

Prof. Dr. Max Koecher, Gerhard Claus

**Kurs 01256**

**Geometrie der Ebene**

**LESEPROBE**

Fakultät für  
**Mathematik und  
Informatik**

---

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung und des Nachdrucks bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung der FernUniversität reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

# Inhaltsverzeichnis zu Kurseinheit 5

Studierhinweise zu Kurseinheit 5 . . . . .	233
<b>5 Erzeugung von Kurven, Beispiele</b>	<b>235</b>
5.0 Einleitung . . . . .	237
5.1 Polarkoordinaten und Beispiele . . . . .	238
5.2 Die Evolute einer Kurve . . . . .	245
5.3 Die Evolvente einer Kurve . . . . .	250
5.4 Die gemeine Zykloide . . . . .	253
5.5 Beispiele . . . . .	256
5.6 Geradenscharen . . . . .	263
5.7 Lösungen der Aufgaben in Kurseinheit 5 . . . . .	269

## Studierhinweise zu Kurseinheit 5

**5.1** Wer die differentialgeometrischen Grundbegriffe, insbesondere Krümmung, Bogenlänge, natürliche Gleichung einer Kurve, aus dem vierten Kapitel kennt, bis

**5.5** braucht in den ersten fünf Paragraphen dieses Kapitels wenig an Theorie hinzulernen und kann sich bei den recht zahlreichen Beispielen erholen. Bemerkenswert, wie einfach es ist, längs einer Kurve eine Winkelfunktion einzuführen, wenn man sich auf stetig-differenzierbare Kurven beschränkt (5.1.1 Polarkoordinaten). Die Rechnungen bei der Evolute und bei der Evolvente einer Kurve kann man leichter verfolgen, wenn man sich eine Tabelle der bereits bewiesenen Formeln anlegt. Der Leser sollte nach den ersten fünf Paragraphen zumindest

- die Einführung von Polarkoordinaten,
- die Begriffe Evolute, Evolvente,
- die Sätze 5.2.2, 5.3.2, Lemma 5.2.3,
- die Beziehung zwischen Evoluten- und Evolventen-Bildung

kennen und einige Beispiele selbst gerechnet haben.

**5.6** Neue Kurven erzeugt man nicht nur, indem man zur Evolute oder zur Evolvente übergeht, sondern auch mit Hilfe von Geradenscharen, nämlich als Einhüllende. Der Leser sollte

- die Beschreibung einer Geradenschar durch  $\eta(x, \tau) = 0$  (5.6.3),
- die Definition der Einhüllenden (5.6.3),
- die Formel für die Einhüllende (Satz 5.6.5),
- Satz 5.6.2 in der Formulierung von 5.6.3,
- das Resultat aus 5.6.4

voll verstanden haben und zum Teil reproduzieren können.



# Kapitel 5

## Erzeugung von Kurven, Beispiele

### 5.0 Einleitung

### 5.1 Polarkoordinaten und Beispiele

5.1.1 Polarkoordinaten

5.1.2 Eigentliche Polarkoordinaten

5.1.3 Fläche in Polarkoordinaten

5.1.4 Die Archimedische Spirale

5.1.5 CASSINIS Oval

### 5.2 Die Evolute einer Kurve

5.2.1 Definition

5.2.2 Eine erste Eigenschaft der Evolute

5.2.3 Bogenlänge der Evolute

5.2.4 Die Evolute der Ellipse

### 5.3 Die Evolvente einer Kurve

5.3.1 Definition

5.3.2 Eigenschaften der Evolvente

5.3.3 Beziehungen zwischen Evolute und Evolvente

### 5.4 Die gemeine Zyклоide

5.3.1 Definition

5.3.2 Bogenlänge und natürliche Gleichung

5.3.3 Die Evolute

## 5.5 Beispiele

- 5.5.1 Evolvente des Kreises
- 5.5.2 Graphen
- 5.5.3 Die Gleichung der Kettenlinie
- 5.5.4 Explizite Gleichung
- 5.5.5 Beweis des Hilfssatzes
- 5.5.6 Eigenschaften der Kettenlinie

## 5.6 Geradenscharen

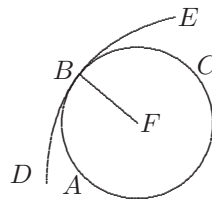
- 5.6.1 Problemstellung
- 5.6.2 Die Tangentenschar einer Kurve
- 5.6.3 Der Begriff der Einhüllenden
- 5.6.4 Die Normalenschar einer Kurve
- 5.6.5 Eine Formel für die Einhüllende

## 5.0 Einleitung

Nachdem in Kapitel 4 die grundlegenden Begriffe für ebene Kurven einschließlich ihrer Invarianten entwickelt wurden, soll in diesem Kapitel auf Prinzipien zur Erzeugung von Kurven und auf Anwendungen eingegangen werden.

Neben Beispielen wird der Zusammenhang zwischen Evolute und Evolvente einer Kurve diskutiert. Diese Begriffe gehen auf Christian HUYGENS (1629–1695) zurück. Aber noch vor 200 Jahren wurden sie recht unklar dargestellt. So schreibt A. BURJA auf Seite 307 des in 4.1.3 erwähnten Lehrbuches über den Krümmungskreis:

„Ein Zirkel berührt oder küsst eine krumme Linie in einem Punkte, wenn der Umkreis durch diesen Punkt gehet, und übrigens der Zirkel groß genug ist, um daß zwischen ihm und der krummen Linie keine andere Zirkel-Linie gezogen werden könne, die durch den nemlichen Punkt gehe. Z. E. der Zirkel  $ABC$



küsst die krumme Linie  $DBE$  im Punkte  $B$ , vorausgesetzt, daß zwischen  $BE$  und  $BC$ , oder zwischen  $BD$  und  $BA$  keine Zirkel-Linie mehr gezogen werden könne.“

Die Evolute wird wenig später auf Seite 320 wie folgt eingeführt:

„Die Evolute einer krummen Linie ist eine andere krumme Linie, in welcher sich alle Halbmesser der Krümmung der ersteren Linie endigen, oder in welche alle Mittelpunkte der küssenden Zirkel fallen.“



## 5.1 Polarkoordinaten und Beispiele

**5.1.1 Polarkoordinaten.** Bereits in 3.3.5 hatte man gesehen, dass die eigentlichen Kurven zweiten Grades eine einfache Beschreibung durch „Polarkoordinaten“ besitzen. Eine entsprechende Darstellung kann man für jede Kurve gewinnen:

**Satz.** Ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Kurve, die nicht durch 0 geht, dann gibt es zweimal stetig differenzierbare Abbildungen  $\rho, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$y = \rho \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \rho = |y|.$$

Hier ist  $\psi$  bis auf eine Konstante gegeben durch  $\dot{\psi} = \frac{1}{|y|^2} \langle y^\perp, \dot{y} \rangle$ .

Man nennt dies eine Darstellung der Kurve in *Polarkoordinaten*.

**Beweis.** Für  $z := \frac{1}{|y|}y$  gilt  $|z| = 1$ , und  $z : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist zweimal stetig differenzierbar. Nach Lemma 4.2.2 gilt

$$(*) \quad \dot{z} = \langle z^\perp, \dot{z} \rangle z^\perp.$$

Zu fest gewähltem  $\alpha \in I$  gibt es wegen  $|z| = 1$  ein  $\omega \in \mathbb{R}$  mit

$$z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \omega \\ \sin \omega \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \omega < 2\pi.$$

Nun bestimmt man eine Stammfunktion  $\psi$  von  $\langle z^\perp, \dot{z} \rangle$  mit  $\psi(\alpha) = \omega$  und definiert

$$(**) \quad x(\tau) := \begin{pmatrix} \cos \psi(\tau) \\ \sin \psi(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in I.$$

Eine Differentiation ergibt bei Weglassung der Argumente

$$\dot{x} = \dot{\psi} \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Ein Vergleich mit **(\*\*)** ergibt  $\dot{x} = \dot{\psi}x^\perp$ , und aus **(\*)** erhält man  $\dot{z} = \dot{\psi}z^\perp$ . Nach Wahl von  $\omega$  gilt weiter  $x(\alpha) = z(\alpha)$ . Damit genügen die Komponenten von  $x$  und  $z$  dem gleichen System von gewöhnlichen Differentialgleichungen und stimmen im Punkte  $\tau = \alpha$  überein. Nach dem Eindeutigkeits-Satz für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen folgt  $z(\tau) = x(\tau)$  für  $\tau \in I$ .

