssysteme
$$(iI_2 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } (-iI_2 - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
liefert Eigenvektoren $u_1 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert i und $\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $-i$.

3.2.16 Definition: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei f ein Endomorphismus von V. Ein Vektor $u \in V$, $u \neq 0$, heißt **Eigenvektor** von f zum **Eigenwert** λ, wenn $f(u) = \lambda u$ ist.

3.2.17 Bemerkung: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $\dim(V) = n < \infty$, und sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus.

Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Sei $A = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Genau dann ist $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, wenn der Koordinatenvektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

Beweis: Sei b der Koordinatenvektor von $f(v)$. In den Mathematischen Grundlagen haben Sie gesehen, dass $Aa = b$ ist. Es folgt
$$\begin{array}{lcl} v \text{ ist Eigenvektor von } f & & \\ \text{zum Eigenwert } \lambda & \Leftrightarrow & v \neq 0 \text{ und } f(v) = \lambda v \\ & \Leftrightarrow & a \neq 0 \text{ und } Aa = \lambda a \\ & \Leftrightarrow & a \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } \lambda. \end{array}$$
□

Mit unseren Ergebnissen oben gilt:

3.2.18 Korollar: Sei $\dim(V) = n < \infty$. Genau dann gibt es einen Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, wenn λ Nullstelle von χ_f ist. Der Endomorphismus f hat höchstens n Eigenwerte. □

3.2.19 Aufgabe: Beweisen Sie, dass jeder Endomorphismus eines 3-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums einen Eigenwert besitzt. Gilt eine entsprechende Aussage auch für 4-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume?

Mit Hilfe der Eigenwerte kann man entscheiden, ob eine Matrix invertierbar ist:

3.2.20 Lemma: Sei $C \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Dann gilt

$$0 \text{ ist Eigenwert von } C \Leftrightarrow \det(C) = 0.$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 \text{ ist Eigenwert von } C \quad &\Leftrightarrow \quad \chi_C(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \det(0I_n - C) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \det(-C) = 0 = (-1)^n \det(C) \\ &\Leftrightarrow \quad \det(C) = 0. \end{aligned}$$

□

3.2.21 Proposition: Seien $A, B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Dann haben AB und BA dieselben Eigenwerte.

Beweis: Da $\det(AB) = \det(BA)$ mit dem Determinantenmultiplikationssatz, gilt mit dem Lemma 3.2.20

$$0 \text{ ist Eigenwert von } AB \Leftrightarrow \det(AB) = \det(BA) = 0 \Leftrightarrow 0 \text{ ist Eigenwert von } BA.$$

Sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von AB. Dann gibt es einen Vektor $u \neq 0$ mit $ABu = \lambda u$. Sei $w = Bu$. Wäre $w = 0$, so folgt $Aw = ABu = \lambda u = 0$, und da $\lambda \neq 0$, folgt $u = 0$, ein Widerspruch zu unserer Annahme. Es gilt also $w \neq 0$. Ferner gilt

$$BAw = BABu = B\lambda u = \lambda Bu = \lambda w,$$

und dies zeigt, dass w ein Eigenvektor von BA zum Eigenwert λ ist. Es folgt also

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } AB \Rightarrow \lambda \text{ ist Eigenwert von } BA.$$

Wir lassen nun A und B die Rollen tauschen, und es folgt

$$\lambda' \text{ ist Eigenwert von } BA \Rightarrow \lambda' \text{ ist Eigenwert von } AB,$$

und es folgt die Behauptung. □

3.2.22 Aufgabe: Haben AB und BA dieselben Eigenvektoren?

Wir kommen zu unserem ersten Diagonalisierbarkeitskriterium:

3.2.23 Proposition: Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, und sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $v_1, \dots, v_n$ sind Eigenvektoren von f.
2. ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ ist eine Diagonalmatrix.

Beweis:

$\Rightarrow$ Für alle $1 \le i \le n$ sei v_i ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Dann gilt $f(v_i) = \lambda_i v_i$ für alle $1 \le i \le n$, also

$$ {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. $$

$\Leftarrow$ Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, sodass ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist.
Dann gilt $f(v_i) = \lambda_i v_i$ für alle $1 \le i \le n$, die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind also Eigenvektoren von f.

$\square$

3.2.24 Beispiele: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Sei $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   In Beispiel 3.2.8 haben wir gesehen, dass $A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ keine Eigenvektoren besitzt. Es folgt, dass A nicht diagonalisierbar ist. Auch f_A ist nicht diagonalisierbar, denn bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ ist A die Matrixdarstellung von f_A. Die Bemerkung 3.2.4 besagt, dass f_A genau dann diagonalisierbar ist, wenn A diagonalisierbar ist.

2. Sei $f_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$.

Wir haben im dritten Beispiel von 3.2.15 gesehen, dass $\begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert i, und dass $\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $-i$ ist.

Diese Eigenvektoren sind linear unabhängig, denn keiner der Vektoren ist ein Vielfaches des anderen. Somit ist $\left(\begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis aus Eigenvektoren von f_A von $\mathbb{C}^2$, und bezüglich dieser Basis hat f_A die Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Insbesondere gibt es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{C})$, sodass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Die Matrix-Version von Proposition 3.2.23 lautet:

3.2.25 Proposition: Seien $A, S \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$, und sei S invertierbar.

Genau dann ist $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix, wenn die Spalten von S eine Basis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A bilden.

Beweis:

$\Rightarrow$ Sei $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix, und seien $v_1, \ldots, v_n$ die Spalten von S.

Da $AS = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$, folgt $Av_i = \lambda_i v_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Die Spaltenvektoren sind also Eigenvektoren von A. Da S invertierbar ist, sind die Spaltenvektoren auch linear unabhängig, bilden also eine Basis von $\mathbb{K}^n$.

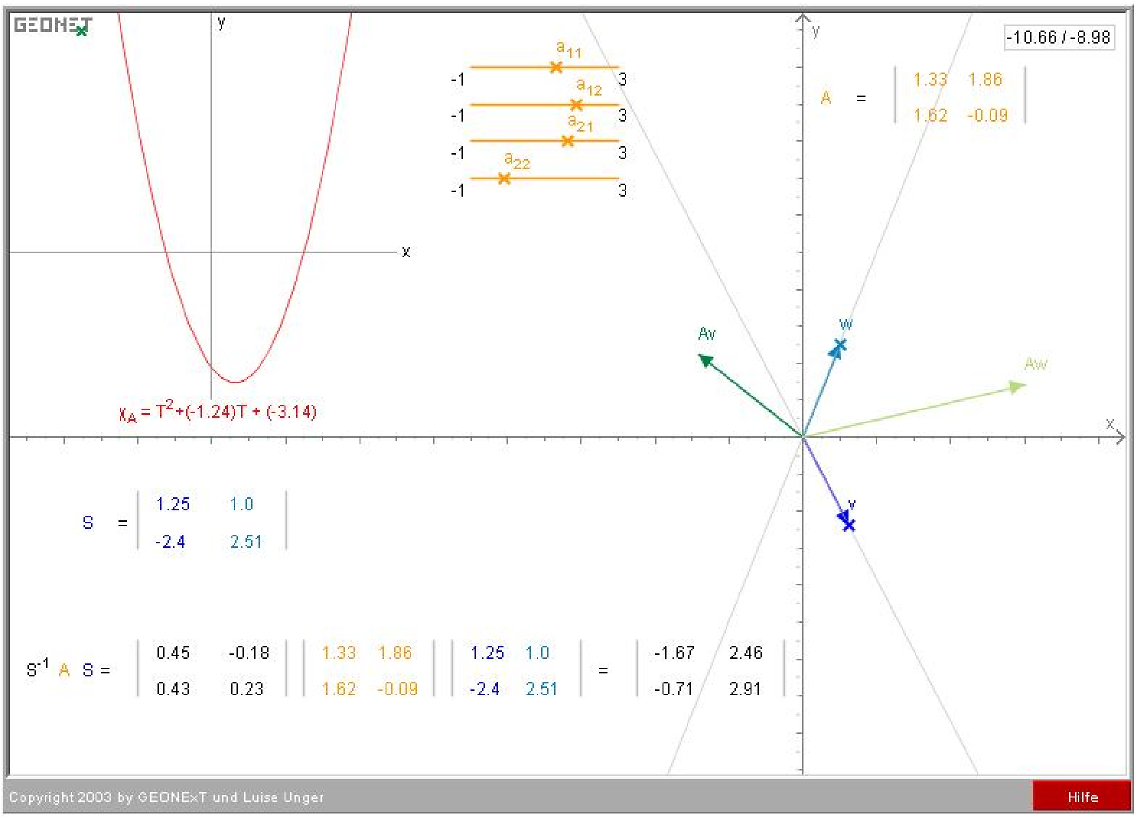
$\Leftarrow$ Seien die Spalten $v_1, \ldots, v_n$ von S eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren zu A. Die Matrix von $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_A(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ ist A. Es ist $S = {}_{\mathcal{E}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n})$, und bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ ist ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A) = S^{-1}AS$. Mit Proposition 3.2.23 ist $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix.

□

Beachten Sie, dass wir im Teil $\Rightarrow$ des Beweises folgendes gezeigt haben:

3.2.26 Korollar: Wenn $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix ist, und wenn $v_1, \ldots, v_n$ die Spalten von S sind, dann folgt $Av_i = \lambda_i v_i$ für alle $1 \le i \le n$. Wenn A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, dann sind die Diagonalelemente von D also die Eigenwerte von A, und die Spalten von S sind zugehörige Eigenvektoren. $\square$

Wenn Sie sich Proposition 3.2.25 für reelle 2×2-Matrizen einmal „vor Augen führen“ wollen, so haben Sie am virtuellen Studienplatz die Gelegenheit dazu. Hier sehen Sie nur einen Screenshot:



Als Folgerung aus Proposition 3.2.25 erhalten wir:

3.2.27 Korollar: Zwei Diagonalmatrizen sind genau dann ähnlich, wenn sie dasselbe charakteristische Polynom haben.

Beweis:

$\Rightarrow$ Klar, denn ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.

$\Leftarrow$ Seien $D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ und $D_2 = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda'_n \end{pmatrix}$ Diagonalmatrizen in $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Sei

$$\chi_{D_1} = \prod_{i=1}^{n}(T - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{n}(T - \lambda'_i) = \chi_{D_2}.$$

Mit Proposition 1.3.55 – der eindeutigen Zerlegung von Polynomen in irreduzible Faktoren – sind die irreduziblen Faktoren von χ_{D_1} und χ_{D_2} gleich. Es gibt also eine Permutation $\sigma \in S_n$, sodass $\lambda_i = \lambda'_{\sigma(i)}$ für alle $1 \leq i \leq n$ ist. Es gilt $D_2 = I_n^{-1} D_2 I_n$, und mit Proposition 3.2.25 sind die Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{K}^n$ Eigenvektoren von D_2. Genauer, für alle $1 \leq i \leq n$ ist e_i Eigenvektor von D_2 zum Eigenwert λ'_i. Sei $f_{D_2} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definiert durch $f_{D_2}(v) = D_2 v$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$. Bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}$ ist D_2 die Matrixdarstellung von f_{D_2}. Sei $\mathcal{B} = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$. Für alle $1 \leq i \leq n$ gilt

$$D_2 e_{\sigma(i)} = \lambda'_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)} = \lambda_i e_{\sigma(i)}.$$

Somit ist

$${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_{D_2}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = D_1,$$

und es folgt, dass D_1 und D_2 ähnlich sind.

$\square$

3.2.28 Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{C})$. Sei $S = \begin{pmatrix} -i & i \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{C})$. Wir invertieren S:

$$\begin{pmatrix} -i & i & | & 1 & 0 \\ -1 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir multiplizieren die erste Zeile mit i und addieren dann die erste Zeile zur zweiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & i & 0 \\ 0 & -2 & | & i & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir multiplizieren die zweite Zeile mit $-\dfrac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & i & 0 \\ 0 & 1 & | & -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir addieren die zweite Zeile zur ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & | & -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Als S^{-1} erhalten wir

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{pmatrix} \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & i \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Analog gilt

$$\begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Die Konjugationsklasse von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{C})$ enthält also die beiden Diagonalmatrizen $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, aber, mit Korollar 3.2.27, keine weiteren Diagonalmatrizen.

3.2.29 Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$, und sei $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$ invertierbar. Sei

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S^{-1}AS.$$

Geben Sie für jede Diagonalmatrix D in der Konjugationsklasse von A eine Matrix $S_D \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$ an, für die $D = S_D^{-1}AS_D$ gilt.

Im Prinzip könnten wir uns mit den Propositionen 3.2.23 und 3.2.25 zufrieden zurücklehnen und behaupten, dass wir ja jetzt ein Kriterium kennen, das es uns ermöglicht, zu entscheiden, ob ein Endomorphismus beziehungsweise eine quadratische Matrix diagonalisierbar ist. Wir müssen nur schauen, ob es eine Basis aus Eigenvektoren gibt. Aber wie können wir das konzeptionell in Angriff nehmen? Dazu fehlen uns bisher die Hilfsmittel, und damit werden wir uns im Folgenden beschäftigen.

3.2.2 Eigenräume

Unser nächstes Projekt zur Beantwortung der Frage, welche Matrizen diagonalisierbar sind, wird sein, zu untersuchen, für welche Matrizen/Endomorphismen es eine Basis aus Eigenvektoren gibt. Ein wichtiger Schritt in Richtung einer Antwort ist folgendes Ergebnis:

3.2.30 Proposition: Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, und sei $\dim(V) < \infty$. Für alle $1 \leq i \leq r$ sei v_i ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_i.

Falls die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ verschieden sind, so sind die Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung mit Induktion nach r.