Man kann aber auch direkt *ohne* den Eindeutigkeits-Satz für Differentialgleichungen wie folgt schließen. Für

$$\lambda := \langle z - x, z - x \rangle$$

folgt  $\dot{\lambda} = 2\dot{\psi} \langle z^\perp - x^\perp, z - x \rangle = 0$ . Damit ist  $\lambda$  konstant, und für  $\tau = \alpha$  folgt  $\lambda = 0$ , also  $x = z$ . Die Gleichung  $z = x$  beinhaltet wegen  $y = |y|z$  gerade die Darstellung von  $y$  in der angegebenen Form.

Nach Wahl von  $\psi$  war  $\dot{\psi} = \langle z^\perp, \dot{z} \rangle$ . Man trägt hier  $z = \frac{1}{|y|}y$  ein und erhält die restliche Behauptung.

**Bemerkung.** In dem Satz ist die Abbildung  $\psi$  bis auf eine additive Konstante der Form  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , eindeutig bestimmt.

**5.1.2 Eigentliche Polarkoordinaten.** Hat man eine Kurve  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  nach Satz 5.1.1 in Polarkoordinaten gegeben,

$$(1) \quad y = \rho \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$$

mit zwei stetig differenzierbaren Abbildungen  $\rho, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so wird die Abbildung  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  im Allgemeinen nicht echt monoton wachsend sein. In der Tat, nach dem Satz gilt

$$(2) \quad \dot{\psi} = \frac{1}{|y|^2} \langle y^\perp, \dot{y} \rangle,$$

und man hat  $\dot{\psi} = 0$ , falls  $y$  und  $\dot{y}$  linear abhängig sind.

**Lemma.** Ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Kurve und ist  $\langle y^\perp, \dot{y} \rangle$  in  $I$  stets positiv, dann gibt es eine Parametertransformation  $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$  der Kurve  $y$ , so dass sich  $\bar{y} = y \circ \varphi$  schreibt als

$$\bar{y}(\tau) = \bar{\rho}(\tau) \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}, \quad \bar{\rho}(\tau) > 0, \quad \tau \in \bar{I}.$$

Eine solche Darstellung nennt man eine Darstellung in *eigentlichen Polarkoordinaten*.

**Beweis.** Nach (2) und nach der Voraussetzung gibt es eine Darstellung (1), und  $\dot{\psi}$  ist überall positiv. Dann gibt es eine zweimal stetig differenzierbare

Umkehrfunktion  $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$ , und  $\dot{\varphi}$  ist überall positiv. Damit ist  $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$  eine Parametertransformation im Sinne von 4.3.8, und die behauptete Darstellung ist mit  $\bar{\rho} = \rho \circ \varphi$  eine Folge von (1).

**Bemerkung.** Ist eine Abbildung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  in eigentlichen Polarkoordinaten gegeben,

$$(3) \quad y(\tau) = \rho(\tau) \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}, \quad \rho(\tau) > 0, \quad \tau \in I,$$

dann gilt

$$\dot{y}(\tau) = \dot{\rho}(\tau) \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix} + \rho(\tau) \begin{pmatrix} -\sin \tau \\ \cos \tau \end{pmatrix},$$

also

$$(4) \quad \dot{y} = \frac{\dot{\rho}}{\rho} y + y^\perp.$$

Wegen

$$|\dot{y}|^2 = \left( \left( \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right)^2 + 1 \right) |y|^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2$$

liegt also stets eine Kurve vor. Ferner ist die Kurve allein durch die Abbildung  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Man beschreibt daher eine Kurve in eigentlichen Polarkoordinaten durch die einfache Gleichung  $\rho = \rho(\tau)$ . Zum Beispiel erhält man die archimedische Spirale 4.2.4 in der Form  $\rho(\tau) = \alpha\tau$ .

**Aufgabe.** Man diskutiere eine Kurve der Form (3) und bestimme Bogenlänge, Krümmung, begleitendes Zweibein und (wenn möglich) die natürliche Gleichung. Insbesondere sollen die Fälle

$$\rho(\tau) = \tau, \quad \rho(\tau) = \exp \tau, \quad \rho(\tau) = \cos \tau$$

behandelt werden. (Lösung s. 5.7.1.)

**5.1.3 Fläche in Polarkoordinaten.** Ist die Kurve  $y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  in Polarkoordinaten

$$(1) \quad y = \rho \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}, \quad \rho > 0,$$

gegeben (vergl. 5.1.1), so ist die Fläche  $F$  der abgeschlossenen Teilmenge

$$G := \left\{ x = \xi \begin{pmatrix} \cos \psi(\tau) \\ \sin \psi(\tau) \end{pmatrix}; \quad 0 \leq \xi \leq \rho(\tau), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta \right\}$$

durch das Gebiets-Integral

$$F = \int_{x \in G} dx_1 dx_2$$

gegeben.

**Satz.** Ist die Kurve  $y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  in Polarkoordinaten (1) gegeben, dann gilt

$$F = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\rho(\tau)]^2 \dot{\psi}(\tau) d\tau,$$

wenn  $\dot{\psi}$  positiv und  $\psi(\beta) - \psi(\alpha) \leq 2\pi$  ist.

**Beweis.** Für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  ist

$$G_{\varepsilon} := \left\{ x = \xi \begin{pmatrix} \cos \psi(\tau) \\ \sin \psi(\tau) \end{pmatrix}; \varepsilon \leq \xi \leq \rho(\tau), \alpha \leq \tau \leq \beta \right\}$$

nicht leer, und für

$$F_{\varepsilon} = \int_{x \in G_{\varepsilon}} dx_1 dx_2$$

gilt  $F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_{\varepsilon}$ . Man setzt

$$E_{\varepsilon} := \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2; \varepsilon \leq \xi \leq \rho(\tau), \alpha \leq \tau \leq \beta\}$$

und erhält eine bijektive und zweimal stetig partiell differenzierbare Abbildung

$$f : E_{\varepsilon} \rightarrow G_{\varepsilon}, f(\xi, \tau) := \xi \begin{pmatrix} \cos \psi(\tau) \\ \sin \psi(\tau) \end{pmatrix},$$

mit Funktionaldeterminante

$$\det \begin{pmatrix} \cos \psi(\tau) & -\xi \dot{\psi}(\tau) \cdot \sin \psi(\tau) \\ \sin \psi(\tau) & \xi \dot{\psi}(\tau) \cdot \cos \psi(\tau) \end{pmatrix} = \xi \dot{\psi}(\tau).$$

Nach der Transformationsformel für Gebietsintegrale hat man

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon} &= \int_{x \in G_{\varepsilon}} dx_1 dx_2 = \int_{x \in E_{\varepsilon}} \xi \dot{\psi}(\tau) d\xi d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{\varepsilon}^{\rho(\tau)} \xi d\xi \right) \dot{\psi}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\rho^2(\tau) - \varepsilon^2] \dot{\psi}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$F = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\tau) \dot{\psi}(\tau) d\tau.$$

**Bemerkungen.** 1) Die Einführung der durch  $\varepsilon$  abgeschnittenen Gebiete  $E_\varepsilon$  und  $G_\varepsilon$  war nötig, um eine *positive* Funktionaldeterminante sicherzustellen.  
 2) Für  $F$  schreibt man unmissverständlich auch

$$F = \frac{1}{2} \int \rho^2 d\psi.$$

**5.1.4 Die Archimedische Spirale.** Nach 4.2.4 (4) nennt man die Kurve

$$y(\tau) = \alpha\tau \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}, \quad \tau > 0, \quad \alpha > 0,$$

eine archimedische Spirale. Man berechnet nach Bemerkung 5.1.2

$$\dot{y} = \frac{1}{\tau} y + y^\perp, \quad \tau > 0.$$

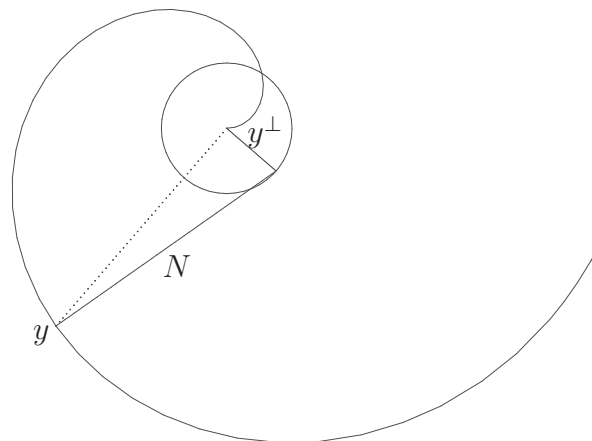
Damit ist die Tangente im Punkte  $y$  gegeben durch

$$(T) \quad y + \mathbb{R} \left( \frac{1}{\tau} y + y^\perp \right)$$

und die Normale im Punkte  $y$  gegeben durch

$$(N) \quad y + \mathbb{R} \left( \frac{1}{\tau} y^\perp - y \right).$$

**Satz.** *Der Schnittpunkt der Normalen (N) mit der Geraden  $\mathbb{R}y^\perp$  liegt auf dem Kreis mit dem Radius  $\alpha$  um Null.*



**Beweis.** Man hat  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$  so zu bestimmen, dass

$$y + \beta \left( \frac{1}{\tau} y^\perp - y \right) = \gamma y^\perp$$

erfüllt ist. Es folgt  $\beta = 1$  und  $\gamma = \frac{1}{\tau}$ . Folglich ist  $|\gamma y^\perp| = \alpha$ .

**5.1.5 Cassinis Oval.** Den geometrischen Ort aller Punkte  $x \in \mathbb{R}^2$ , für welche das Produkt der Abstände zu zwei gegebenen Punkten  $a \neq b$  konstant gleich  $\varepsilon > 0$  ist, nennt man ein CASSINI-Oval. Nach einer Bewegung und Maßstabs-Änderung (d. h. einer Ähnlichkeitsabbildung) kann man  $a = e, b = -e, e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , annehmen.  $y$  liegt also genau dann auf einem CASSINI-Oval, wenn gilt

$$(1) \quad |y - e| |y + e| = \varepsilon.$$

Dies ist offenbar gleichwertig mit  $(|y|^2 - 2y_1 + 1)(|y|^2 + 2y_1 + 1) = \varepsilon^2$ , also mit

$$(2) \quad (y_1^2 + y_2^2 + 1)^2 - 4y_1^2 = \varepsilon^2.$$

Im Falle  $\varepsilon \neq 1$  liegt 0 nicht auf der Kurve, man kann also einen Polarkoordinaten-Ansatz

$$y = \rho \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}$$

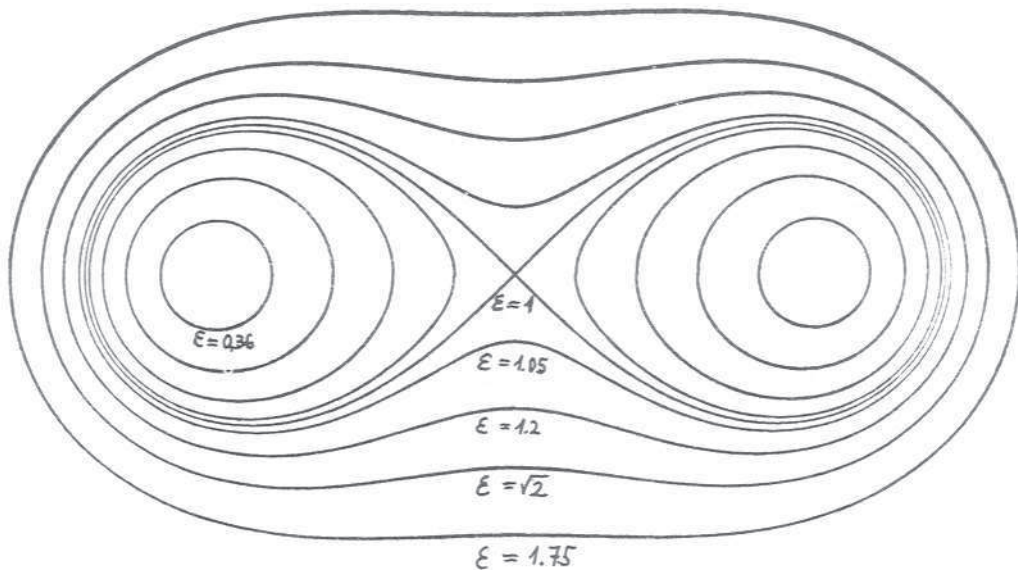
machen. Damit ist (2) gleichwertig mit

$$(3) \quad (\rho^2 + 1)^2 = \varepsilon^2 + 4\rho^2 \cos^2 \tau.$$

Im Falle  $\varepsilon = 1$  erhält man die BERNOULLISCHE Lemniskate

$$(4) \quad \rho^2 = 2(\cos^2 \tau - \sin^2 \tau) = 2 \cos 2\tau,$$

wenn man den Nullpunkt ausschließt.



**Aufgabe.** Man zeige mit (4), dass die durch die Lemniskate eingeschlossene Fläche gleich 2 ist. (Lösung s. 5.7.2.)

## 5.2 Die Evolute einer Kurve

**5.2.1 Definition.** Es sei  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Kurve im Sinne von 4.2.3 und

$$(1) \quad \kappa := \frac{\langle \ddot{y}, \dot{y}^\perp \rangle}{|\dot{y}|^3}$$

ihre Krümmung (vgl. Definition 2 in 4.3.6). Im Folgenden wird stets vorausgesetzt, dass *die Krümmung im betrachteten Intervall nirgends verschwindet*. Setzt man

$$(2) \quad \rho := \frac{1}{\kappa} = \frac{|\dot{y}|^3}{\langle \ddot{y}, \dot{y}^\perp \rangle},$$

so ist  $|\rho|$  nach 4.3.6 der Krümmungsradius der Kurve im Punkte  $y$ . Man könnte daher  $\rho$  den „orientierten“ Krümmungsradius nennen.

Nach Definition 1 in 4.3.6 war der Krümmungsmittelpunkt der Kurve  $y$  gegeben durch

$$m := y + \frac{|\dot{y}|^2}{\langle \ddot{y}, \dot{y}^\perp \rangle} \dot{y}^\perp.$$

Verwendet man (2) und den Tangenteneinheitsvektor  $t := \frac{1}{|\dot{y}|} \dot{y}$ , so folgt

$$(3) \quad m = y + \rho t^\perp.$$

Nach dem Satz 4.3.8 ist  $\kappa$  und daher auch  $\rho$  invariant gegenüber Parametertransformationen. Da  $t$  ebenfalls diese Eigenschaft hat, ist *der Krümmungsmittelpunkt (3) invariant gegenüber Parametertransformationen*.

Da die Formel (2) für  $\rho$  die zweite Ableitung von  $y$  enthält, ist  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  wenigstens noch stetig. Damit hängt auch der Krümmungsmittelpunkt  $m$  stetig vom Parameter ab.

**Definition.** Den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte  $m$  einer Kurve  $y$  nennt man die Evolute  $y^*$  der gegebenen Kurve  $y$ , in Formeln

$$(4) \quad y^* := m = y + \rho t^\perp = y + \frac{|\dot{y}|^2}{\langle \ddot{y}, \dot{y}^\perp \rangle} \dot{y}^\perp.$$

**Bemerkung.** Nach (4) wird jeder Kurve  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine weitere Abbildung  $y^* : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  zugeordnet. Im Allgemeinen wird aber  $y^*$  nicht mehr differenzierbar sein. Aber selbst wenn  $y^* : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  zweimal stetig differenzierbar sein



sollte, ist  $y^*$  im Allgemeinen keine Kurve, denn  $(y^*)'$  wird manchmal Null sein (vergl. Korollar 5.2.2).