Falls $r = 1$, so ist v_1 linear unabhängig, denn $v_1 \neq 0$.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Behauptung für $r-1$ Eigenvektoren gilt. Seien $v_1, \ldots, v_r$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, und sei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq r$. Sei $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i v_i = 0$ für Körperelemente $a_1, \ldots, a_r$. Dann gilt

$$0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^{r} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{r} a_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_i v_i.$$

Es ist auch

$$0 = \lambda_r 0 = \lambda_r \left(\sum_{i=1}^{r} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_r v_i.$$

Es folgt

$$0 = \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{r} a_i \lambda_r v_i = \sum_{i=1}^{r-1} a_i (\lambda_i - \lambda_r) v_i.$$

Da $v_1, \ldots, v_{r-1}$ nach Annahme linear unabhängig sind, folgt $a_i(\lambda_i - \lambda_r) = 0$ für alle $1 \leq i \leq r-1$. Nach Annahme ist $\lambda_i - \lambda_r \neq 0$, und es folgt $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq r-1$. Somit gilt $a_r v_r = 0$, und da $v_r \neq 0$, folgt $a_r = 0$. Dies zeigt, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig sind. □

3.2.31 Korollar: Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus und $\dim(V) = n < \infty$.

Wenn $\chi_f = \prod\limits_{i=1}^{n} (T - \lambda_i)$, und wenn $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$ und $1 \leq i, j \leq n$, dann besitzt V eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ aus Eigenvektoren, und ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wenn $\chi_f = \prod_{i=1}^{n}(T-\lambda_i)$, und $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$ und $1 \leq i, j \leq n$, dann sind die zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig. Somit ist $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, und ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. □

Die Formulierung von Korollar 3.2.31 für Matrizen lautet:

3.2.32 Korollar: Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Wenn $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(T-\lambda_i)$, und wenn $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$ und $1 \leq i, j \leq n$, dann gibt es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$, sodass $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ ist. Die Spalten von S sind die Eigenvektoren von A. □

Korollar 3.2.32 besagt also: Wenn χ_A in Linearfaktoren zerfällt, und wenn χ_A keine mehrfachen Nullstellen besitzt, dann ist A diagonalisierbar. Die Umkehrung dieses Resultats gilt nicht. Sei etwa $A = I_2$. Dann ist $\chi_A = (T-1)^2$, das heißt, χ_A hat eine mehrfache Nullstelle. Trotzdem ist A diagonalisierbar.

3.2.33 Definition: Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, und sei λ ein Eigenwert von f. Der Unterraum $\mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id}_V)$ von V wird der **Eigenraum** von λ genannt und mit $E(\lambda)$ bezeichnet. Die Dimension von $E(\lambda)$ wird die **geometrische Vielfachheit** von λ genannt und mit $\gamma(\lambda)$ bezeichnet.

Das Symbol γ ist der griechische Buchstabe, der „gamma“ ausgesprochen wird.

3.2.34 Bemerkung: Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, und sei λ ein Eigenwert von f. Dann gilt:

$$E(\lambda) = \{u \in V \mid u \text{ ist Eigenvektor von } f \text{ zum Eigenwert } \lambda\} \cup \{0\}.$$

Beweis:

$\subseteq$ Sei $v \in E(\lambda)$. Wenn $v = 0$, dann liegt v offenbar in

$$\{u \in V \mid u \text{ ist Eigenvektor von } f \text{ zum Eigenwert } \lambda\} \cup \{0\}.$$

Wir können also annehmen, dass $v \neq 0$ ist. Dann gilt $(f - \lambda \mathrm{id}_V)(v) = 0 = f(v) - \lambda v$, also $f(v) = \lambda v$. Dies zeigt, dass v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ ist.

$\supseteq$ Sei v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ. Dann gilt $f(v) = \lambda v$, also

$$f(v) - \lambda v = 0 = (f - \lambda \mathrm{id}_V)(v),$$

und es folgt $v \in \mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id}_V)$. Es gilt auch $0 \in E(\lambda)$.

□

3.2.35 Definition: Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ eine Matrix. Der **Kern von** A ist die Menge $\mathrm{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$

Der Kern einer Matrix ist also die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, oder, anders ausgedrückt, der Kern der linearen Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f_A(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Der Kern von A ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

Sei nun A eine quadratische Matrix, $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$, und sei λ ein Eigenwert von A. Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definiert durch $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Dann ist λ ein Eigenwert von f, und $\mathrm{Kern}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n})$. Wir nennen den Eigenraum $E(\lambda)$ von f den **Eigenraum zu A** zum Eigenwert λ.

3.2.36 Definition: Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus, sei $\dim(V) = n < \infty$, und sei λ ein Eigenwert von f. Die Vielfachheit (vergleiche Definition 1.3.69) von λ im charakteristischen Polynom χ_f von f wird die **algebraische Vielfachheit** von λ genannt und mit $\alpha(\lambda)$ bezeichnet.

Analog nennt man die Vielfachheit von λ im charakteristischen Polynom χ_A einer quadratischen Matrix $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ die **algebraische Vielfachheit** von λ und bezeichnet sie mit $\alpha(\lambda)$. Ist $A = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ die Matrixdarstellung eines Endomorphismus f, so gilt $\chi_A = \chi_f$, und die beiden Begriffe stimmen überein.

3.2.37 Proposition: Für jeden Eigenwert λ von $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ gilt $\alpha(\lambda) \geq \gamma(\lambda)$.

Beweis: Sei $\gamma(\lambda) = r$. Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ eine Basis von $E(\lambda)$. Wir ergänzen $(v_1, \ldots, v_r)$ durch $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ zu einer Basis von $\mathbb{K}^n$.

Sei $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $f_A(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$ die zu A gehörige lineare Abbildung. Sei C die Matrixdarstellung von f_A bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$, also $C = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f_A)$. Die Matrizen A und C sind ähnlich, es gilt also $\chi_A = \chi_C$.

Für alle $1 \leq i \leq r$ gilt $f_A(v_i) = \lambda v_i$, also

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{r+1,r+1} & \cdots & c_{r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n,r+1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Indem wir die Determinante von $(TI_n - C)$ nach den ersten r Spalten entwickeln, erhalten wir

$$\chi_C = \det(TI_n - C) = (T-\lambda)^r \det \begin{pmatrix} T - c_{r+1,r+1} & \cdots & -c_{r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{n,r+1} & \cdots & T - c_{nn} \end{pmatrix},$$

$(T-\lambda)^r$ ist somit ein Teiler von $\chi_C = \chi_A$. Die algebraische Vielfachheit von λ war definiert als die größte Zahl $\alpha(\lambda)$, für die $(T-\lambda)^{\alpha(\lambda)}$ ein Teiler von χ_A ist, und es folgt $\alpha(\lambda) \geq r = \gamma(\lambda)$. □

3.2.3 Direkte Summen von Unterräumen

Für die Formulierung des zentralen Ergebnisses dieses Abschnitts, dem so genannten „Allgemeinen Diagonalisierbarkeitskriterium“, benötigen wir noch einen weiteren Begriff.

3.2.38 Definition: Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, und seien $U_1, \ldots, U_r$ Unterräume von V. Man sagt, dass V die **direkte Summe** der Unterräume $U_1, \ldots, U_r$ ist, wenn gilt:

1. Es ist $V = U_1 + \cdots + U_r = \sum\limits_{i=1}^{r} U_i$, das heißt, für alle $v \in V$ gibt es $u_1 \in U_1, \ldots, u_r \in U_r$, sodass $v = \sum\limits_{i=1}^{r} u_i$ ist, und
2. $U_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} U_j = \{0\}$ für alle $1 \leq i \leq r$.

Ist V die direkte Summe von $U_1, \ldots, U_r$ so schreiben wir $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} U_i$ oder auch $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$.

3.2.39 Proposition: (Charakterisierung direkter Summen)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} U_i$.
2. Wenn $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ Basen von $U_1, \ldots, U_r$ sind, so ist $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ eine Basis von V.

Beweis:

1⇒2 Sei $v \in V = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} U_i$. Dann gilt $v = \sum\limits_{i=1}^{r} u_i$, mit $u_i \in U_i$ für alle $1 \leq i \leq r$. Jeder Vektor u_i ist eine Linearkombination $u_i = a_{i1}u_{i1} + \cdots + a_{in_i}u_{in_i}$ der Vektoren in $\mathcal{B}_i = (u_{i1}, \ldots, u_{in_i})$, und somit ist

$$v = a_{11}u_{11} + \cdots + a_{1n_1}u_{1n_1} + \cdots + a_{r1}u_{r1} + \cdots + a_{rn_r}u_{rn_r}$$

eine Linearkombination der Vektoren in $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$, und $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ ist ein Erzeugendensystem von V. Sei

$$0 = a_{11}u_{11} + \cdots + a_{1n_1}u_{1n_1} + \cdots + a_{r1}u_{r1} + \cdots + a_{rn_r}u_{rn_r}.$$

Angenommen, es gibt ein $a_{ij} \neq 0$. Da $\mathcal{B}_i = (u_{i1}, \ldots, u_{in_i})$ eine Basis von U_i ist, folgt

$$a_{i1}u_{i1} + \cdots + a_{in_i}u_{in_i} \in U_i \text{ und } a_{i1}u_{i1} + \cdots + a_{in_i}u_{in_i} \neq 0.$$

Wir stellen die Gleichung um und erhalten

$$a_{i1}u_{i1} + \cdots + a_{in_i}u_{in_i} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r}(a_{j1}u_{j1} + \cdots + a_{jn_j}u_{jn_j}) \in \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} U_j.$$

Das ist ein Widerspruch, denn $U_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} U_j = \{0\}$ für alle $1 \leq i \leq r$. Dieser Widerspruch zeigt, dass die Vektoren in $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ linear unabhängig sind.

2⇒1 Sei $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ eine Basis von V. Sei $v \in V$. Dann gilt

$$v = a_{11}u_{11} + \cdots + a_{1n_1}u_{1n_1} + \cdots + a_{r1}u_{r1} + \cdots + a_{rn_r}u_{rn_r}$$

für Skalare a_{ij} mit $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq j \leq n_i = \dim(U_i)$.

Da $a_{i1}u_{i1} + \cdots + a_{in_i}u_{in_i} \in U_i$, folgt $v = u_1 + \cdots + u_r$ mit $u_i \in U_i$. Somit gilt $V = U_1 + \cdots + U_r$.

Sei $u \in U_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} U_j$. Dann gibt es Skalare $a_{i1}, \ldots, a_{in_i}$ und $a_{j1}, \ldots a_{jn_j}, j \neq i$, mit

$$u = a_{i1}u_{i1} + \cdots + a_{in_i}u_{in_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} (a_{j1}u_{j1} + \cdots + a_{jn_j}u_{jn_j}).$$

Es folgt

$$0 = \sum_{k=1}^{n_i} a_{ik}u_{ik} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} (a_{j1}u_{j1} + \cdots + a_{jn_j}u_{jn_j}).$$

Da das System $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ linear unabhängig ist, folgt, dass alle Skalare 0 sind, also $u = 0$. Der Durchschnitt $U_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} U_j$ enthält damit nur den Nullvektor, und es folgt die Behauptung.

□

3.2.4 Das allgemeine Diagonalisierbarkeitskriterium

Wir sind nun in der Lage, das anfangs gestellte Problem, welche Endomorphismen/Matrizen diagonalisierbar sind, umfassend zu beantworten.

3.2.40 Satz: (Allgemeines Diagonalisierbarkeitskriterium für Endomorphismen)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, sei $\dim(V) = n < \infty$, und sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. f ist diagonalisierbar.
2. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von f, so ist $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} E(\lambda_i)$.
3. χ_f zerfällt in Linearfaktoren, und $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$ für alle Eigenwerte λ von f.

Beweis:

1⇒2 Sei f diagonalisierbar. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V aus Eigenvektoren von f. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von f.

Für alle $1 \leq i \leq r$ seien $(w_{i1}, \ldots, w_{i\gamma(\lambda_i)})$ Basen der Eigenräume von $E(\lambda_i)$. Jeder Basisvektor aus $\mathcal{C}$ ist ein Eigenvektor und damit eine Linearkombination der Basisvektoren des jeweiligen Eigenraums, und damit gilt

$$V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle w_{11}, \ldots, w_{1\gamma(\lambda_1)}, \ldots, w_{r1}, \ldots, w_{r\gamma(\lambda_r)} \rangle \subseteq V.$$

Es folgt

$$V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle w_{11}, \dots, w_{1\gamma(\lambda_1)}, \dots, w_{r1}, \dots, w_{r\gamma(\lambda_r)} \rangle = V.$$

Somit ist $(w_{11}, \dots, w_{1\gamma(\lambda_1)}, \dots, w_{r1}, \dots, w_{r\gamma(\lambda_r)})$ ein Erzeugendensystem von V. Wir zeigen jetzt, dass $(w_{11}, \dots, w_{1\gamma(\lambda_1)}, \dots, w_{r1}, \dots, w_{r\gamma(\lambda_r)})$ linear unabhängig ist. Dazu sei

$$0 = \underbrace{a_{11}w_{11} + \cdots + a_{1\gamma(\lambda_1)}w_{1\gamma(\lambda_1)}}_{=w_1} + \cdots + \underbrace{a_{r1}w_{r1} + \cdots + a_{r\gamma(\lambda_r)}w_{r\gamma(\lambda_r)}}_{=w_r}$$

für Skalare $a_{11}, \dots, a_{r\gamma(\lambda_r)}$. Für alle $1 \leq i \leq r$ setze $w_i = \sum_{j=1}^{\gamma(\lambda_i)} a_{ij}w_{ij}$. Dann gilt $w_i \in E(\lambda_i)$, und mit Proposition 3.2.30 folgt $w_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq r$. Da die $(w_{i1}, \dots, w_{i\gamma(\lambda_i)})$ Basen von $E(\lambda_i)$ sind, folgt dass alle Skalare 0 sind. Somit ist

$$(w_{11}, \dots, w_{1\gamma(\lambda_1)}, \dots, w_{r1}, \dots, w_{r\gamma(\lambda_r)})$$

eine Basis von V. Es folgt $V = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_r)$, die Behauptung.

2⇒3 Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von f, und sei

$$V = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_r).$$

Dann ist

$$n = \sum_{i=1}^{r} \dim(E(\lambda_i)) = \sum_{i=1}^{r} \gamma(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^{r} \alpha(\lambda_i) \leq \mathrm{Grad}(\chi_f) = n.$$

Die erste Abschätzung $\leq$ folgt aus Proposition 3.2.37. Es folgt $\gamma(\lambda_i) = \alpha(\lambda_i)$ für alle $1 \leq i \leq r$.

Sei $\chi_f = (T - \lambda_1)^{\alpha(\lambda_1)} \cdots (T - \lambda_r)^{\alpha(\lambda_r)} \cdot h$ für ein $h \in \mathbb{K}[T]$. Da $\sum_{i=1}^{r} \alpha(\lambda_i) = n$, folgt $\mathrm{Grad}(h) = 0$, also ist h konstant. Da χ_f normiert ist, folgt $h = 1$, und dies zeigt, dass χ_f in Linearfaktoren zerfällt.