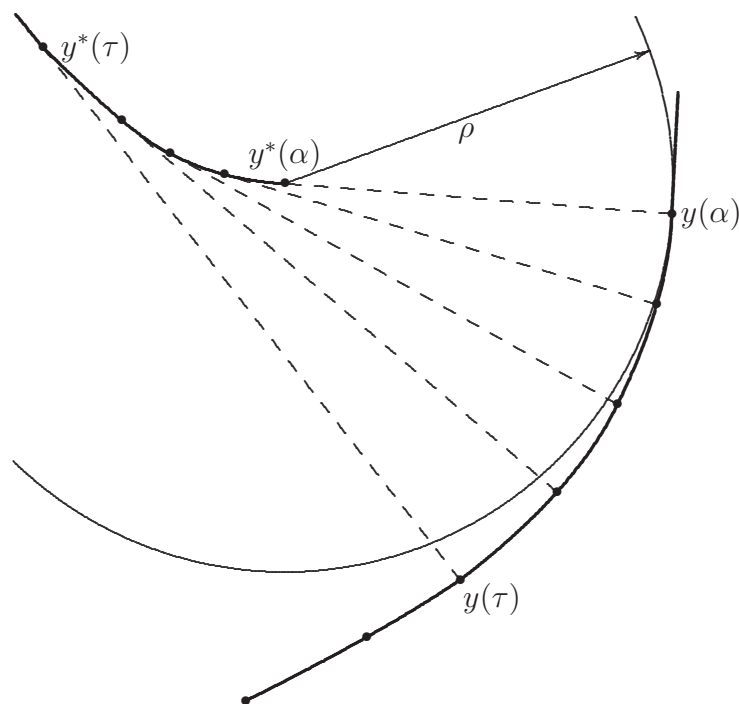
**5.2.2 Eine erste Eigenschaft der Evolute.** Auch wenn die Evolute einer Kurve nicht immer eine Kurve im strengen Sinne ist, so gibt doch ihre geometrische Form Information über das Krümmungsverhalten der ursprünglichen Kurve. Analog zur gegebenen Kurve wird man sich außerdem bei ihrer Evolute für Bogenlänge und Krümmung interessieren, falls diese Größen existieren. Damit man wenigstens mit dem Differenzieren keine Schwierigkeiten hat, wird in diesem und im nächsten Paragraphen die erforderliche Voraussetzung gemacht:

**Standard-Voraussetzung:** Die Kurve  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist viermal stetig differenzierbar und ihre Krümmung ist nirgends Null.

Es bezeichne  $\kappa^*$  bzw.  $\rho^*$  Krümmung bzw. orientierten Krümmungsradius, sofern er für die betreffenden Parameter existiert, weiterhin

$$\lambda_\alpha^*(\tau) = \lambda(y^*; \alpha, \tau) = \int_\alpha^\tau |(y^*)'(\sigma)| d\sigma$$

die Bogenlänge (vergl. 4.4.2), sodann  $t^*$  den Tangenteneinheitsvektor (vergl. 4.3.9) der Evolute  $y^*$  von  $y$ .



**Satz.** Die Tangente an die Evolute  $y^*$  einer Kurve  $y$  stimmt mit der Normalen von  $y$  überein, genauer gilt

$$(y^*)' = \dot{\rho} t^\perp.$$

**Beweis.** Wegen 5.2.1 (4) gilt

$$(y^*)' = \dot{y} + \dot{\rho} t^\perp + \rho (t^\perp)'$$

Mit dem Lemma 4.3.9 erhält man  $(t^\perp)' = -\kappa|\dot{y}|t = -\kappa\dot{y}$ , und wegen  $\kappa\rho = 1$  folgt die Behauptung.

**Korollar.** Die Evolute  $y^*$  von  $y$  ist genau dann eine Kurve im Sinne von 4.2.3, wenn  $\dot{\kappa}$  und damit  $\dot{\rho}$  auf  $I$  überall ungleich Null ist.

**Bemerkung.** Wegen der im Satz formulierten Tangenteneigenschaft einer Evolute ist die Evolute zu einer Kurve ohne Hilfsmittel nur schlecht zu zeichnen. In der obigen Skizze wurde aber gerade diese Eigenschaft zur Konstruktion verwendet.

**Aufgabe.** Man rekonstruiere die Kurve aus ihrer Evolute.

(Gedacht ist an eine Formel der Art  $y(\tau) = y^*(\tau) - \dots$ ) (Lösung s. 5.7.3.)

**5.2.3 Bogenlänge der Evolute.** Man behält die bisherige Bezeichnung bei. Ist  $\kappa$  (und damit  $\rho$ ) echt monoton, dann wird  $\dot{\kappa}$  (und damit  $\dot{\rho}$ ) nirgends Null und

$$(1) \quad \varepsilon := \frac{\dot{\rho}}{|\dot{\rho}|} = -\frac{\dot{\kappa}}{|\dot{\kappa}|}$$

ist auf  $I$  konstant, nämlich gleich 1 oder  $-1$ . Nach Satz 5.2.2 ist  $|(y^*)'| = |\dot{\rho}|$ , es folgt daher einerseits

$$(2) \quad t^* = \varepsilon t^\perp$$

und andererseits

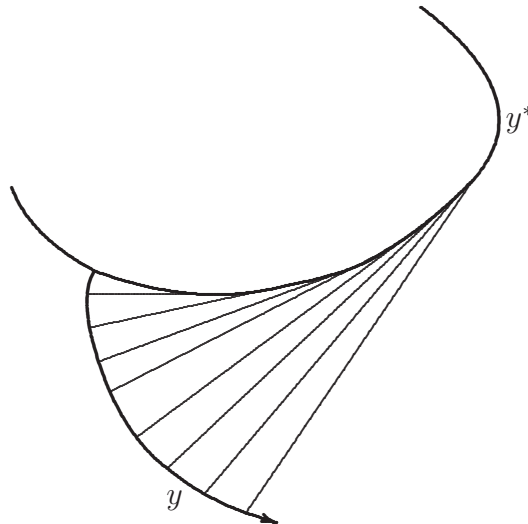
$$(3) \quad \lambda_\alpha^*(\tau) = \int_\alpha^\tau |\dot{\rho}(\sigma)| d\sigma = \varepsilon\rho(\tau) + \gamma, \quad \gamma \text{ konstant.}$$

Hieraus entnimmt man das

**Lemma.** Die Bogenlänge der Evolute von  $y^*(\alpha)$  bis  $y^*(\beta)$  ist

$$|\rho(\alpha) - \rho(\beta)|.$$

Nach diesem Lemma und (2) erhält man die Kurve  $y$  aus ihrer Evolute  $y^*$  durch Abwicklung eines Fadens, den man sich an  $y^*$  gelegt denkt:



**Satz.** Ist  $y$  eine Kurve, deren Krümmung überall ungleich Null und echt monoton ist, dann gilt für die Krümmung ihrer Evolute  $y^*$

$$\kappa^* = \frac{\kappa|\dot{y}|}{|\dot{\rho}|} = \frac{\kappa^3|\dot{y}|}{|\dot{\kappa}|}.$$

**Beweis.** Zur Berechnung der Krümmung  $\kappa^*$  von  $y^*$  verwendet man die Ableitungsgleichungen in Lemma 4.3.9 für die Evolute  $y^*$

$$(t^*)' = \kappa^*|(y^*)'|t^{*\perp}.$$

Hier ist unter Verwendung der Ableitungsgleichungen für  $y$  und von (2) die linke Seite gleich

$$(t^*)' = \varepsilon t^\perp = -\varepsilon\kappa|\dot{y}|t$$

und die rechte Seite wegen (2) gleich

$$\kappa^*|\dot{\rho}|(\varepsilon t^\perp)^\perp = -\varepsilon\kappa^*|\dot{\rho}|t.$$

Daraus folgt die Behauptung.