3⇒1 Da χ_f in Linearfaktoren zerfällt, ist

$$\chi_f = \prod_{i=1}^{r} (T - \lambda_i)^{\alpha(\lambda_i)}, \text{ wobei } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j.$$

Also sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von f. Nach Voraussetzung gilt $n = \sum_{i=1}^{r} \alpha(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{r} \gamma(\lambda_i)$. Für alle $1 \leq i \leq r$ seien $(w_{i1}, \dots, w_{i\gamma(\lambda_i)})$ Basen von $E(\lambda_i)$. Das System $(w_{11}, \dots, w_{1\gamma(\lambda_1)}, \dots, w_{r1}, \dots, w_{r\gamma(\lambda_r)})$ besteht mit derselben Argumentaion wie oben aus n linear unabhängigen Vektoren, bildet also eine Basis von V aus Eigenvektoren. Mit Proposition 3.2.23 ist f diagonalisierbar.

□

In der Matrix-Version lautet dieses Ergebnis:

3.2.41 Satz: (Allgemeines Diagonalisierbarkeitskriterium für Matrizen)

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. A ist diagonalisierbar.
2. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von A, so ist $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E(\lambda_i)$.
3. χ_A zerfällt in Linearfaktoren, und $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$ für alle Eigenwerte λ von A.

□

3.2.42 Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$.

Es ist $\chi_A = (T-1)^2(T+1)$, somit sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ die Eigenwerte von A. Es sind $\alpha(\lambda_1) = 2$ und $\alpha(\lambda_2) = 1 = \gamma(\lambda_2)$. Die Matrix A ist also genau dann diagonalisierbar, wenn $\gamma(\lambda_1) = 2$ ist. $E(\lambda_1) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Treppennormalform zu $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, und daran lesen wir ab, dass $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $E(\lambda_1)$ ist. Also gilt $\gamma(\lambda_1) = 2 = \alpha(\lambda_1)$, und A ist ähnlich zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Fassen wir noch einmal zusammen, was wir in diesem Abschnitt erreicht haben.

Bei der Untersuchung des Normalformenproblems für Matrizen in $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ haben wir uns ganz einfache Matrizen vorgegeben, nämlich Diagonalmatrizen. Das allgemeine Diagonalisierbarkeitskriterium gibt abschließend darauf die Antwort, welche Matrizen in der Konjugationsklasse einer vorgegebenen Diagonalmatrix D liegen: Alle Matrizen $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$, für die $\chi_A = \chi_D$ gilt (dann zerfällt χ_A in Linearfaktoren) und für die $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$ für alle Eigenwerte λ von A gilt. Die einzigen Diagonalmatrizen, die in der Konjugationsklasse von D liegen, sind diejenigen, die dieselben Eigenwerte mit denselben algebraischen Vielfachheiten wie D haben. Die Eigenwerte, dies sind ja gerade die Diagonaleinträge, können allerdings in einer anderen Reihenfolge auf der Diagonalen auftreten.

Weiter können wir zu jeder diagonalisierbaren Matrix $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ eine Matrix $S \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ angeben, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. Dazu berechnen wir Basen der Eigenräume zu den verschiedenen Eigenwerten von A. Mit Satz 3.2.41 erhalten wir so n linear unabhängige Vektoren. Die Matrix S ist die Matrix, die diese Vektoren als Spalten enthält.

3.2.43 Aufgabe: Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

1. Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$, und sei $a \in \mathbb{K}$. Dann ist A ähnlich zu aA.
2. Jede Matrix in $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{C})$ ist diagonalisierbar.
3. Sei $A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ diagonalisierbar. Dann gilt:

   Die Konjugationsklasse, die A enthält, ist genau dann endlich, wenn A genau einen Eigenwert besitzt.

3.2.44 Aufgabe: Bestimmen Sie von den folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ die Eigenwerte, Basen der Eigenräume, und, falls möglich, invertierbare Matrizen S_1, S_2 und S_3, sodass $S_1^{-1}AS_1$, $S_2^{-1}BS_2$ und $S_3^{-1}CS_3$ Diagonalmatrizen sind.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3 Nilpotenz

Während wir uns im letzten Abschnitt Matrizen von besonders einfacher Form, nämlich Diagonalmatrizen, vorgegeben und untersucht haben, welche Matrizen in der Konjugationsklasse von Diagonalmatrizen liegen, werden wir in diesem Abschnitt anders vorgehen. Wir beginnen mit Matrizen, die eine spezielle Eigenschaft haben, nämlich nilpotent zu sein, und bestimmen eine besonders einfache Matrix in der Konjugationsklasse nilpotenter Matrizen.

3.3.1 Definitionen und erste Eigenschaften

3.3.1 Definition: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei V ein Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ über $\mathbb{K}$. Ein Endomorphismus $f : V \to V$ heißt **nilpotent**, falls $f^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Die natürliche Zahl m mit $f^m = 0$ und $f^{m-1} \neq 0$ heißt **Nilpotenzindex** von f.

Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ heißt **nilpotent**, falls $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Die natürliche Zahl m mit $A^m = 0$ und $A^{m-1} \neq 0$ heißt **Nilpotenzindex** von A.

Zur Erinnerung: Es ist $f^0 = \mathrm{id}_V$ und $f^m = f \circ f^{m-1}$, sowie $A^0 = I_n$ und $A^m = A \cdot A^{m-1}$.

3.3.2 Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$A^0 = I_4,\ A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A^3 = 0,$$

die Matrix A ist also nilpotent mit Nilpotenzindex 3.

3.3.3 Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ nilpotent mit Nilpotenzindex m.

Beweisen Sie, dass A^T nilpotent mit Nilpotenzindex m ist.

3.3.4 Aufgabe: Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ nilpotent mit Nilpotenzindex m. Sei B ähnlich zu A.

Beweisen Sie, dass B nilpotent mit Nilpotenzindex m ist.

3.3.5 Bemerkung: Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V. Sei $A = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ eine Matrixdarstellung von f. Dann gilt:

$$f \text{ ist nilpotent mit Nilpotenzindex } m \Leftrightarrow A \text{ ist nilpotent mit Nilpotenzindex } m.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
f \text{ ist nilpotent mit Nilpotenzindex } m &\Leftrightarrow f^{m-1} \neq 0 \text{ und } f^m = 0 \\
&\Leftrightarrow {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f^{m-1}) \neq 0 \text{ und } {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f^m) = 0 \\
&\Leftrightarrow {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)^{m-1} \neq 0 \text{ und } {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)^m = 0 \\
&\Leftrightarrow A^{m-1} \neq 0 \text{ und } A^m = 0 \\
&\Leftrightarrow A \text{ ist nilpotent mit Nilpotenzindex } m.
\end{aligned}$$

□

Nur wenige nilpotente Matrizen sind diagonalisierbar, wie die folgende Bemerkung zeigt:

3.3.6 Bemerkung: Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Genau dann ist A nilpotent und diagonalisierbar, wenn $A = 0$ ist.

Beweis:

$\Rightarrow$ Sei $A^m = 0$, und sei $S \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$, sodass $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix ist. Dann gilt

$$(S^{-1}AS)^m = S^{-1}A^mS = S^{-1}0S = 0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\lambda_i^m = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$, und dies impliziert $\lambda_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. Es folgt $S^{-1}AS = 0$, also $A = 0$.

$\Leftarrow$ Wenn A die Nullmatrix ist, dann ist A offenbar diagonalisierbar und nilpotent.

□

Ob eine Matrix beziehungsweise ein Endomorphismus nilpotent ist, lässt sich am charakteristischen Polynom ablesen:

3.3.7 Proposition: (Charakterisierung nilpotenter Matrizen)

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. A ist nilpotent.
2. $\chi_A = T^n$.

Beweis:

1⇒2 Sei A nilpotent mit Nilpotenzindex m. Dann ist $A^{m-1} \neq 0$ und $A^m = 0$. Somit ist T^m ein Polynom, in das wir A einsetzen können und die Nullmatrix erhalten. Mit Proposition 2.4.12 folgt, dass das Minimalpolynom ein Teiler von T^m ist, also $\mu_A = T^s$ für ein $s \leq m$. Da $A^{m-1} \neq 0$, folgt $\mu_A = T^m$. Da μ_A und χ_A dieselben irreduziblen Teiler haben, folgt $\chi_A = T^r$ für ein $r \in \mathbb{N}$. Da χ_A den Grad n hat, gilt $\chi_A = T^n$.

2⇒1 Sei $\chi_A = T^n$. Mit dem Satz von Cayley-Hamilton (Satz 2.4.8) folgt $\chi_A(A) = A^n = 0$, und es folgt, dass A nilpotent ist.

□

3.3.8 Korollar: (Eigenwerte nilpotenter Matrizen)

Wenn A nilpotent ist, dann gilt $\lambda = 0$ für alle Eigenwerte λ von A. □

3.3.9 Aufgabe: Gilt die Umkehrung von Korollar 3.3.8?

3.3.10 Korollar: (Beispiele nilpotenter Matrizen)

Sei A eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonalelemente 0 sind. Dann ist A nilpotent.

Beweis: Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonalelemente 0 sind. Dann ist $TI_n - A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K}[T])$ eine obere Dreiecksmatrix, deren Diagonalelemente T sind. Es folgt $\chi_A = T^n$, und mit Proposition 3.3.7 folgt, dass A nilpotent ist. □

3.3.11 Aufgabe: Gilt die Umkehrung von Korollar 3.3.10?

3.3.2 Blockdiagonalmatrizen

3.3.12 Definition: Sei R ein kommutativer Ring. Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $p_1, \ldots, p_s$ natürliche Zahlen mit $\sum\limits_{i=1}^{s} p_i = n$. Für alle $1 \leq k \leq s$ sei $A_k = (a_{k_{ij}}) \in \mathrm{M}_{p_k p_k}(R)$.

Die $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{s-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1_{11}} & \cdots & a_{1_{1p_1}} & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1_{p_1 1}} & \cdots & a_{1_{p_1 p_1}} & & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & & a_{s_{11}} & \cdots & a_{s_{1p_s}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & a_{s_{p_s 1}} & \cdots & a_{s_{p_s p_s}} \end{pmatrix}$$

wird **Blockdiagonalmatrix** mit den Blöcken $A_1, \ldots, A_s$ genannt. Man bezeichnet diese mit $A = \bigoplus_{k=1}^{s} A_k$ oder $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$.

Ausgesprochen wird $A = \bigoplus_{k=1}^{s} A_k$ als: „A ist direkte Summe der Matrizen A_1 bis A_s“.

3.3.13 Aufgabe: Seien $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$.

Bilden Sie $A = \bigoplus_{k=1}^{3} A_k$.

Sei nun wieder $n \in \mathbb{N}$, und seien $p_1, \ldots, p_s$ natürliche Zahlen mit $\sum_{i=1}^{s} p_i = n$. Für alle $1 \leq k \leq s$ seien $A_k = (a_{k_{ij}}), B_k = (b_{k_{ij}}) \in \mathrm{M}_{p_k p_k}(R)$. Seien

$$A = \bigoplus_{k=1}^{s} A_k = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix} \text{ und } B = \bigoplus_{k=1}^{s} B_k = \begin{pmatrix} B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_s \end{pmatrix}.$$

Durch Nachrechnen verifiziert man, dass

$$A + B = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_s + B_s \end{pmatrix} = \bigoplus_{k=1}^{s} (A_k + B_k) \text{ und}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_s B_s \end{pmatrix} = \bigoplus_{k=1}^{s} (A_k B_k)$$

und
$$rA = r\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rA_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & rA_s \end{pmatrix} = \bigoplus_{k=1}^{s}(rA_k)$$
für alle $r \in R$ gelten. Es folgt:

3.3.14 Bemerkung: Sei $A = \bigoplus\limits_{k=1}^{s} A_k$ eine Blockdiagonalmatrix in $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$, und sei $f = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i T^i \in \mathbb{K}[T]$ ein Polynom. Dann gilt
$$f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(A_s) \end{pmatrix} = \bigoplus_{k=1}^{s} f(A_k).$$
$\square$

3.3.15 Proposition: (Determinanten von Blockdiagonalmatrizen)

Sei $A = \bigoplus\limits_{k=1}^{s} A_k \in \mathrm{M}_{nn}(R)$ eine Blockdiagonalmatrix über einem kommutativen Ring R. Dann gilt $\det(A) = \prod\limits_{k=1}^{s} \det(A_k)$.

Beweis: Der Beweis erfolgt mit Induktion nach der Zahl s der Blöcke von A.

Für $s = 1$ ist die Behauptung erfüllt, es gilt also der Induktionsanfang.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Behauptung für Blockdiagonalmatrizen mit $s - 1 \geq 1$ Blöcken gilt.

Sei $A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$ eine Blockdiagonalmatrix mit s Blöcken, und sei $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{mm}(R)$. Der Induktionsschritt wird mit Induktion nach m bewiesen. Ist $m = 1$, so ist $A_1 = (a_{11})$, und indem wir $\det(A)$ durch Entwicklung nach der ersten Zeile berechnen, erhalten wir
$$\det\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix} A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix} = a_{11}\prod_{k=2}^{s}\det(A_k) = \prod_{k=1}^{s}\det(A_k),$$

denn die Blockdiagonalmatrix $\begin{pmatrix} A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$ hat $s-1$ Blöcke.

Sei nun $m > 1$. Mit der Determinantenberechnung durch Entwicklung nach der ersten Zeile erhalten wir

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{1+i} a_{1i} \det(A_{1i}).$$

Die Matrizen A_{1i}, die wir durch Streichen der ersten Zeile und der i-ten Spalte von A erhalten, sind Blockdiagonalmatrizen mit s Blöcken, wobei der erste Block eine $(m-1) \times (m-1)$-Matrix ist. Nach Voraussetzung gilt dann

$$\det(A_{1i}) = \det((A_1)_{1i}) \prod_{k=2}^{s} \det(A_k),$$

wobei $(A_1)_{1i}$ die Matrix ist, die wir durch Streichen der ersten Zeile und der i-ten Spalte von A_1 erhalten. Es folgt

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{1+i} a_{1i} \det(A_{1i}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{1+i} a_{1i} \det((A_1)_{1i}) \prod_{k=2}^{s} \det(A_k) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} (-1)^{1+i} a_{1i} \det((A_1)_{1i}) \right) \prod_{k=2}^{s} \det(A_k) \\ &= \det(A_1) \prod_{k=2}^{s} \det(A_k). \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe dieser Proposition lassen sich charakteristische Polynome von Blockdiagonalmatrizen leicht berechnen.

3.3.16 Korollar: Sei $A = \bigoplus_{k=1}^{s} A_k$ eine Blockdiagonalmatrix in $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Dann gilt

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{s} \chi_{A_k}.$$

Beweis: Sei $A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_s \end{pmatrix}$. Für alle $1 \leq k \leq s$ sei $A_k \in \mathrm{M}_{p_k p_k}(\mathbb{K})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det(TI_n - A)\\ &= \det\begin{pmatrix} TI_{p_1} - A_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & TI_{p_s} - A_s\end{pmatrix}\\ &= \det(\bigoplus_{k=1}^{s}(TI_{p_k} - A_k))\\ &= \prod_{k=1}^{s}\det(TI_{p_k} - A_k)\\ &= \prod_{k=1}^{s}\chi_{A_k}.\end{aligned}$$

□

3.3.17 Proposition: (Minimalpolynome von Blockdiagonalmatrizen)

Sei $A = \bigoplus_{k=1}^{s} A_k$ eine Blockdiagonalmatrix in $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Das Minimalpolynom μ_A von A ist das kleinste gemeinsame Vielfache (vergleiche 1.3.73) der Minimalpolynome $\mu_{A_1}, \ldots, \mu_{A_s}$.

Beweis: Es ist

$$0 = \mu_A(A) = \begin{pmatrix} \mu_A(A_1) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \mu_A(A_s)\end{pmatrix} = \bigoplus_{k=1}^{s}\mu_A(A_k)$$

mit Bemerkung 3.3.14 oben. Damit gilt $\mu_A(A_k) = 0$ für alle $1 \leq k \leq s$. Das Polynom μ_A hat also die Eigenschaft, dass wir A_k einsetzen können und die Nullmatrix erhalten. Mit Proposition 2.4.12 folgt, dass μ_A ein Vielfaches von μ_{A_k} ist für alle $1 \leq k \leq s$. Sei f das kleinste gemeinsame Vielfache von $\mu_{A_1}, \ldots, \mu_{A_s}$. Mit Bemerkung 1.3.74 folgt, dass f ein Teiler von μ_A ist. Andererseits gilt

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & f(A_s)\end{pmatrix} = \bigoplus_{k=1}^{s} f(A_k) = \bigoplus_{k=1}^{s} g_k\mu_{A_k}(A_k)$$

für geeignete $g_1, \ldots, g_s \in \mathbb{K}[T]$. Da $\mu_{A_k}(A_k) = 0$, folgt $f(A) = 0$. Somit ist μ_A ein Teiler von f. Es gilt also $f|\mu_A$ und $\mu_A|f$. Da f und μ_A normiert sind, folgt $f = \mu_A$.

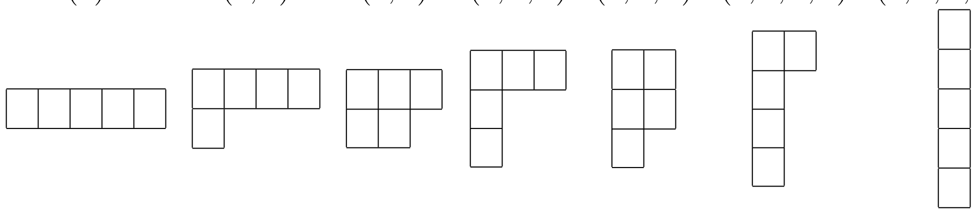
□

Blockdiagonalmatrizen werden bei unseren weiteren Untersuchungen des Normalformenproblems eine große Rolle spielen. Zur Indizierung der Blöcke brauchen wir noch einen Begriff aus der Kombinatorik:

3.3.18 Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine **Partition** p **von** n **in** s **Teile** ist ein s-Tupel $p = (p_1, \ldots, p_s)$ mit $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_s$, und $n = \sum\limits_{k=1}^{s} p_k$. Das zu einer Partition p gehörende **Diagramm** besteht aus n Kästchen, die in s Zeilen angeordnet sind, wobei die i-te Zeile aus p_i Kästchen besteht.

3.3.19 Beispiel: Die Partitionen von 5 und ihre Diagramme sind:

(5) $(4,1)$ $(3,2)$ $(3,1,1)$ $(2,2,1)$ $(2,1,1,1)$ $(1,1,1,1,1)$



3.3.20 Definition: Sei $p = (p_1, \ldots, p_s)$ eine Partition von n. Die **zu** p **duale Partition** $p^* = (q_1, \ldots, q_t)$ erhalten wir, indem wir für q_j, $1 \leq j \leq t$, die Anzahl derjenigen p_i mit $p_i \geq j$ setzen.

q_1 zählt also diejenigen p_i, die größer oder gleich 1 sind. Dies sind alle p_i, $1 \leq i \leq s$, es ist also $q_1 = s$. Für $j \geq 1$ ist q_j die Anzahl der p_i mit $p_i \geq j$. Dies sind alle p_i, die in der j-ten Spalte des Diagramms der Partition p noch ein Kästchen besitzen. q_j zählt also die Anzahl der Kästchen in der j-ten Spalte. Wir erhalten also folgende

3.3.21 Merkregel: q_j ist die Anzahl der Kästchen in der j-ten Spalte des Diagramms von p.

Es folgt, dass $\sum\limits_{j=1}^{t} q_j = n$ ist. Da alle p_i, die größer oder gleich $j+1$ sind, auch größer oder gleich j sind, folgt $q_j \geq q_{j+1}$ für alle $1 \leq j < t$, und wir sehen, dass p^* – wie die Definition suggeriert – eine Partition von n ist.

Aus der Merkregel 3.3.21 (Anzahl der Kästchen in der j-ten Zeile des Diagramms zu p^* = Anzahl der Kästchen in der j-ten Spalte des Diagramms von p) folgt: Für jede Partition p von n gilt $(p^*)^* = p$.

3.3.22 Aufgabe: Bestimmen Sie die Partitionen von 4, ihre dualen Partitionen und ihre Diagramme.

3.3.23 Beispiel:

$$\begin{array}{lcl}
(5)^* & = & (1,1,1,1,1) \\
(4,1)^* & = & (2,1,1,1) \\
(3,2)^* & = & (2,2,1) \\
(3,1,1)^* & = & (3,1,1) \\
(2,2,1)^* & = & (3,2) \\
(2,1,1,1)^* & = & (4,1) \\
(1,1,1,1,1)^* & = & (5).
\end{array}$$

3.3.24 Bezeichnung: Sei $p = (p_1, \ldots, p_s)$ eine Partition von n. Für alle $1 \leq k \leq s$ sei

$$N(p_k) = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{p_k p_k}(\mathbb{K}) \text{ definiert durch } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i+1 \\ 0, & \text{falls } j \neq i+1. \end{cases}$$

Die Matrizen $N(p_k)$ haben also direkt über der Diagonalen die Einträge 1 und die übrigen Einträge sind 0.

Es ist also

$$N(p_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$N(p_k)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N(p_k)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und so weiter, das heißt, mit jeder Multiplikation verschieben sich die Einsen um eine Position nach rechts. Es sind

$$N(p_k)^{p_k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N(p_k)^{p_k} = 0.$$

Die Matrix $N(p_k)$ ist also nilpotent vom Nilpotenzindex p_k.

Sei nun $\mathcal{N}(p)$ die Blockdiagonalmatrix $\bigoplus_{k=1}^{s} N(p_k) = \begin{pmatrix} N(p_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & N(p_s) \end{pmatrix}$.

Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist

$$\left(\bigoplus_{k=1}^{s} N(p_k)\right)^m = \bigoplus_{k=1}^{s} N(p_k)^m = \begin{pmatrix} N(p_1)^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & N(p_s)^m \end{pmatrix},$$

die Matrix $\mathcal{N}(p)$ ist also nilpotent vom Nilpotenzindex p_1, denn p_1 ist die größte der Zahlen p_k, $1 \leq k \leq s$.

3.3.25 Definition: Sei p eine Partition von n. Wir nennen $\mathcal{N}(p)$ eine **nilpotente Normalform zur Partition** p.

Wir werden den Rest der Kurseinheit darauf verwenden, zu zeigen, dass diese Definition Sinn macht. Wir werden zeigen, dass $\mathcal{N}(p)$ und $\mathcal{N}(p')$ genau dann ähnlich sind, wenn die Partitionen p und p' gleich sind, und dass jede nilpotente $n \times n$-Matrix ähnlich zu einer nilpotenten Normalform $\mathcal{N}(p)$ für eine Partition p von n ist.

Bestimmen wir noch die nilpotenten Normalformen zu den Partitionen von 5. (Die Leerstellen sollen dazu dienen, den Aufbau der Matrizen zu verdeutlichen. Die nicht ausgefüllten Einträge sind Null.)

$$\mathcal{N}((5)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{N}((4,1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}((3,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{N}((3,1,1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}((2,2,1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{N}((2,1,1,1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}((1,1,1,1,1)) = 0.$$

3.3.26 Aufgabe: Bestimmen Sie die nilpotenten Normalformen zu den Partitionen von 4.

3.3.3 Wann sind $\mathcal{N}(p)$ und $\mathcal{N}(p')$ ähnlich?

Der Inhalt dieses Abschnitts sollte klar sein, und eine Antwort auf die Frage habe ich im letzten Abschnitt bereits gegeben. Es fehlt also nur noch der Beweis.

3.3.27 Aufgabe: Berechnen Sie

$$\mathrm{Rg}(N^{i-1}) - \mathrm{Rg}(N^i) \text{ für alle } i \geq 1$$

für alle nilpotenten Normalformen N zu den Partitionen von 5.

Nach dieser Aufgabe wird Sie das folgende Lemma, die Schlüsselidee im Beweis des folgenden Satzes, nicht mehr überraschen.

3.3.28 Lemma: Sei $p = (p_1, \ldots, p_s)$ eine Partition von n, und sei $\mathcal{N}(p)$ die nilpotente Normalform zu p. Für alle $1 \leq i \leq p_1$ sei $r_i = \mathrm{Rg}(\mathcal{N}(p)^{i-1}) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}(p)^i)$. Dann gilt

$$(r_1, \ldots, r_{p_1}) = p^*.$$

Beweis: Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definiert durch $f(v) = \mathcal{N}(p)v$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$. Seien $e_1, \ldots, e_n$ die Vektoren der Standardbasis von $\mathbb{K}^n$. Es ist $n = \sum\limits_{k=1}^{s} p_k$.

Wir fassen die Vektoren der Standardbasis folgendermaßen zu s Systemen von

Vektoren zusammen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= (e_1, \ldots, e_{p_1}) \\
&\vdots \\
\mathcal{E}_k &= (e_{p_1+\cdots+p_{k-1}+1}, \ldots, e_{p_1+\cdots+p_k}) \\
&\vdots \\
\mathcal{E}_s &= (e_{p_1+\cdots+p_{s-1}+1}, \ldots, e_{p_1+\cdots+p_s} = e_n).
\end{aligned}$$

Wir indizieren die Vektoren in diesen Systemen folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= (e_{11}, \ldots, e_{1p_1}) \\
&\vdots \\
\mathcal{E}_k &= (e_{k1}, \ldots, e_{kp_k}) \\
&\vdots \\
\mathcal{E}_s &= (e_{s1}, \ldots, e_{sp_s}).
\end{aligned}$$

Beachten Sie: Wenn wir die Basisvektoren zeilenweise in die Kästchen des zu p gehörenden Diagramms schreiben, dann steht in dem Kästchen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte des Diagramms das Basiselement e_{ij}. Somit finden wir in der j-ten Spalte des Diagramms die Basisvektoren $e_{1j}, \ldots, e_{q_j j}$. Dabei bezeichnet $q = (q_1, \ldots, q_{p_1})$ die zu p duale Partition.

Für alle $1 \leq i \leq q_1 = s$ und alle $1 \leq j \leq p_i$ gilt

$$f(e_{ij}) = \begin{cases} e_{i,j-1}, & \text{falls } j > 1, \\ 0, & \text{falls } j = 1. \end{cases}$$

Es folgt

$$\operatorname{Kern}(f) = \langle e_{i1} \mid 1 \leq i \leq q_1 \rangle,$$

das heißt, die Vektoren in der ersten Spalte des Diagramms von p bilden eine Basis von $\operatorname{Kern}(f)$.

Mit Induktion folgt für alle $r \geq 1$ ($1 \leq i \leq q_1$ und $1 \leq j \leq p_i$)

$$f^r(e_{ij}) = \begin{cases} e_{i,j-r}, & \text{falls } j > r, \\ 0, & \text{falls } j \leq r, \end{cases}$$

die Vektoren in den ersten r Spalten des Diagramms zu p liegen also im Kern von f^r. Damit ist

$$\langle e_{ij} \mid 1 \leq i \leq q_j \text{ und } 1 \leq j \leq r \rangle \subseteq \operatorname{Kern}(f^r).$$

Sei umgekehrt $x \in \operatorname{Kern}(f^r)$. Dann gibt es Skalare $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq q_1 = s$, $1 \leq j \leq p_i$, mit

$$\begin{array}{rcl} x & = & \ a_{11}e_{11} + \cdots + a_{1p_1}e_{1p_1} \\ & & +\ a_{21}e_{21} + \cdots + a_{2p_2}e_{2p_2} \\ & & \ \vdots \\ & & +\ a_{s1}e_{s1} + \cdots + a_{sp_s}e_{sp_s}. \end{array}$$

Es folgt

$$\begin{array}{rcl} f^r(x) & = & \ a_{1r+1}e_{11} + \cdots + a_{1p_1}e_{1p_1-r} \\ & & +\ a_{2r+1}e_{21} + \cdots + a_{2p_2}e_{2p_2-r} \\ & & \ \vdots \\ & & +\ a_{sr+1}e_{s1} + \cdots + a_{sp_s}e_{sp_s-r} \\ & = & \ 0, \end{array}$$

wobei wir die Vektoren e_{ij} mit $j \leq 0$ als 0 definieren. Es folgt $a_{ij} = 0$ für alle $1 \leq i \leq q_1 = s$ und $j > r$, also $x \in \langle e_{ij} \mid 1 \leq i \leq q_j \text{ und } 1 \leq j \leq r \rangle$. Somit gilt

$$\langle e_{ij} \mid 1 \leq i \leq q_j \text{ und } 1 \leq j \leq r \rangle = \operatorname{Kern}(f^r).$$

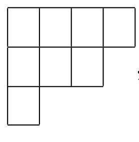
Da die Vektoren dieses Erzeugendensystems linear unabhängig sind, folgt, dass $\dim(\operatorname{Kern}(f^r)) = \sum\limits_{j=1}^{r} q_j$ ist. Dann gilt

$$\operatorname{Rg}(\mathcal{N}(p)^r) = \operatorname{Rg}(f^r) = n - \sum_{j=1}^{r} q_j,$$

denn mit Rangsatz (vergleiche Mathematische Grundlagen) gilt $\dim(V) = \operatorname{Rg}(f^r) + \dim(\operatorname{Kern}(f^r))$. Für alle $1 \leq r \leq p_1$ folgt

$$\operatorname{Rg}(\mathcal{N}(p)^{r-1}) - \operatorname{Rg}(\mathcal{N}(p)^r) = n - \sum_{j=1}^{r-1} q_j - n + \sum_{j=1}^{r} q_j = q_r,$$

also $(r_1, \ldots, r_{p_1}) = (q_1, \ldots, q_{p_1}) = p^*$. □

3.3.29 Beispiel: Machen wir ein konkretes Beispiel zum Beweis dieses Lemmas. Sei $p = (4, 3, 1)$ eine Partition von 8. Das zugehörige Diagramm ist , die zu p duale Partition ist $q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (3, 2, 2, 1)$.