#### 5.2.4 Die Evolute der Ellipse. Ausgehend von einer Ellipse

$$y(\tau) := \begin{pmatrix} \alpha \cos \tau \\ \beta \sin \tau \end{pmatrix}, \quad \alpha > \beta > 0,$$

berechnet man

$$\dot{y}(\tau) = \begin{pmatrix} -\alpha \sin \tau \\ \beta \cos \tau \end{pmatrix},$$

$$|\dot{y}(\tau)|^2 = \alpha^2 \sin^2 \tau + \beta^2 \cos^2 \tau = \alpha^2 + (\beta^2 - \alpha^2) \cos^2 \tau,$$

$$\ddot{y} = -y$$

und

$$\rho(\tau) = \frac{1}{\alpha\beta}(\alpha^2 \sin^2 \tau + \beta^2 \cos^2 \tau)^{3/2} = \frac{1}{\kappa(\tau)}.$$

Als Gleichung der Evolute erhält man daher nach 5.2.1 (4)

$$y^*(\tau) = \begin{pmatrix} \alpha \cos \tau \\ \beta \sin \tau \end{pmatrix} - \frac{1}{\alpha\beta}(\alpha^2 \sin^2 \tau + \beta^2 \cos^2 \tau) \begin{pmatrix} \beta \cos \tau \\ \alpha \sin \tau \end{pmatrix},$$

also in der Form

$$(1) \quad y^*(\tau) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \beta \cos^3 \tau \\ -\alpha \sin^3 \tau \end{pmatrix}.$$

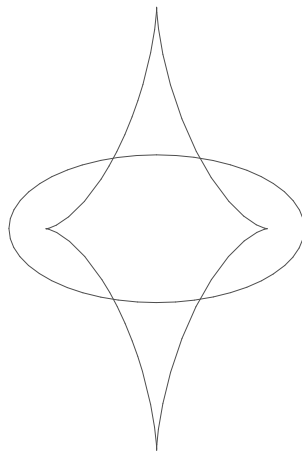
Eliminiert man hier  $\tau$  unter Verwendung der (leicht zu verifizierenden) Relation

$$(2) \quad (\sin^6 \tau + \cos^6 \tau - 1)^3 = -27 \sin^6 \tau \cos^6 \tau,$$

so erhält man die Evolute der Ellipse in der impliziten Form

$$(3) \quad (\alpha^2 v_1^2 + \beta^2 v_2^2 - (\alpha^2 - \beta^2)^2)^3 = -27\alpha^2\beta^2(\alpha^2 - \beta^2)^2 v_1^2 v_2^2.$$

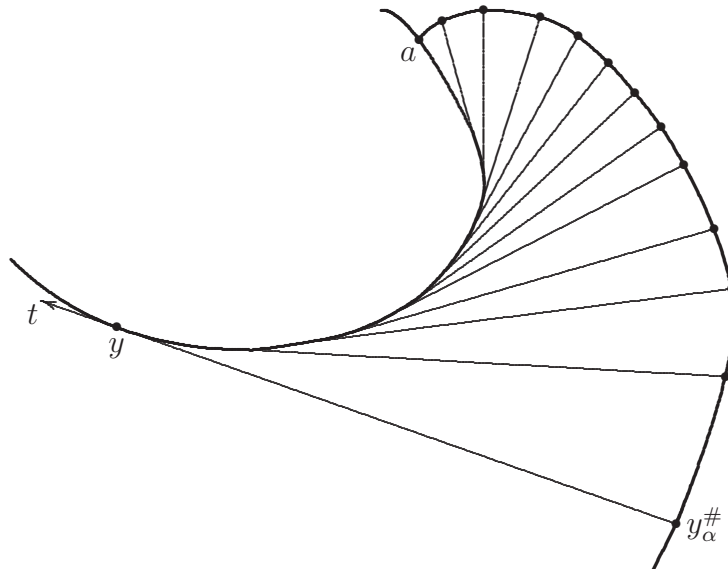
**Aufgabe.** Man diskutiere die Evolute einer Parabel, einer Hyperbel und einer archimedischen Spirale. (Lösung s. 5.7.4.)



Evolute der Ellipse

## 5.3 Die Evolvente einer Kurve

**5.3.1 Definition.** Die in 5.2.3 erwähnte Fadenkonstruktion einer Kurve  $y$  aus ihrer Evolute  $y^*$  kann man umgekehrt zur Erzeugung einer Kurve aus einer gegebenen Kurve verwenden, solange die Krümmung nirgends Null ist.



Ist  $\lambda_\alpha$  die Bogenlänge von  $y$ , gemessen von einem festen Punkt  $a = y(\alpha)$ , also

$$(1) \quad \lambda_\alpha(\tau) = \lambda(y; \alpha, \tau) = \int_\alpha^\tau |\dot{y}(\sigma)| d\sigma,$$

so ist die zugehörige *Evolvente*  $y_\alpha^\#$  von  $y$  mit Fußpunkt  $a$  definiert durch

$$(2) \quad y_\alpha^\#(\tau) := y(\tau) - \lambda_\alpha(\tau)t(\tau), \quad \tau \geq \alpha.$$

Wie man sieht, ist die Evolvente  $y_\alpha^\#$  invariant gegenüber Parametertransformationen von  $y$ .

**Bemerkung.** Ist  $b = y(\beta)$  ein weiterer Punkt der Kurve  $y$ , dann folgt

$$\lambda_{\alpha,\beta} := \int_\alpha^\beta |\dot{y}(\sigma)| d\sigma = \lambda_\alpha(\tau) - \lambda_\beta(\tau)$$

aus (1), wobei  $\lambda_{\alpha,\beta}$  die Bogenlänge zwischen  $a$  und  $b$  ist. Aus (2) entnimmt man daher

$$y_\beta^\# = y_\alpha^\# + \lambda_{\alpha,\beta}t.$$

**5.3.2 Eigenschaften der Evolvente.** In Umkehrung von Satz 5.2.2 hat man zunächst den

**Satz.** *Die Normale an die Evolvente  $y_\alpha^\#$  der Kurve  $y$  ist gleich der Tangente an die Kurve  $y$ , und es gilt*

$$(y_\alpha^\#)' = -\lambda_\alpha \kappa |y| t^\perp.$$

**Beweis.** Mit den Ableitungsgleichungen in Lemma 4.3.9 folgt bei Weglassung der Indizes aus  $y^\# = y - \lambda t$  und  $\dot{\lambda} = |y|$  sofort

$$(y_\alpha^\#)' = \dot{y} - \dot{\lambda} t - \lambda \dot{t} = -\lambda \kappa |y| t^\perp,$$

woraus durch Senkrechtbildung folgt, dass die Normale an die Evolvente und die Tangente an die Kurve  $y$  die gleiche Richtung haben. Außerdem liegt wegen

$$y_\alpha^\# = y - \lambda t$$

der Punkt  $y_\alpha^\#(\tau)$  auf beiden Geraden.

Danach ist die Evolvente für  $\tau > \alpha$  genau dann eine Kurve im Sinne von 4.2.3, wenn die Krümmung  $\kappa$  nirgends Null ist. Ist dies der Fall, dann bezeichnet man den Tangenteneinheitsvektor bzw. die Krümmung der Evolvente mit  $t_\alpha^\#$  bzw.  $\kappa_\alpha^\#$ . Nach dem Satz folgt zunächst

$$(1) \quad t_\alpha^\# = -(\text{sign } \lambda_\alpha \kappa) t^\perp.$$

Zum Nachweis von

$$(2) \quad \kappa_\alpha^\# = (\text{sign } \lambda_\alpha \kappa) \lambda_\alpha^{-1}$$

verwendet man unter Weglassung der Indizes zunächst die Ableitungsgleichungen für die Evolvente,

$$(t^\#)' = \kappa^\# |y^\#| t^{\#\perp}$$

nach Lemma 4.3.9. Hier ist nach (1) und 4.3.9 die linke Seite gleich

$$-(\text{sign } \lambda \kappa) \dot{t}^\perp = (\text{sign } \lambda \kappa) \kappa |y| t$$

und die rechte Seite nach (1) und dem Satz gleich

$$\kappa^\# |\lambda \kappa| |y| \cdot \text{sign}(\lambda \kappa) t = \kappa^\# \lambda \kappa |y| t.$$

Damit folgt (2).

**5.3.3 Beziehungen zwischen Evolute und Evolvente.** Die in 5.2.3 erwähnte Fadenkonstruktion einer Kurve  $y$  aus ihrer Evolute  $y^*$  und die Definition der der Evolvente in 5.3.1 lassen vermuten, dass der Übergang von einer Kurve zu ihrer Evolute bzw. Evolvente zueinander inverse Prozesse sind. Genauer gilt unter der Annahme, dass alle Bildungen erlaubt sind:

**Satz.** *Die Evolute der Evolvente einer Kurve  $y$  ist die gegebene Kurve  $y$ , d. h. es gilt*

$$(y_\alpha^\#)^*(\tau) = y(\tau)$$

für alle  $\tau \geq \alpha$ .

**Beweis.** Nach Definition der Evolute in 5.2.1 (4) hat man zunächst  $(y_\alpha^\#)^* = y_\alpha^\# + \rho_\alpha^\# (t_\alpha^\#)^\perp$ , wobei  $\rho_\alpha^\#$  den orientierten Krümmungsradius der Evolvente bezeichnet. Nach 5.3.2 gilt für  $\tau \geq \alpha$

$$t_\alpha^\# = -\varepsilon' t^\perp \quad \text{und} \quad \rho_\alpha^\# = \frac{1}{\kappa_\alpha^\#} = \varepsilon' \lambda_\alpha, \quad \varepsilon' := \text{sign } \lambda_\alpha \kappa.$$

Man trägt dies ein und erhält  $(y_\alpha^\#)^* = y_\alpha^\# + \lambda_\alpha t$ . Nach Definition 5.3.1 der Evolvente ist dies die Behauptung.

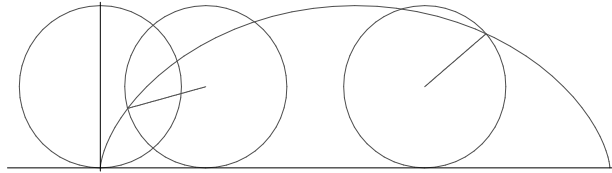
**Bemerkung.** Für ein  $b = y^*(\beta)$  auf der Evolute  $y^*$  kann man umgekehrt die Evolvente  $(y^*)_\beta^\#$  zum Fußpunkt  $b$  bilden. Hier bekommt man, wie man auch  $\beta$  wählt, die ursprüngliche Kurve nicht direkt zurück: Nach 5.3.1 (2) und 5.2.3 erhält man mit den dortigen Abkürzungen

$$(y^*)_\beta^\# = y^* - \lambda_\beta^* t^* = y^* - (\varepsilon\rho + \gamma)(\varepsilon t^\perp) = y - \varepsilon\gamma t^\perp,$$

wenn man die Definition 5.2.1 (4) von  $y^*$  verwendet. Man erhält also die ursprüngliche Kurve dann zurück, wenn man vorher die Bogenlänge  $\lambda^*$  durch  $\lambda^* - \gamma = \varepsilon\rho$  ersetzt hat.

## 5.4 Die gemeine Zyклоіде

**5.4.1 Definition.** Rollt man einen Kreis auf der Geraden ab, so beschreibt ein fester Punkt  $P$  der Kreisperipherie eine sogenannte *gemeine Zyклоіде*.



Zyклоіде

Zur Bestimmung der zugehörigen Gleichung lässt man einen Kreis vom Radius 1 auf der  $x_1$ -Achse abrollen und wählt für  $P$  den Berührungspunkt von Kreis und Gerade bei Beginn. Ist  $\tau$  die Länge des bereits abgerollten Kreisbogens (also der Winkel), dann ist

$$(1) \quad y(\tau) := \begin{pmatrix} \tau - \sin \tau \\ 1 - \cos \tau \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

eine Parameterdarstellung der gemeinen Zyклоіде. Wegen  $1 - \cos \tau = 2 \sin^2 \frac{\tau}{2}$  folgt

$$(2) \quad \dot{y}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 - \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}, \quad |\dot{y}(\tau)| = \sqrt{2(1 - \cos \tau)} = 2 \left| \sin \frac{\tau}{2} \right|,$$

und (1) ist die Parameterdarstellung einer Kurve im offenen Intervall  $0 < \tau < 2\pi$ .

**5.4.2 Bogenlänge und natürliche Gleichung.** Es sei

$$(1) \quad y(\tau) := \begin{pmatrix} \tau - \sin \tau \\ 1 - \cos \tau \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi,$$

die Parameterdarstellung der gemeinen Zyклоіде. Nach 5.4.1 (2) folgt

$$(2) \quad |\dot{y}(\tau)| = 2 \left| \sin \frac{\tau}{2} \right|, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi.$$

Im Intervall  $[0, 2\pi]$  ist  $-4 \cos \frac{\tau}{2}$  eine Stammfunktion von  $|\dot{y}(\tau)|$ . Nach 4.4.2 ist daher

$$(3) \quad \lambda(\tau) = 4(1 - \cos \frac{\tau}{2}), \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi,$$



die *Bogenlänge* der Zyклоіде (1) gemessen vom Punkt 0 aus. Die Zyклоіде ist also eines der seltenen Beispiele von Kurven, bei denen man die Bogenlänge explizit bestimmen kann. Die Länge  $\lambda(2\pi)$  eines Zyклоіdenbogens ist also gleich 8. Wenn man die Bogenlänge explizit hat, dann sollte man immer nach der natürlichen Gleichung 4.4.7 fragen: Mit (1) folgt zunächst

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 1 - \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}, \quad \ddot{y} = \begin{pmatrix} \sin \tau \\ \cos \tau \end{pmatrix},$$

$$\kappa(\tau) = -\frac{1 - \cos \tau}{8(\sin \frac{\tau}{2})^3}, \quad 0 < \tau < 2\pi,$$

also

$$(4) \quad \kappa(\tau) = -\frac{1}{4 \sin \frac{\tau}{2}}, \quad 0 < \tau < 2\pi.$$

**Satz.** Die natürliche Gleichung der gemeinen Zyклоіде lautet

$$\kappa(\tau) = -\frac{1}{\sqrt{8\lambda - \lambda^2}}, \quad 0 < \lambda < 8.$$

**Beweis.** Man eliminiert  $\tau$  aus (3) und (4) und erhält

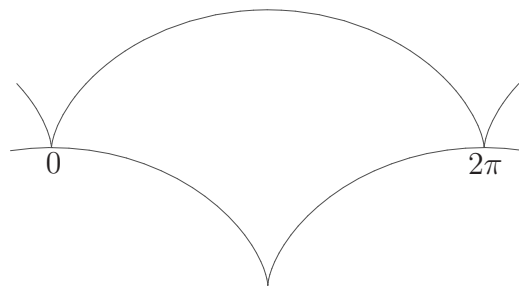
$$\kappa^2 = \frac{1}{\lambda(8 - \lambda)}, \quad 0 < \lambda < 8.$$

Da  $\kappa$  nach (4) negativ ist, folgt die Behauptung.

**5.4.3 Die Evolute.** Eine weitere interessante – sie auszeichnende – Eigenschaft der Zyклоіде gibt der

**Satz.** Die Evolute der gemeinen Zyклоіде ist eine (verschobene) gemeine Zyклоіде; genauer gilt

$$y^*(\tau) = y(\tau + \pi) - p, \quad p := \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix}.$$



**Beweis.** Wegen  $1 - \cos \tau = 2 \sin^2 \frac{\tau}{2}$  und  $\sin \tau = 2 \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2}$  erhält man

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 1 - \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix} = 2 \sin \frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} \sin \frac{\tau}{2} \\ \cos \frac{\tau}{2} \end{pmatrix},$$

also

$$t(\tau) = \begin{pmatrix} \sin \frac{\tau}{2} \\ \cos \frac{\tau}{2} \end{pmatrix}, \quad 0 < \tau < 2\pi.$$

Damit und mit 5.4.2 (4) erhält man die Evolute der gemeinen Zyклоіде in der Form

$$\begin{aligned} y^*(\tau) &= \begin{pmatrix} \tau - \sin \tau \\ 1 - \cos \tau \end{pmatrix} - 4 \sin \frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} -\cos \frac{\tau}{2} \\ \sin \frac{\tau}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tau - \sin \tau + 4 \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2} \\ 1 - \cos \tau - 4 \sin^2 \frac{\tau}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau + \sin \tau \\ -1 + \cos \tau \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist

$$y^*(\tau) = \begin{pmatrix} \tau + \sin \tau \\ -1 + \cos \tau \end{pmatrix}, \quad 0 < \tau < 2\pi,$$

die Gleichung der Evolute der gemeinen Zyклоіде. Ein Vergleich mit der Definition 5.4.1 (1) liefert sofort

$$y^*(\tau) = y(\tau + \pi) - p, \quad p := \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \end{pmatrix},$$

also die Behauptung.