Es ist

$$\mathcal{N}(p) = N(4) \oplus N(3) \oplus N(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seien $e_1, \ldots, e_8$ die Vektoren der Standardbasis von $\mathbb{K}^8$. Wir indizieren sie wie im Beweis um und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= (e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}) \\ \mathcal{E}_2 &= (e_{21}, e_{22}, e_{23}) \\ \mathcal{E}_3 &= (e_{31}). \end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung tragen wir die Basisvektoren in das zu p gehörige Diagramm ein.

e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}
e_{21}	e_{22}	e_{23}	
e_{31}			

Sei f wie im Beweis des Lemmas. Die Abbildung f verschiebt jeden Basisvektor um eine Position nach links, die Vektoren ganz links werden auf 0 abgebildet. Die Basisvektoren in der ersten Spalte des Diagramms

e_{11}
e_{21}
e_{31}

bilden eine Basis von Kern(f), und die Vektoren in dem Diagramm

e_{11}	e_{12}	e_{13}
e_{21}	e_{22}	

sind eine Basis des Bildes von f.
Es gilt

$$\operatorname{Rg}(\mathcal{N}(p)^0) - \operatorname{Rg}(\mathcal{N}(p)^1) = 8 - \dim(\operatorname{Bild}(f)) = 8 - 5 = 3.$$

Die Vektoren

e_{12}
e_{22}

in der zweiten Spalte des Diagramms der Basisvektoren von $\mathbb{K}^8$ liegen in Kern(f^2) und bilden zusammen mit den Vektoren

$$\begin{array}{|c|}\hline e_{11}\\\hline e_{21}\\\hline e_{31}\\\hline\end{array}$$

eine Basis von Kern(f^2). Es ist

$$\begin{array}{|c|c|}\hline e_{11} & e_{12}\\\hline e_{21} & \multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}$$

eine Basis von Bild(f^2). Es gilt

$$\mathrm{Rg}(\mathcal{N}(p)^1) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}(p)^2) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) - \dim(\mathrm{Bild}(f^2)) = 5 - 3 = 2.$$

Die Vektoren in der dritten Spalte $\begin{array}{|c|}\hline e_{13}\\\hline e_{23}\\\hline\end{array}$ des Diagramms der Basisvektoren von $\mathbb{K}^8$ liegen im Kern von f^3, und sie bilden zusammen mit den Vektoren $\begin{array}{|c|}\hline e_{11}\\\hline e_{21}\\\hline e_{31}\\\hline\end{array}$ und $\begin{array}{|c|}\hline e_{12}\\\hline e_{22}\\\hline\end{array}$ eine Basis von Kern(f^3). Es ist $\boxed{e_{11}}$ eine Basis von Bild(f^3). Es gilt

$$\mathrm{Rg}(\mathcal{N}(p)^2) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}(p)^3) = \dim(\mathrm{Bild}(f^2)) - \dim(\mathrm{Bild}(f^3)) = 3 - 1 = 2.$$

Der Vektor $\boxed{e_{14}}$ in der vierten Spalte des Diagramms bildet zusammen mit $\begin{array}{|c|}\hline e_{11}\\\hline e_{21}\\\hline e_{31}\\\hline\end{array}$ und $\begin{array}{|c|}\hline e_{12}\\\hline e_{22}\\\hline\end{array}$ und $\begin{array}{|c|}\hline e_{13}\\\hline e_{23}\\\hline\end{array}$ eine Basis von Kern(f^4). Es ist Bild$(f^4) = \{0\}$, und es folgt

$$\mathrm{Rg}(\mathcal{N}(p)^3) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}(p)^4) = \dim(\mathrm{Bild}(f^3)) - \dim(\mathrm{Bild}(f^4)) = 1 - 0 = 1.$$

Es ist $\mathrm{Rg}(\mathcal{N}(p)^{r-1}) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}(p)^r)$ die Anzahl der Vektoren in der r-ten Spalte des Diagramms der Basisvektoren von $\mathbb{K}^8$, und auf diese Weise erhalten wir die zu p duale Partition.

Der folgende Satz beantwortet die im letzten Abschnitt gestellte Frage:

3.3.30 Satz: (Ähnlichkeit von nilpotenten Normalformen)

Seien p und p' Partitionen von n.

Die nilpotenten Normalformen $\mathcal{N}(p)$ und $\mathcal{N}(p')$ sind genau dann ähnlich, wenn $p = p'$ ist.

Beweis: Wenn $p = p'$, dann sind $\mathcal{N}(p)$ und $\mathcal{N}(p')$ gleich, also ähnlich. Die Beweisrichtung $\Leftarrow$ ist damit erledigt. Für die andere Implikation nehmen wir an, dass $\mathcal{N}(p)$ und $\mathcal{N}(p')$ ähnlich sind. Sei S eine invertierbare Matrix, sodass $\mathcal{N}(p) = S^{-1}\mathcal{N}(p')S$ ist. Für alle $r \geq 0$ gilt $\mathcal{N}(p)^r = S^{-1}\mathcal{N}(p')^r S$, somit sind $\mathcal{N}(p)^r$ und $\mathcal{N}(p')^r$ ähnlich. Da ähnliche Matrizen denselben Rang haben, folgt

$$\mathrm{Rg}(\mathcal{N}(p)^{r-1}) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}(p)^r) = \mathrm{Rg}(\mathcal{N}(p')^{r-1}) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}(p')^r)$$

für alle $r \geq 1$. Somit gilt $p^* = p'^*$ mit dem Lemma, und es folgt $p = p'$. □

3.3.4 Die Rangpartition eines nilpotenten Endomorphismus

In diesem Abschnitt seien V ein Vektorraum der Dimension n und $f : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus vom Nilpotenzindex m.

Bei unserer Untersuchung der Konjugationsklassen nilpotenter Matrizen werden wir im ersten Schritt dem Endomorphismus f eine Partition von n zuordnen. Als Vorbereitung dafür dienen die folgenden Lemmata.

Für alle $0 \leq j \leq m$ setze $V_j = \mathrm{Kern}(f^j)$.

3.3.31 Lemma: Es gilt $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V$.

Beweis: Es ist $f^0 = \mathrm{id}_V$, also $\mathrm{Kern}(f^0) = \{0\} = V_0$.

Ferner ist $f^m = 0$, also $\mathrm{Kern}(f^m) = V = V_m$.

Sei also $0 < j < m$. Sei $v \in V_{j-1}$. Dann gilt $f^{j-1}(v) = 0$, also $f(f^{j-1}(v)) = f^j(v) = 0$, und es folgt $v \in V_j$. Somit gilt $V_{j-1} \subseteq V_j$, die Behauptung. □

Als Kern einer linearen Abbildung ist V_{j-1} ein Unterraum von V, und da $V_{j-1} \subseteq V_j$, folgt, dass V_{j-1} ein Unterraum von V_j ist.

3.3.32 Definition: Eine Kette von Unterräumen der Form $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V$ eines Vektorraums V heißt **Filtrierung** von V. Gilt für eine Filtrierung $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V$ von V, dass $V_j = \mathrm{Kern}(f^j)$ für alle $0 \leq j \leq m$, wobei f ein nilpotenter Endomorphismus mit Nilpotenzindex

m ist, so sagen wir, dass $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V$ die **Filtrierung von V bezüglich f** ist.

3.3.33 Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{R})$, und sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch $f(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^4 = V$. Bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ von V gilt ${}_{\mathcal{E}}\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(f) = A$. Wir berechnen die Filtrierung von $\mathbb{R}^4$ bezüglich f.

Es ist $V_0 = \mathrm{Kern}(f^0) = \{0\}$.

Der Unterraum V_1 ist definiert durch $V_1 = \mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(A)$, wir müssen also die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ bilden. Die Treppennormalform zu A ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, und von der lesen wir die Lösungen

$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ab.

Es ist $V_2 = \mathrm{Kern}(f^2) = \mathrm{Kern}(A^2)$, und $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die Treppennormalform zu A^2 ist $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es folgt $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Es ist $V_3 = \mathrm{Kern}(f^3) = \mathrm{Kern}(A^3) = \mathrm{Kern}(0) = V$, und die gesuchte Filtrierung zu f ist

$$\{0\} \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq V.$$

Sei nun wieder $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V$ die Filtrierung von V bezüglich eines nilpotenten Endomorphismus f. Da V_{j-1} ein Unterraum von V_j ist, können wir für alle $1 \leq j \leq m$ die Faktorräume V_j/V_{j-1} bilden.

3.3.34 Lemma: Für alle $0 < j < m$ ist die Abbildung $\overline{f}\colon V_{j+1}/V_j \to V_j/V_{j-1}$, definiert durch $\overline{f}(x + V_j) = f(x) + V_{j-1}$ für alle $x + V_j \in V_{j+1}/V_j$ wohldefiniert, linear und injektiv.

Beweis:

wohldefiniert: Wir zeigen zunächst, dass $\overline{f}(V_{j+1}/V_j) = \text{Bild}(\overline{f}) \subseteq V_j/V_{j-1}$, dass die Zuordnung also überhaupt Sinn macht. Sei $x + V_j \in V_{j+1}/V_j$. Dann liegt x in $V_{j+1} = \text{Kern}(f^{j+1})$. Es gilt also

$$f^{j+1}(x) = 0 = f^j(f(x)), \text{ also } f(x) \in V_j,$$

und es folgt $\overline{f}(x + V_j) \in V_j/V_{j-1}$.

Seien nun $x, y \in V_{j+1}$, und sei $x + V_j = y + V_j$. Es folgt $x - y \in V_j$.

Zu zeigen ist, dass $\overline{f}(x + V_j) = \overline{f}(y + V_j)$, dass also $f(x) - f(y) \in V_{j-1} = \text{Kern}(f^{j-1})$.

Es gilt $f^{j-1}(f(x) - f(y)) = f^j(x) - f^j(y) = f^j(x - y) = 0$, denn $x - y \in V_j$. Somit gilt $f(x) - f(y) \in V_{j-1}$, und es folgt, dass $\overline{f}$ wohldefiniert ist.

linear: Seien $x + V_j, y + V_j \in V_{j+1}/V_j$, und sei $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{f}((x + V_j) + (y + V_j)) &= \overline{f}((x + y) + V_j) \\ &= f(x + y) + V_{j-1} \\ &= (f(x) + f(y)) + V_{j-1} \\ &= (f(x) + V_{j-1}) + (f(y) + V_{j-1}) \\ &= \overline{f}(x + V_j) + \overline{f}(y + V_j) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \overline{f}(a(x + V_j)) &= \overline{f}(ax + V_j) \\ &= f(ax) + V_{j-1} \\ &= af(x) + V_{j-1} \\ &= a\overline{f}(x + V_j). \end{aligned}$$

Die Abbildung $\overline{f}$ ist also linear.

injektiv: Sei $x + V_j \in \text{Kern}(\overline{f})$. Dann gilt

$$0 + V_{j-1} = \overline{f}(x + V_j) = f(x) + V_{j-1}.$$

Es folgt $f(x) - 0 = f(x) \in V_{j-1}$. Somit gilt

$$f^{j-1}(f(x)) = f^j(x) = 0, \text{ also } x \in V_j.$$

Wieder folgt $x + V_j = 0 + V_j$. Da $\text{Kern}(\overline{f}) = \{0 + V_j\}$, folgt, dass $\overline{f}$ injektiv ist.

$\square$

3.3.35 Lemma: Für alle $1 \leq j \leq m$ sei $q_j = \dim(V_j/V_{j-1})$. Dann gilt

$$q_j = \mathrm{Rg}(f^{j-1}) - \mathrm{Rg}(f^j).$$

Beweis: Mit dem Rangsatz gilt $\dim(V_j) = \dim(V) - \mathrm{Rg}(f^j)$. Mit der Dimensionsformel für Faktorräume folgt

$$q_j = \dim(V_j) - \dim(V_{j-1}) = n - \mathrm{Rg}(f^j) - n + \mathrm{Rg}(f^{j-1}) = \mathrm{Rg}(f^{j-1}) - \mathrm{Rg}(f^j).$$

□

3.3.36 Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{R})$, und sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$. Es ist $\mathrm{Rg}(f^i) = \mathrm{Rg}(A^i)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Wir hatten in Beispiel 3.3.2 berechnet, dass

$$A^0 = I_4,\ A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = 0 \text{ ist,}$$

die Matrix A ist also nilpotent mit Nilpotenzindex 3. Es sind

$$\begin{array}{lclclcl} q_1 & = & \mathrm{Rg}(A^0) - \mathrm{Rg}(A) & = & 4-2 & = & 2, \\ q_2 & = & \mathrm{Rg}(A) - \mathrm{Rg}(A^2) & = & 2-1 & = & 1, \\ q_3 & = & \mathrm{Rg}(A^2) - \mathrm{Rg}(A^3) & = & 1-0 & = & 1. \end{array}$$

3.3.37 Proposition: (Die Rangpartition eines nilpotenten Endomorphismus)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $f : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus mit Nilpotenzindex m. Für alle $1 \leq j \leq m$ sei $q_j = \mathrm{Rg}(f^{j-1}) - \mathrm{Rg}(f^j)$. Dann ist $q = (q_1, \ldots, q_m)$ eine Partition von n.

Beweis: Es ist

$$\begin{array}{lcl} \sum\limits_{j=1}^{m} q_j & = & \sum\limits_{j=1}^{m} (\mathrm{Rg}(f^{j-1}) - \mathrm{Rg}(f^j)) \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{m} (n - \dim(\mathrm{Kern}(f^{j-1})) - n + \dim(\mathrm{Kern}(f^j))) \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{m} (\dim(V_j) - \dim(V_{j-1})) \\ & = & \dim(V_m) + \sum\limits_{j=1}^{m-1} \dim(V_j) - \sum\limits_{j=1}^{m-1} \dim(V_j) - \dim(V_0) \\ & = & n - 0 = n. \end{array}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $q_j \geq q_{j+1}$ für alle $1 \leq j < m$, und dass $q_m > 0$.

Mit Lemma 3.3.34 haben wir eine injektive, lineare Abbildung $\overline{f} : V_{j+1}/V_j \to V_j/V_{j-1}$. Mit dem Rangsatz folgt $\dim(V_{j+1}/V_j) = \dim(\mathrm{Kern}(\overline{f})) + \dim(\mathrm{Bild}(\overline{f}))$, und da $\dim(\mathrm{Kern}(\overline{f})) = 0$, folgt $\dim(V_{j+1}/V_j) = \dim(\mathrm{Bild}(\overline{f}))$.

Es ist $\mathrm{Bild}(\overline{f})$ ein Unterraum von V_j/V_{j-1}, und wir erhalten die Abschätzung

$$q_{j+1} = \dim(V_{j+1}/V_j) = \dim(\mathrm{Bild}(\overline{f})) \leq \dim(V_j/V_{j-1}) = q_j.$$

Da m der Nilpotenzindex von f ist, folgt $f^{m-1} \neq 0$, also gibt es ein $v \in V$ mit $f^{m-1}(v) \neq 0$, also $v \notin V_{m-1}$. Es folgt $\dim(V_m/V_{m-1}) = q_m \neq 0$. Somit ist q eine Partition von n. $\square$

3.3.38 Definition: Wir nennen $q = (q_1, \ldots, q_m)$ mit $q_j = \mathrm{Rg}(f^{j-1}) - \mathrm{Rg}(f^j)$ für alle $1 \leq j \leq m$ die **Rangpartition zu** f.

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ eine nilpotente Matrix mit Nilpotenzindex m. Dann ist $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, definiert durch $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ ein nilpotenter Endomorphismus und es gilt $\mathrm{Rg}(f^j) = \mathrm{Rg}(A^j)$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Für alle $1 \leq j \leq m$ sei $q_j = \mathrm{Rg}(A^{j-1}) - \mathrm{Rg}(A^j)$. Aus Proposition 3.3.37 folgt, dass $q = (q_1, \ldots, q_m)$ eine Partition von n ist, und wir nennen q die **Rangpartition** zu A.

3.3.39 Bemerkung: Sei $f : V \to V$ nilpotent, und sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Sei $A = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Dann sind die Rangpartitionen von f und A gleich.

Beweis: Offenbar, denn es ist $\mathrm{Rg}(f^i) = \mathrm{Rg}({}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f^i)) = \mathrm{Rg}(A^i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. $\square$

Aus dem Hauptsatz über nilpotente Endomorphismen/Matrizen, den wir im folgenden Abschnitt beweisen werden, wird folgen, dass auch die Umkehrung dieser Bemerkung gilt. Das heißt, wir werden zeigen: Wenn f und A nilpotent sind und dieselbe Rangpartition haben, dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $A = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ ist.

3.3.5 Der Hauptsatz

Die zentrale Idee im Beweis des Hauptsatzes ist folgendes Lemma:

3.3.40 Lemma: Sei $f : V \to V$ nilpotent, und sei $q = (q_1, \ldots, q_m)$ die Rangpartition zu f. Dann gibt es eine Basis (v_{ij}) mit $1 \leq j \leq m$ und $1 \leq i \leq q_j$ von V, sodass

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} v_{i,j-1}, & \text{falls } j > 1 \\ 0, & \text{falls } j = 1. \end{cases}$$

Beweis: Sei $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V$ die Filtrierung von V bezüglich f.

Wir konstruieren eine solche Basis induktiv, wobei wir im ersten Schritt die Basiselemente $v_{1m}, \dots, v_{q_m m}$ konstruieren.

Seien $v_{1m}, \dots, v_{q_m m}$ so gewählt, dass $(v_{1m} + V_{m-1}, \dots, v_{q_m m} + V_{m-1})$ eine Basis von V_m/V_{m-1} ist. Dann sind $v_{1m}, \dots, v_{q_m m}$ linear unabhängig, denn für $a_1, \dots, a_{q_m} \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^{q_m} a_i v_{im} = 0$ gilt $\sum_{i=1}^{q_m} a_i(v_{im} + V_{m-1}) = 0 + V_{m-1}$, und es folgt $a_1, \dots, a_{q_m} = 0$.

Im j-ten Schritt, $1 < j \leq m$, nehmen wir an, dass wir Vektoren

$$v_{1,m-j+2}, \dots, v_{q_{m-j+2},m-j+2}$$

so konstruiert haben, dass $(v_{1,m-j+2} + V_{m-j+1}, \dots, v_{q_{m-j+2},m-j+2} + V_{m-j+1})$ eine Basis von V_{m-j+2}/V_{m-j+1} ist. Setze

$$v_{1,m-j+1} = f(v_{1,m-j+2}), \dots, v_{q_{m-j+2},m-j+1} = f(v_{q_{m-j+2},m-j+2}).$$

Da $\overline{f} : V_{m-j+2}/V_{m-j+1} \to V_{m-j+1}/V_{m-j}$ injektiv ist (Lemma 3.3.34), sind

$$f(v_{1,m-j+2}) + V_{m-j}, \dots, f(v_{q_{m-j+2},m-j+2}) + V_{m-j}$$

linear unabhängig, und wie im ersten Schritt folgt, dass $v_{1,m-j+1}, \dots, v_{q_{m-j+2},m-j+1}$ linear unabhängig in V_{m-j+1} sind. Wir ergänzen

$$v_{1,m-j+1} + V_{m-j}, \dots, v_{q_{m-j+2},m-j+1} + V_{m-j}$$

durch Vektoren $v_{q_{m-j+2}+1,m-j+1} + V_{m-j}, \dots, v_{q_{m-j+1},m-j+1} + V_{m-j}$ zu einer Basis von V_{m-j+1}/V_{m-j}, und die im j-ten Schritt konstruierten Vektoren sind

$$v_{1,m-j+1}, \dots, v_{q_{m-j+1},m-j+1}.$$

Auf diese Weise erhalten wir $\sum_{j=1}^{m} q_j = n$ Vektoren, nach Konstruktion gilt $f(v_{ij}) = v_{i,j-1}$ für alle $j > 1$. Ferner gilt $f(v_{i1}) = 0$ für alle $1 \leq i \leq q_1$, denn $v_{i1} \in V_1 = \mathrm{Kern}(f)$.

Es bleibt zu zeigen, dass die konstruierten Vektoren linear unabhängig sind. Wir beweisen dies mit Induktion nach j, wobei $1 \leq j \leq m$ ist.

Sei $j = 1$. Die Vektoren $v_{11}, \dots, v_{q_1 1}$ sind linear unabhängig, da $(v_{11}+V_0, \dots, v_{q_1 1}+V_0)$ eine Basis von V_1/V_0 ist.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $v_{11}, \dots, v_{q_1 1}, \dots, v_{1j}, \dots, v_{q_j j}$ linear unabhängig sind. Sei

$$0 = \sum_{i=1}^{q_1} a_{i1} v_{i1} + \cdots + \sum_{i=1}^{q_j} a_{ij} v_{ij} + \sum_{i=1}^{q_{j+1}} a_{i,j+1} v_{i,j+1}.$$

Wir wenden f auf diese Gleichung an und erhalten

$$0 = \sum_{i=1}^{q_1} a_{i1} f(v_{i1}) + \cdots + \sum_{i=1}^{q_j} a_{ij} f(v_{ij}) + \sum_{i=1}^{q_{j+1}} a_{i,j+1} f(v_{i,j+1}) = \sum_{i=1}^{q_2} a_{i2} v_{i1} + \cdots + \sum_{i=1}^{q_{j+1}} a_{i,j+1} v_{ij}.$$

Da die Vektoren $v_{11}, \dots, v_{q_1 1}, \dots, v_{1j}, \dots, v_{q_j j}$ linear unabhängig sind, folgt, dass die Skalare $a_{12}, \dots, a_{q_2 2}, \dots, a_{1,j+1}, \dots, a_{q_{j+1},j+1}$ Null sind. Setzen wir dies in der ersten Gleichung ein, so erhalten wir $0 = \sum_{i=1}^{q_1} a_{i1} v_{i1}$, und es folgt $a_{i1} = 0$ für alle $1 \leq i \leq q_1$. Da $\dim(V) = n$, sind diese n linear unabhängigen Vektoren bereits eine Basis von V. □

3.3.41 Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^4$, und sei $f : V \to V$ definiert durch $f(v) = Av$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{R})$. Wir hatten oben in Beispiel 3.3.33 gesehen, dass

$$\{0\} \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq V$$

die Filtrierung von V bezüglich f ist. Um eine Basis von V wie im Lemma zu finden, gehen wir wie im Beweis vor.

Es ist $V_3 = V$, und wir wählen einen Vektor $v_{13} \in V$, der nicht in V_2 liegt. Etwa $v_{13} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da $\dim(V_3/V_2) = 1$, und da $v_{13} + V_2 \neq 0 + V_2$, bildet $(v_{13} + V_2)$ eine Basis von V_3/V_2.

Es ist $v_{12} = Av_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Da $\dim(V_2/V_1) = 1$, ist $(v_{12} + V_1)$ eine Basis von V_2/V_1.

Es ist $v_{11} = A^2 v_{13} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da $\dim(V_1/V_0) = 2$, ergänzen wir $v_{11} + V_0$ durch einen Vektor $v_{21} + V_0$ zu einer Basis von V_1/V_0, etwa durch $v_{21} + V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + V_0$.

3.3.42 Satz: Sei $f : V \to V$ nilpotent, und sei q die Rangpartition zu f. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass die Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ eine nilpotente Normalform $\mathcal{N}(p)$ ist. Dabei ist p die zu q duale Partition.

Beweis: Sei (v_{ij}) mit $1 \leq j \leq m$ und $1 \leq i \leq q_j$ die in Lemma 3.3.40 konstruierte Basis von V, sodass gilt:

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} v_{i,j-1}, & \text{falls } j > 1 \\ 0, & \text{falls } j = 1 \text{ ist.} \end{cases}$$

Für alle $1 \leq j \leq m$ tragen wir die Vektoren $v_{1j}, \ldots, v_{q_j j}$ in die Zeilen des Diagramms zu der Partition q ein. In der k-ten Spalte des Diagramms finden wir die Vektoren $v_{k1}, \ldots, v_{kp_k}$, wobei $p = (p_1, \ldots, p_{q_1})$ die zu q duale Partition ist. Für alle $1 \leq k \leq q_1$ setzen wir $\mathcal{B}_k = (v_{k1}, \ldots, v_{kp_k})$ und $W_k = \langle v_{k1}, \ldots, v_{kp_k} \rangle$. Es ist $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{q_1}$, denn $W_1, \ldots, W_{q_1}$ sind Unterräume von V und $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{q_1}$ ist eine Basis von V (siehe Proposition 3.2.39). Für alle $1 \leq k \leq q_1$ sei

$$f_k : W_k \to W_k \text{ definiert durch } f_k(v) = f(v) \text{ für alle } v \in W_k.$$

Bezüglich der Basis $\mathcal{B}_k$ ist ${}_{\mathcal{B}_k}\mathrm{M}_{\mathcal{B}_k}(f_k) = N(p_k)$, wobei $N(p_k)$ die in 3.3.24 definierte Matrix

$$N(p_k) = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{p_k p_k}(\mathbb{K}) \text{ mit } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i + 1 \\ 0, & \text{falls } j \neq i + 1 \end{cases} \text{ ist .}$$

Bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{q_1}$ gilt

$$ {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \bigoplus_{k=1}^{q_1} N(p_k) = \mathcal{N}(p).$$

□

3.3.43 Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^4$, und sei $f : V \to V$ definiert durch $f(v) = Av$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{R}).$$

Die Rangpartition zu f ist $q = (q_1, q_2, q_3) = (2, 1, 1)$, und das zugehörige Diagramm ist $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$. Wir tragen die im Beispiel nach Lemma 3.3.40 bestimmte Basis von V wie im Beweis von Satz 3.3.42 in das Diagramm ein:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline v_{11} & v_{21} \\ \hline v_{12} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} v_{13} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Wir setzen $\mathcal{B}_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})$ und $\mathcal{B}_2 = (v_{21})$.

Bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

gilt

$${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = N(3) \oplus N(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zu q duale Partition ist $p = (3, 1)$.

3.3.44 Definition: Sei $\mathcal{N}(p) = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ die Matrixdarstellung eines nilpotenten Endomorphismus. Wir nennen p die **Partition zu** f und $\mathcal{N}(p)$ die **nilpotente Normalform zu** f.

Die Matrix-Version des Satzes lautet:

3.3.45 Satz: Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ eine nilpotente Matrix, und sei q die Rangpartition zu A. Dann ist A ähnlich zu $\mathcal{N}(p)$, wobei p die zu q duale Partition ist.

Beweis: Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definiert durch $f(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{K}^n$. Dann ist f nilpotent, und mit Satz 3.3.42 gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{K}^n$, sodass ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{N}(p)$

ist, wobei p die zu q duale Partition ist. Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$. Dann ist $A = {}_{\mathcal{E}}\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(f)$. Sei $S = {}_{\mathcal{E}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n})$. Die Spalten von S sind die Vektoren der Basis $\mathcal{B}$, und es gilt $S^{-1}AS = \mathcal{N}(p)$. □

3.3.46 Beispiel: Sei A wie in den vorherigen Beispielen. Sei $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Es ist

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.3.47 Definition: Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ ähnlich zu der nilpotenten Normalform $\mathcal{N}(p)$. Wir nennen p die **Partition zu** A und $\mathcal{N}(p)$ die **nilpotente Normalform zu** A.

3.3.48 Aufgabe: Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 5 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{55}(\mathbb{R}).$$

Beweisen Sie, dass A nilpotent ist, bestimmen Sie die nilpotente Normalform $\mathcal{N}(p)$ von A und eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{M}_{55}(\mathbb{R})$, sodass $\mathcal{N}(p) = S^{-1}AS$ ist.

3.3.49 Satz: (Hauptsatz über nilpotente Endomorphismen)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $f : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus vom Nilpotenzindex m. Dann gilt:

1. Für alle $1 \leq i \leq m$ sei $q_i = \mathrm{Rg}(f^{i-1}) - \mathrm{Rg}(f^i)$. Dann ist $q = (q_1, \ldots, q_m)$ eine Partition von n.
2. Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ die nilpotente Normalform $\mathcal{N}(p)$ ist, und p ist die zu q duale Partition.