## 5.5 Beispiele

**5.5.1 Evolvente des Kreises.** Man geht aus von der Parameterdarstellung

$$y(\tau) := \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi,$$

des Einheitskreises mit Einheitstangentenvektor

$$t(\tau) = \dot{y}(\tau) = \begin{pmatrix} -\sin \tau \\ \cos \tau \end{pmatrix}$$

und mit

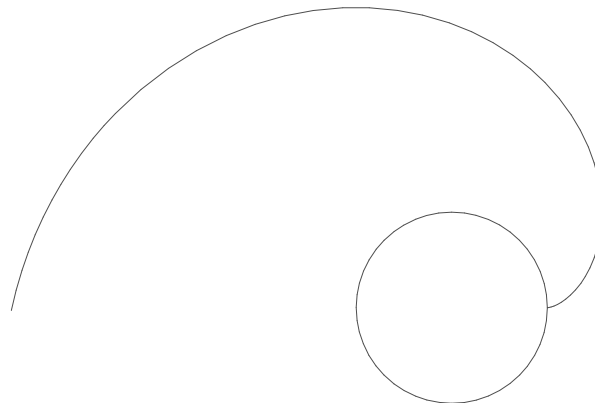
$$y^\# := y_0^\# = y - \lambda t = \begin{pmatrix} \cos \tau + \tau \sin \tau \\ \sin \tau - \tau \cos \tau \end{pmatrix}, \quad \tau \geq 0.$$

Wählt man  $\varphi$ ,  $0 \leq |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$ , mit

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} = -\sin \varphi,$$

dann erhält man die Evolvente in der Form

$$y^\# = \sqrt{1+\tau^2} \begin{pmatrix} \cos(\tau + \varphi(\tau)) \\ \sin(\tau + \varphi(\tau)) \end{pmatrix}, \quad \tau \geq 0.$$



**5.5.2 Graphen.** Man geht von einer zweimal stetig differenzierbaren Abbildung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\varphi(\tau) \neq 0$  für alle  $\tau \in I$  aus und betrachtet den Graphen

$$y(\tau) := \begin{pmatrix} \tau \\ \varphi(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau \in I,$$

gemäß 4.3.7. Nach der dortigen Formel (4) erhält man die Evolute dieses Graphen in der Form

$$y^* = \begin{pmatrix} \tau \\ \varphi \end{pmatrix} + \frac{1 + \dot{\varphi}^2}{\ddot{\varphi}} \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als ein konkretes Beispiel wähle man den Sinus, also

$$\varphi(\tau) = \sin \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Die Krümmung berechnet sich zu

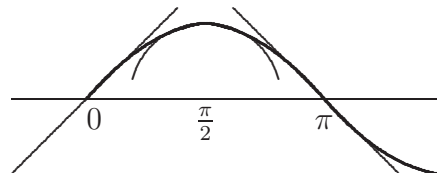
$$\kappa(\tau) = -\frac{\sin \tau}{(1 + \cos^2 \tau)^{3/2}},$$

und die Evolute ist durch

$$y^* = \begin{pmatrix} \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix} + \frac{1 + \cos^2 \tau}{\sin \tau} \begin{pmatrix} \cos \tau \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Die offensichtlichen Extrema der Krümmung hat man in den Punkten  $\tau = n\pi + \frac{\pi}{2}$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ , und die Krümmung ist dort  $\pm 1$ . Zusammen mit der Tangentenapproximation bei 0 und bei  $\pi$  erhält man eine gute Annäherung der Sinuskurve im Intervall von 0 bis  $\pi$ .

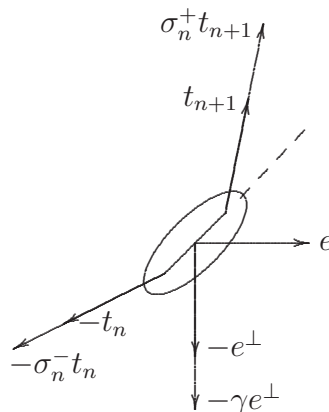


**5.5.3 Die Gleichung der Kettenlinie.** Im Band II der „Ebenen Kurven“ von Gino LORIA, B. G. TEUBNER, Leipzig und Berlin 1911, wird die *Kettenlinie* mit folgenden Worten vorgestellt:

„In dem berühmten Werke *Galileis, Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (dessen Vorrede vom 6. März 1638 datiert ist), findet sich in der zweiten und vierten ‚Giornata‘ (in solche ist das Werk geteilt) die Bemerkung, daß ein gleichmäßig schweres Seil oder eine Kette, wenn sie an zwei Punkten von derselben Höhe aufgehängt ist, eine Gestalt annehme, die einer Parabel ähnlich sei. Daß aber diese Kurve keine Parabel (zweiter Ordnung) sei, wurde durch Berechnungen und Experimente von *Joachim Jungius*

1669 in der bekannten Arbeit, *Geometria empirica* betitelt, dargetan; es blieb jedoch somit immer noch übrig zu bestimmen, welches denn die Kurve sei, in welche sich das Seil lege. Die Untersuchung derselben wurde nun im Mai 1690 von *Jacob Bernoulli* öffentlich vorgelegt und zwar in den *Acta eruditorum*. Drei Geometer ersten Ranges lösten dann sozusagen gleichzeitig diese interessante Frage, *Huygens*, *Leibniz* und *Joh. Bernoulli*; an dem edlen Wettstreit nahmen auch der Aufgabensteller und *Hermann* teil; und *David Gregory* befaßte sich dann als erster damit, eine methodische Bearbeitung der Eigenschaften der fraglichen Kurve zusammenzustellen.“

Zur Herleitung der Gleichung der Kettenlinie, die man sich als Graph der Funktion  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben denkt, betrachte man zunächst die Kräfte, die auf das  $n$ -te Kettenglied einwirken:



eine Spannung  $\sigma_n^+ t_{n+1}$  in Richtung  $t_{n+1}$ , eine Spannung  $-\sigma_n^- t_n$  in Richtung  $-t_n$  und die Schwerkraft  $-\gamma e^\perp$ , die dem Gewicht des Kettengliedes proportional ist. Da die Kette in Ruhe ist, heben sich diese Kräfte auf:

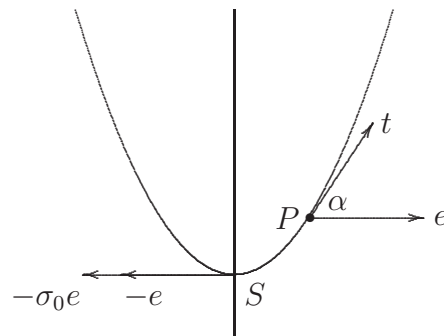
$$(1) \quad -\sigma_n^- t_n + \sigma_n^+ t_{n+1} = \gamma e^\perp.$$

Weiter annullieren sich die Spannungen zwischen zwei Kettengliedern:

$$\sigma_{n-1}^+ t_n = \sigma_n^- t_n.$$

Man zählt nun die Glieder vom tiefsten Punkt  $S$  aus, summiert (1) auf und erhält mit  $\sigma_0 := \sigma_1^-$

$$(2) \quad -\sigma_0 e + \sigma_n^+ \cdot t_{n+1} = n\gamma e^\perp.$$



Von dieser Näherung geht man nun über zu

$$(3) \quad -\sigma_0 e + \sigma t = \delta_0 \lambda e^\perp,$$

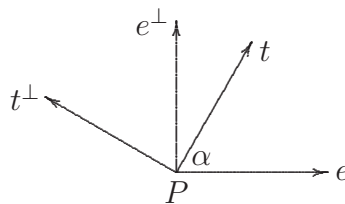
wobei  $\sigma_0$  und  $\delta_0$  konstant sind,  $\sigma = \sigma(\tau)$  die (unbekannte und variable) Spannung im Punkte  $P$  und

$$\lambda = \lambda(\tau) = \int_0^\tau \sqrt{1 + \dot{\psi}^2(\xi)} d\xi$$

die Bogenlänge zwischen  $S$  und  $P$  bezeichnet.