3. Zwei nilpotente Endomorphismen in $\mathrm{End}(V)$ sind genau dann ähnlich, wenn ihre zugehörigen nilpotenten Normalformen gleich sind.

Beweis:

1. Dies ist gerade Proposition 3.3.37.
2. Diese Behauptung ist der Satz 3.3.42 oben.
3. Seien f und g ähnliche, nilpotente Endomorphismen. Dann ist $\mathrm{Rg}(f^r) = \mathrm{Rg}(g^r)$ für alle $r \in \mathbb{N}_0$, und damit sind die Rangpartitionen von f und g gleich. Es folgt aus 2., dass die nilpotenten Normalformen gleich sind.

   Seien umgekehrt $f, g \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent mit der gleichen nilpotenten Normalform $\mathcal{N}(p)$. Seien $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$ Basen von V, sodass ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g) = \mathcal{N}(p)$ gilt. Es folgt mit Bemerkung 3.1.11, dass f und g ähnlich sind.

□

Und in der Matrix-Version lautet der Satz:

3.3.50 Satz: (Hauptsatz über nilpotente Matrizen)

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ eine nilpotente Matrix vom Nilpotenzindex m. Dann gilt:

1. Für alle $1 \leq i \leq m$ sei $q_i = \mathrm{Rg}(A^{i-1}) - \mathrm{Rg}(A^i)$. Dann ist $q = (q_1, \ldots, q_m)$ eine Partition von n.
2. A ist ähnlich zu der nilpotenten Normalform $\mathcal{N}(p)$, und p ist die zu q duale Partition.
3. Zwei nilpotente Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn ihre zugehörigen nilpotenten Normalformen gleich sind.

□

3.3.51 Korollar: Sei $f : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus, und sei A eine nilpotente Matrix. Genau dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $A = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$, wenn die Rangpartitionen von f und A gleich sind.

Beweis: Sei q die Rangpartition von f und von A. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{C}$ von V und eine invertierbare Matrix S, sodass ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(f) = \mathcal{N}(q^*) = S^{-1}AS$ ist. Da ähnliche Matrizen dieselbe Abbildung beschreiben (vergleiche Satz 3.1.5), folgt die Behauptung.

Die andere Implikation ist gerade Bemerkung 3.3.39. □

Wir schließen diese Kurseinheit mit einigen Bemerkungen.

(a) Die Funktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die jeder natürlichen Zahl n die Anzahl der Partitionen von n zuordnet, ist sehr einfach definiert. Trotzdem ist diese Funktion zahlentheoretisch nicht einfach und sehr interessant. Es gibt keine einfachen Formeln für $p(n)$, sondern nur Rekursionsformeln oder Darstellungen durch gewisse unendliche Reihen. Mit den Methoden der analytischen Zahlentheorie kann man das Wachstum von $p(n)$ für große n beschreiben. Eine erste, grobe, nicht leicht zu beweisende Abschätzung ist

$$p(n) \text{ ist ungefähr } \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{n}},$$

für $n = 100$ ist $p(n)$ damit ungefähr 199 280 895. Hier ist eine Liste von Werten von $p(n)$ für einige n:

n	$p(n)$
1	1
2	2
3	3
4	5
5	7
6	11
7	15
8	22
9	30
10	42
100	190 569 292
200	3 972 999 029 388

Diese Formel wurde erstmalig von dem indischen Mathematiker Srinivasa Ramanujan (1887 – 1920) gefunden, der ein für einen Mathematiker ungewöhnliches Leben geführt hat. Mehr zu Ramanujan finden Sie an Ihrem virtuellen Studienplatz in der Leseecke.

Wie groß auch immer $p(n)$ sein mag, $p(n)$ ist endlich. Das ist das Schöne an der Klassifikation der nilpotenten Endomorphismen. Es gibt nur endlich viele Konjugationsklassen.

(b) Überraschend ist, dass die Anzahl der Konjugationsklassen nilpotenter Endomorphismen nicht von der Mächtigkeit des Körpers $\mathbb{K}$ abhängt, über dem der

Vektorraum V definiert ist. Wenn V ein 9-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, dann gibt es $p(9) = 30$ Konjugationsklassen nilpotenter Endomorphismen von V, unabhängig davon, ob der zugrundeliegende Körper $\mathbb{F}_2$ oder $\mathbb{C}$ ist.

(c) Zu jedem nilpotenten Endomorphismus f beziehungsweise jeder nilpotenten Matrix A können wir die nilpotente Normalform mit Mitteln der linearen Algebra effektiv berechnen. Wir müssen nur die Ränge von f^i beziehungsweise A^i bestimmen, und das geht mit dem Gauß-Algorithmus. Wollen wir mehr, also die Basis $\mathcal{B}$, bezüglich der die Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ in nilpotenter Normalform ist, beziehungsweise die Matrix S, für die $S^{-1}AS$ eine nilpotente Normalform ist, so müssen wir Basen von V_i/V_{i-1} berechnen. Auch das geht letztendlich mit dem Gauß-Algorithmus.

Lösungen der Aufgaben

Lösungen der Aufgaben in 3.1

Aufgabe 3.1.8

Behauptung Wenn A und B ähnlich sind, dann haben A und B denselben Rang.

Beweis: Sei $A = S^{-1}BS$ für eine invertierbare Matrix S. Dann gilt:

$$\mathrm{Rg}(B) = \mathrm{Rg}(S^{-1}B) \text{ und } \mathrm{Rg}(S^{-1}B) = \mathrm{Rg}(S^{-1}BS),$$

und es folgt $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B)$.

Aufgabe 3.1.9 Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Beide Matrizen haben den Rang 1. Es sind $\chi_A = T^2$ und $\chi_B = (T-1)T$. Da ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom haben, folgt, dass A und B nicht ähnlich sind.

Lösungen der Aufgaben in 3.2

Aufgabe 3.2.6

1. Sei $u \in \mathbb{K}^n$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \neq 0$ von $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

   Behauptung Au ist Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

   Beweis: Da $\lambda \neq 0$, und da u nicht der Nullvektor ist, folgt $Au = \lambda u \neq 0$. Es gilt

   $$A(Au) = A(\lambda u) = \lambda Au,$$

   das heißt, Au ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. □

2. **Behauptung** Wenn $0 \in \mathbb{K}$ Eigenwert einer Matrix $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ ist, dann ist A nicht invertierbar.

   Beweis: Wir beweisen die Behauptung mit Kontraposition.

   Sei A invertierbar. Dann hat das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ genau eine Lösung, den Nullvektor. Es gibt also keinen Vektor $u \neq 0$ mit $Au = 0$. Dies zeigt, dass es keinen Eigenvektor zum Eigenwert 0 gibt, und damit ist 0 nicht Eigenwert von A. $\square$

3. Sei $u \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor von $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ und von $B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

   Behauptung Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ ist u ein Eigenvektor von $aA + bB$.

   Beweis: Nach Annahme ist $u \neq 0$. Sei u Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und Eigenvektor von B zum Eigenwert λ'. Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ ist

$$(aA + bB)u = aAu + bBu = a\lambda u + b\lambda' u = (a\lambda + b\lambda')u,$$

   das heißt, u ist Eigenvektor von $aA + bB$ zum Eigenwert $a\lambda + b\lambda'$. $\square$

Aufgabe 3.2.13

Nein, in der Regel haben A und A^T nicht dieselben Eigenvektoren. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A, aber u ist kein Eigenvektor von $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, denn $A^T u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.2.19

Behauptung Jeder Endomorphismus eines 3-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums hat einen Eigenwert.

Beweis: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 3, und sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Das charakteristische Polynom χ_f hat den Grad 3. Da es in $\mathbb{R}[T]$ keine irreduziblen Polynome vom Grad 3 gibt (vergleiche 1.4.23), ist χ_f reduzibel. Somit gilt $\chi_f = pq$, wobei p und q Polynome in $\mathbb{R}[T]$ sind, die nicht konstant sind. Es folgt, dass p oder q den Grad 1 hat. Somit ist p oder q von der Form $T - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und λ ist Nullstelle von χ_f. Da die Nullstellen von χ_f die Eigenwerte von f sind, folgt, dass f einen Eigenwert besitzt. $\square$

Eine entsprechende Aussage gilt nicht für Endomorphismen von 4-dimensionalen Vektorräumen. Als Beispiel sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, und $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sei definiert durch $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^4$. Dann gilt ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ für die kanonische Basis $\mathcal{B}$, also

$$
\begin{aligned}
\chi_f &= \det \begin{pmatrix} T & -1 & 0 & 0 \\ 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & -1 \\ 0 & 0 & 1 & T \end{pmatrix} \\
&= T \det \begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & -1 \\ 0 & 1 & T \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & T & -1 \\ 0 & 1 & T \end{pmatrix} \\
&\quad \text{mit Entwicklung nach der ersten Zeile} \\
&= T^2 \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & T \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & T \end{pmatrix} \\
&= T^2(T^2+1) + (T^2+1) \\
&= (T^2+1)(T^2+1).
\end{aligned}
$$

Wenn wir in χ_f eine beliebige reelle Zahl λ einsetzen, so erhalten wir

$$(\lambda^2+1)(\lambda^2+1) > 0,$$

und wir sehen, dass χ_f keine Nullstelle besitzt. Es folgt, dass f keine Eigenwerte hat.

Aufgabe 3.2.22

Nein, AB und BA haben in der Regel nicht dieselben Eigenvektoren.

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, und sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dann sind $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von AB, denn alle Vektoren $\neq 0$ in $\mathbb{K}^2$ sind Eigenvektoren von AB zum Eigenwert

0. Es gilt aber $BA\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, das heißt, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ist kein Eigenvektor von BA zum Eigenwert 0.

Aufgabe 3.2.29

Die Diagonalmatrizen in der Konjugationsklasse zu A sind ähnlich zu

$$D_1 = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Es ist $\chi_{D_1} = (T-2)(T-3)(T-1) = \chi_D$ für alle Diagonalmatrizen D in der Konjugationsklasse von A. Somit haben wir für D folgende Möglichkeiten:

$$D_1 = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix},$$

$$D_4 = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}, D_5 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}, D_6 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Mit Korollar 3.2.26 gilt

$$\begin{pmatrix}s_{11}\\s_{21}\\s_{31}\end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } 2,$$

$$\begin{pmatrix}s_{12}\\s_{22}\\s_{32}\end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } 3,$$

und

$$\begin{pmatrix}s_{13}\\s_{23}\\s_{33}\end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } 1.$$

Wieder mit Korollar 3.2.26 gilt

$$\text{Für } S_2 = \begin{pmatrix}s_{12}&s_{11}&s_{13}\\s_{22}&s_{21}&s_{23}\\s_{32}&s_{31}&s_{33}\end{pmatrix} \text{ ist } D_2 = S_2^{-1}AS_2,$$

$$\text{für } S_3 = \begin{pmatrix}s_{11}&s_{13}&s_{12}\\s_{21}&s_{23}&s_{22}\\s_{31}&s_{33}&s_{32}\end{pmatrix} \text{ ist } D_3 = S_3^{-1}AS_3,$$

$$\text{für } S_4 = \begin{pmatrix} s_{12} & s_{13} & s_{11} \\ s_{22} & s_{23} & s_{21} \\ s_{32} & s_{33} & s_{31} \end{pmatrix} \quad \text{ist } D_4 = S_4^{-1} A S_4,$$

$$\text{für } S_5 = \begin{pmatrix} s_{13} & s_{11} & s_{12} \\ s_{23} & s_{21} & s_{22} \\ s_{33} & s_{31} & s_{32} \end{pmatrix} \quad \text{ist } D_5 = S_5^{-1} A S_5,$$

und

$$\text{für } S_6 = \begin{pmatrix} s_{13} & s_{12} & s_{11} \\ s_{23} & s_{22} & s_{21} \\ s_{33} & s_{32} & s_{31} \end{pmatrix} \quad \text{ist } D_6 = S_6^{-1} A S_6.$$

Aufgabe 3.2.43

1. Diese Aussage ist in der Regel falsch. Sei etwa $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$, $\mathrm{Rg}(A) \neq 0$. Sei $a = 0$. Dann ist $\mathrm{Rg}(aA) = 0$. Da ähnliche Matrizen denselben Rang haben, folgt, dass A und $0A$ nicht ähnlich sind.

2. Auch diese Aussage ist falsch. Sei etwa $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{C})$.

   Es ist $\chi_A = (T-1)^2$, die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 von A ist damit $\alpha(1) = 2$. Es ist

   $$\mathrm{Kern}(A - I_2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

   die Dimension des Eigenraums zu 1 ist daher $\gamma(1) = 1$. Da $\alpha(1) \neq \gamma(1)$, folgt, dass A nicht diagonalisierbar ist.

3. Sei $A \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ diagonalisierbar.

   Behauptung Die Konjugationsklasse, die A enthält, ist genau dann endlich, wenn A genau einen Eigenwert besitzt.

   Beweis:

   $\Rightarrow$ Wir beweisen die Behauptung mit Kontraposition. Seien λ_1 und λ_2 Eigenwerte von A, und sei $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann ist A ähnlich zu $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
   Sei $r \in \mathbb{R}$, und sei $S_r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Matrix S_r ist invertierbar, und es gilt $S_r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sei

$$B_r = S_r D S_r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r(\lambda_2 - \lambda_1) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix B_r ist ähnlich zu D, also ähnlich zu A, liegt also in der Konjugationsklasse von A. Sei $r' \in \mathbb{R}$, sodass $B_r = B_{r'}$. Dann folgt

$r(\lambda_2 - \lambda_1) = r'(\lambda_2 - \lambda_1)$, und da $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, folgt $r = r'$. Für verschiedene Elemente in $\mathbb{R}$ erhalten wir also verschiedene Matrizen, die ähnlich zu A sind. Da $\mathbb{R}$ unendlich viele Elemente enthält, folgt, dass die Konjugationsklasse von A unendlich viele Elemente enthält.

$\Leftarrow$ Wenn A genau einen Eigenwert λ besitzt, dann ist A ähnlich zu $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Sei B ähnlich zu A. Dann ist B ähnlich zu D, und es gibt eine invertierbare Matrix S, sodass $\lambda I_2 = S^{-1}BS$ ist. Es folgt

$$S(\lambda I_2) = BS \quad \Rightarrow \quad \lambda S = BS \quad \Rightarrow \quad \lambda I_2 = B.$$

Es folgt $D = B$, und da auch A ähnlich zu D ist, gilt auch $D = A$. Die Konjugationsklasse, die A enthält, besteht nur aus einer einzigen Matrix, der Matrix D.

□

Aufgabe 3.2.44

1. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \det \begin{pmatrix} T-3 & -1 & -1 \\ -2 & T-4 & -2 \\ -1 & -1 & T-3 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} T-3 & -1 & 0 \\ -2 & T-4 & -T+2 \\ -1 & -1 & T-2 \end{pmatrix} \quad \text{(Spalte 2 von Spalte 3 subtrahieren)} \\
&= (T-2)\det \begin{pmatrix} T-3 & -1 & 0 \\ -2 & T-4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{((}T-2\text{) aus Spalte 3 ziehen)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (T-2)\det\begin{pmatrix} T-3 & -1 & 0 \\ -3 & T-5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (Zeile 3 zu Zeile 2 addieren)} \\
&= (T-2)\det\begin{pmatrix} T-3 & -1 \\ -3 & T-5 \end{pmatrix} \text{ (Entwicklung nach Spalte 3)} \\
&= (T-2)[(T-3)(T-5)-3] \\
&= (T-2)(T^2-8T+12) \\
&= (T-2)^2(T-6).
\end{aligned}$$

Somit sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 6$. Wir berechnen

$$\mathrm{Kern}(\lambda_1 I_3 - A) = \mathrm{Kern}(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Treppennormalform zu $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Von dieser lesen wir die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems ab und erhalten die linear unabhängigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Somit gilt

$$E(\lambda_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Nun berechnen wir

$$\mathrm{Kern}(\lambda_2 I_3 - A) = \mathrm{Kern}(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Treppennormalform zu $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$:

Wir addieren Zeile 2 zu Zeile 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir addieren das Doppelte von Zeile 1 zu Zeile 2 und Zeile 1 zu Zeile 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir teilen Zeile 2 durch 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren Zeile 2 von Zeile 1 und erhalten die Treppennormalform von A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert den Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 6, und es gilt:

$$E(\lambda_2) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da es eine Basis von Eigenvektoren zu A von $\mathbb{R}^3$ gibt, ist A diagonalisierbar, und mit $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = S_1^{-1} A S_1.$$

□

2. Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\chi_B = \det \begin{pmatrix} T-1 & -2 & -2 \\ -1 & T-2 & 1 \\ 1 & -1 & T-4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \det\begin{pmatrix} T-1 & T-3 & -2 \\ -1 & T-3 & 1 \\ 1 & 0 & T-4 \end{pmatrix} \text{ (Spalte 1 zu Spalte 2 addieren)} \\
&= (T-3)\det\begin{pmatrix} T-1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & T-4 \end{pmatrix} \text{ ((}T-3\text{) aus Spalte 2 ziehen)} \\
&= (T-3)\det\begin{pmatrix} T & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & T-4 \end{pmatrix} \text{ (Zeile 2 von Zeile 1 subtrahieren)} \\
&= (T-3)\det\begin{pmatrix} T & -3 \\ 1 & T-4 \end{pmatrix} \text{ (Entwicklung nach Spalte 2)} \\
&= (T-3)(T^2-4T+3) \\
&= (T-3)^2(T-1).
\end{aligned}$$

Somit sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$ Eigenwerte von B. Wir berechnen

$$\mathrm{Kern}(\lambda_1 I_3 - B) = \mathrm{Kern}(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Treppennormalform von $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, und wir erhalten die linear unabhängigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 3. Es folgt:

$$E(\lambda_1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Nun bestimmen wir

$$\mathrm{Kern}(\lambda_2 I_3 - B) = \mathrm{Kern}(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Die Treppennormalform zu $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, und wir erhalten den Eigenvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Der Eigenraum von B zum Eigenwert 1 ist damit

$$E(\lambda_2) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Für $S_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt dann

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_2^{-1} B S_2 .$$

$\square$

3. Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es ist

$$\begin{aligned} \chi_C &= \det \begin{pmatrix} T-1 & -1 & 0 \\ 0 & T-1 & 0 \\ 0 & 0 & T-1 \end{pmatrix} \\ &= (T-1)^3 . \end{aligned}$$

Somit hat C nur den Eigenwert $\lambda = 1$. Es ist Kern$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$ Kern $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, und es folgt, dass der Eigenraum zum Eigenwert 1 von C nicht die Dimension 3 hat. Die Matrix C ist also nicht diagonalisierbar. Es ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ die Treppennormalform von $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, somit sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängige Eigenvektoren, die eine Basis von $E(1)$ bilden.

Lösungen der Aufgaben in 3.3

Aufgabe 3.3.3

Behauptung Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ nilpotent mit Nilpotenzindex m. Dann ist A^T nilpotent mit Nilpotenzindex m.

Beweis: Sei $A^m = 0$, und sei $A^{m-1} \neq 0$. Dann gilt mit den Rechenregeln für transponierte Matrizen

$$(A^T)^m = (A^m)^T = 0^T = 0$$

und

$$(A^T)^{m-1} = (A^{m-1})^T \neq 0,$$

denn $A^{m-1} \neq 0$. Es folgt die Behauptung. □

Aufgabe 3.3.4

Behauptung Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ nilpotent mit Nilpotenzindex m, und sei B ähnlich zu A. Dann ist B nilpotent mit Nilpotenzindex m.

Beweis: Sei $S \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ invertierbar mit $A = S^{-1}BS$. Dann gilt

$$A^m = (S^{-1}BS)^m = S^{-1}BSS^{-1}BS \cdots S^{-1}BS = S^{-1}B^mS = 0.$$

Da $\mathrm{Rg}(S^{-1}B^mS) = \mathrm{Rg}(B^m) = 0$, folgt $B^m = 0$. Ferner gilt

$$A^{m-1} = S^{-1}B^{m-1}S \neq 0,$$

und es folgt $B^{m-1} \neq 0$. Dies zeigt, dass B nilpotent ist mit Nilpotenzindex m. □

Aufgabe 3.3.9

Die Umkehrung von Korollar 3.3.8 gilt nicht. Sei etwa $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$.
Dann ist $\chi_A = T(T^2+1)$, und da T^2+1 in $\mathbb{R}[T]$ irreduzibel ist, hat A nur den Eigenwert $\lambda = 0$. Mit Proposition 3.3.7 folgt aber, dass A nicht nilpotent ist.

Aufgabe 3.3.11

Auch hier gilt die Umkehrung nicht. Ein Beispiel ist etwa die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{44}(\mathbb{R})$$

in Beispiel 3.3.2, die nilpotent, aber keine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 3.3.13

Seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$A = \bigoplus_{k=1}^{3} A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.3.22

Die Partitionen von 4, ihre dualen Partitionen und die jeweiligen Diagramme sind:

$$(4): \quad \ydiagram{4}, \qquad (4)^* = (1,1,1,1): \quad \ydiagram{1,1,1,1}$$

$$(3,1): \quad \ydiagram{3,1}, \qquad (3,1)^* = (2,1,1): \quad \ydiagram{2,1,1}$$

$$(2,2): \quad \ydiagram{2,2}, \qquad (2,2)^* = (2,2): \quad \ydiagram{2,2}$$

$$(2,1,1): \quad \ydiagram{2,1,1}, \qquad (2,1,1)^* = (3,1): \quad \ydiagram{3,1}$$

$$(1,1,1,1): \quad \ydiagram{1,1,1,1}, \qquad (1,1,1,1)^* = (4): \quad \ydiagram{4}.$$

Aufgabe 3.3.26

Die zu den Partitionen von 4 gehörenden nilpotenten Normalformen sind:

$$\mathcal{N}((4)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}((3,1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}((2,1,1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}((1,1,1,1)) = 0.$$

Aufgabe 3.3.27

$$\mathcal{N}((5))^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}((5))^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}((5))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}((5))^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}((5))^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}((5))^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((5))^0) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((5))^1) &= 5 - 4 = 1, \\
\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((5))^1) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((5))^2) &= 4 - 3 = 1, \\
\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((5))^2) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((5))^3) &= 3 - 2 = 1, \\
\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((5))^3) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((5))^4) &= 2 - 1 = 1, \\
\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((5))^4) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((5))^5) &= 1 - 0 = 1.
\end{aligned}$$

Alle weiteren Differenzen sind 0.

$$\mathcal{N}((4,1))^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}((4,1))^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}((4,1))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}((4,1))^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}((4,1))^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((4,1))^0) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((4,1))^1) &= 5 - 3 = 2, \\
\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((4,1))^1) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((4,1))^2) &= 3 - 2 = 1, \\
\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((4,1))^2) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((4,1))^3) &= 2 - 1 = 1, \\
\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((4,1))^3) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((4,1))^4) &= 1 - 0 = 1.
\end{aligned}$$

Alle weiteren Differenzen sind 0.

$$\mathcal{N}((3,2))^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}((3,2))^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}((3,2))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}((3,2))^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((3,2))^0) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((3,2))^1) = 5 - 3 = 2,$$

$$\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((3,2))^1) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((3,2))^2) = 3 - 1 = 2,$$
$$\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((3,2))^2) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((3,2))^3) = 1 - 0 = 1.$$

Alle weiteren Differenzen sind 0.

$$\mathcal{N}((3,1,1))^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}((3,1,1))^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}((3,1,1))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}((3,1,1))^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((3,1,1))^0) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((3,1,1))^1) = 5 - 2 = 3,$$
$$\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((3,1,1))^1) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((3,1,1))^2) = 2 - 1 = 1,$$
$$\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((3,1,1))^2) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((3,1,1))^3) = 1 - 0 = 1.$$

Alle weiteren Differenzen sind 0.

$$\mathcal{N}((2,2,1))^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}((2,2,1))^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}((2,2,1))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((2,2,1))^0) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((2,2,1))^1) = 5 - 2 = 3,$$
$$\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((2,2,1))^1) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((2,2,1))^2) = 2 - 0 = 2.$$

Alle weiteren Differenzen sind 0.

$$\mathcal{N}((2,1,1,1))^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}((2,1,1,1))^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{N}((2,1,1,1))^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((2,1,1,1))^0) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((2,1,1,1))^1) &= 5 - 1 = 4, \\ \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((2,1,1,1))^1) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((2,1,1,1))^2) &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Alle weiteren Differenzen sind 0.

$$\mathcal{N}((1,1,1,1,1))^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{N}((1,1,1,1,1))^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Rg}(\mathcal{N}((1,1,1,1,1))^0) - \mathrm{Rg}(\mathcal{N}((1,1,1,1,1))^1) = 5 - 0 = 5.$$

Alle weiteren Differenzen sind 0.

Aufgabe 3.3.48

Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 5 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{55}(\mathbb{R}).$$

Es sind

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -25 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist A nilpotent vom Nilpotenzindex 4.

Es ist $\mathrm{Rg}(A^0) = 5$, und indem wir die Zeilen auf lineare Unabhängigkeit untersuchen, sehen wir, dass $\mathrm{Rg}(A^1) = 3$, $\mathrm{Rg}(A^2) = 2$, $\mathrm{Rg}(A^3) = 1$ und $\mathrm{Rg}(A^4) = 0$.

Es ist

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{Rg}(A^0) - \mathrm{Rg}(A^1) & = & 5-3 & = & 2, \\ \mathrm{Rg}(A^1) - \mathrm{Rg}(A^2) & = & 3-2 & = & 1, \\ \mathrm{Rg}(A^2) - \mathrm{Rg}(A^3) & = & 2-1 & = & 1, \\ \mathrm{Rg}(A^3) - \mathrm{Rg}(A^4) & = & 1-0 & = & 1. \end{array}$$

Die Rangpartition zu A ist damit $q = (2, 1, 1, 1)$.

Die zu q duale Partition ist $p = (4, 1)$, und mit dem Hauptsatz über nilpotente Matrizen folgt:

$$A \text{ ist ähnlich zu } \mathcal{N}(p) = N(4) \oplus N(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{M}_{55}(\mathbb{R})$ mit $\mathcal{N}(p) = S^{-1}AS$ zu finden, müssen wir zunächst die Filtrierung zu $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, $f(v) = Av$ für alle $v \in V = \mathbb{R}^5$ bestimmen.

Die Treppennormalform zu A ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen von dieser Matrix eine Basis $\left(\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-1\end{pmatrix}\right)$ von $\mathrm{Kern}(f)$ ab. Zur Vereinfachung multiplizieren wir den ersten Basisvektor mit -1 und den zweiten mit 3 und erhalten

$$\mathrm{Kern}(f) = V_1 = \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\-3\end{pmatrix} \right\rangle .$$

Wenn wir die Matrix $A^2 = \begin{pmatrix}0&0&11&-1&-4\\0&0&3&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ betrachten, sehen wir, dass die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ im Kern von A^2, also im Kern von f^2 liegen. Da $\mathrm{Kern}(f)$ ein Unterraum von $\mathrm{Kern}(f^2)$ ist, und da $\dim(\mathrm{Kern}(f^2)) = 3$, folgt

$$\mathrm{Kern}(f^2) = V_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\\-3\end{pmatrix} \right\rangle .$$

Es ist

$$A^3 = \begin{pmatrix}0&0&-10&2&4\\0&0&-5&1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Der Treppennormalform

$$\begin{pmatrix}0&0&1&-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

von A^3 lesen wir den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Kern von f^3 ab. Wir multiplizieren diesen Vektor mit -5. Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig von den Vektoren im Erzeugendensystem von $\mathrm{Kern}(f^2)$ ist, da $V_2 \subseteq \mathrm{Kern}(f^3)$, und da $\dim(\mathrm{Kern}(f^3)) = 4$, folgt, dass

$$\mathrm{Kern}(f^3) = V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Somit erhalten wir die Filtrierung

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq V_4 = \mathbb{R}^5$$

zu f.

Wir bestimmen nun eine Basis von $\mathbb{R}^5$ wie im Beweis von Lemma 3.3.40. Wir wählen einen Vektor $v_{14} \in V_4 \setminus V_3$, etwa den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da $\dim(V_4/V_3) = 1$, und da $v_{14} \notin V_3$, ist $v_{14} + V_3$ eine Basis von V_4/V_3. Wir bilden

$$Av_{14} = v_{13} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -10 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix} \text{ und erhalten eine Basis von } V_3/V_2,$$

$$Av_{13} = v_{12} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und erhalten eine Basis von } V_2/V_1,$$

$$Av_{12} = v_{11} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den Vektor $v_{11} + V_0$ ergänzen wir durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + V_0$ zu einer Basis von V_1/V_0, und bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -10 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

hat f die Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{N}(p)$ wie oben. Für

$$S = \begin{pmatrix} -10 & 11 & 8 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -25 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

gilt $S^{-1}AS = \mathcal{N}(p)$.