Zur Elimination der unbekanntem Funktion  $\sigma$  bildet man in (3) das Skalarprodukt mit  $t^\perp$  und erhält

$$(4) \quad -\sigma_0 \langle e, t^\perp \rangle = \delta_0 \lambda \langle e, t \rangle.$$



Ist  $\alpha$  der Winkel zwischen  $t$  und  $e$ , also  $\langle e, t \rangle = \cos \alpha$ , so gilt  $\langle e, t^\perp \rangle = -\langle e^\perp, t \rangle = -\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha$  und es folgt  $\sigma_0 \sin \alpha = \delta_0 \lambda \cos \alpha$  aus (4). Die Gleichung der Kettenlinie ist also

$$(5) \quad \tan \alpha = \omega \cdot \lambda, \quad \omega > 0 \text{ konstant.}$$

**5.5.4 Explizite Gleichung.** Man geht von der Gleichung der Kettenlinie aus:

$$(1) \quad \tan \alpha = \omega \cdot \lambda, \quad \omega > 0 \text{ konstant.}$$

Wegen  $\tan \alpha = \dot{\psi}$  und  $\dot{\lambda} = \sqrt{1 + \dot{\psi}^2}$  folgt durch Differenzieren

$$(2) \quad \ddot{\psi} = \omega \cdot \sqrt{1 + \dot{\psi}^2}$$

als Differentialgleichung für die Kettenlinie.

**Satz.** Eine Kettenlinie mit Scheitel auf der  $x_2$ -Achse ist der Graph einer Funktion

$$\psi(\tau) := \frac{1}{2\omega} \left[ \exp \omega\tau + \exp(-\omega\tau) \right] + \text{konst.}$$

**Beweis.** Man quadriert (2), differenziert und erhält

$$\ddot{\psi} \ddot{\psi} = \omega^2 \dot{\psi} \ddot{\psi}.$$

Wegen (2) ist  $\ddot{\psi}$  nirgends Null, so dass man

$$\ddot{\psi} = \omega^2 \dot{\psi}$$

als Bedingung erhält. Man benötigt nun den in 5.5.5 zu beweisenden

**Hilfssatz.** Genügt  $\chi$  der Differentialgleichung  $\ddot{\chi} = \omega^2 \chi$ , dann gibt es  $\alpha, \beta$  aus  $\mathbb{R}$  mit  $\chi(\tau) = \alpha \exp \omega\tau + \beta \exp(-\omega\tau)$ .

Damit folgt

$$(3) \quad \dot{\psi} = \alpha \exp \omega\tau + \beta \exp(-\omega\tau),$$

und (2) liefert

$$\left( \alpha\varepsilon - \frac{\beta}{\varepsilon} \right)^2 = 1 + \left( \alpha\varepsilon + \frac{\beta}{\varepsilon} \right)^2$$

mit der Abkürzung  $\varepsilon(\tau) := \exp \omega\tau$ . Man erhält

$$(4) \quad 1 + 4\alpha\beta = 0.$$

Im Scheitel der Kurve gilt  $\dot{\psi} = 0$ , so dass also  $\dot{\psi}(0) = 0$  und daher nach (3) auch  $\beta = -\alpha$  gilt. Nach (4) wird dann  $4\alpha^2 = 1$ , also (unter Zuhilfenahme der Anschauung)  $\alpha = -\beta = \frac{1}{2}$ .

**5.5.5 Beweis des Hilfssatzes.** Zunächst erfüllen die Funktionen  $\exp \omega\tau$  und  $\exp(-\omega\tau)$  die Differentialgleichung.

Mit geeigneten  $\alpha, \beta$  aus  $\mathbb{R}$  kann man für

$$\varphi(\tau) := \chi(\tau) - \alpha \exp \omega \tau - \beta \exp(-\omega \tau)$$

annehmen, dass  $\dot{\varphi}(0) = \varphi(0) = 0$  und außerdem  $\ddot{\varphi} = \omega^2 \varphi$  gilt. Man multipliziert mit  $\dot{\varphi}$  und kann einmal integrieren:

$$\dot{\varphi}^2 = (\omega \varphi)^2 + \text{konst.}$$

Wegen  $\dot{\varphi}(0) = \varphi(0) = 0$  ist diese Konstante aber Null und daher

$$\dot{\varphi} = \omega \varphi \quad \text{oder} \quad \dot{\varphi} = -\omega \varphi.$$

Es folgt

$$\varphi(\tau) = \gamma \exp \omega \tau \quad \text{oder} \quad \varphi(\tau) = \gamma \exp(-\omega \tau)$$

mit konstantem  $\gamma$ . Wegen  $\varphi(0) = 0$  hat man  $\varphi = 0$ , und der Hilfssatz 5.5.4 ist bewiesen.

**Aufgabe.** Die Evolute der Traktrix (siehe 4.2.8, 4.2.9)

$$y(\tau) = [\log \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}) - \sin \tau]e + [\cos \tau]e^\perp$$

mit  $0 \leq \tau < \frac{\pi}{2}$ ,  $e = (1, 0)^t$ , ist die Kettenlinie  $(\sigma, \cosh \sigma)$ ,  $\sigma \geq 0$ .  
(Hinweis:  $(\cosh \circ \log \circ \tan)(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}) = \frac{1}{\cos \tau}$ .) (Lösung s. 5.7.5.)

**5.5.6 Eigenschaften der Kettenlinie.** Man führt zur Vereinfachung die hyperbolischen Funktionen

$$\begin{aligned} \cosh \tau &= \frac{1}{2} [\exp \tau + \exp(-\tau)], \\ \sinh \tau &= \frac{1}{2} [\exp \tau - \exp(-\tau)] \end{aligned}$$

ein. Hier gilt offenbar

$$(1) \quad \cosh' = \sinh, \quad \sinh' = \cosh$$

und

$$(2) \quad \cosh^2 - \sinh^2 = 1.$$

Nach Satz 5.5.4 kann eine Kettenlinie ohne Einschränkung durch den Graphen der Funktion

$$(3) \quad \psi(\tau) = \cosh \tau$$



beschrieben werden. Wegen (2) folgt  $\sqrt{1 + \dot{\psi}^2} = \psi$ , und man erhält für die von  $\tau = 0$  an gemessene Bogenlänge

$$(4) \quad \lambda(\tau) = |\sinh \tau|, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Analog erhält man die Krümmung als

$$(5) \quad \kappa(\tau) = \frac{1}{\cosh^2 \tau}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Ein Vergleich von (4) und (5) führt zur natürlichen Gleichung

$$(6) \quad \kappa(\tau) = \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

für die Kettenlinie.

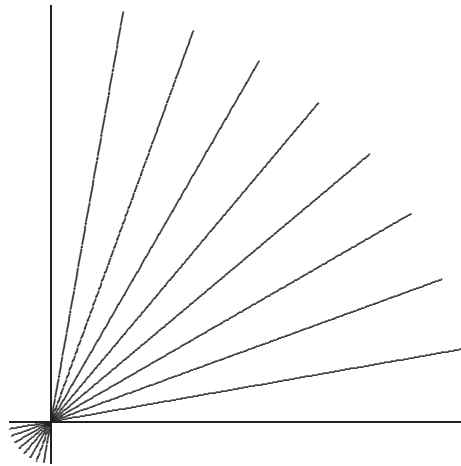
## 5.6 Geradenscharen

**5.6.1 Problemstellung.** Lässt man die Koeffizienten  $c$  und  $\omega$  einer Geradengleichung

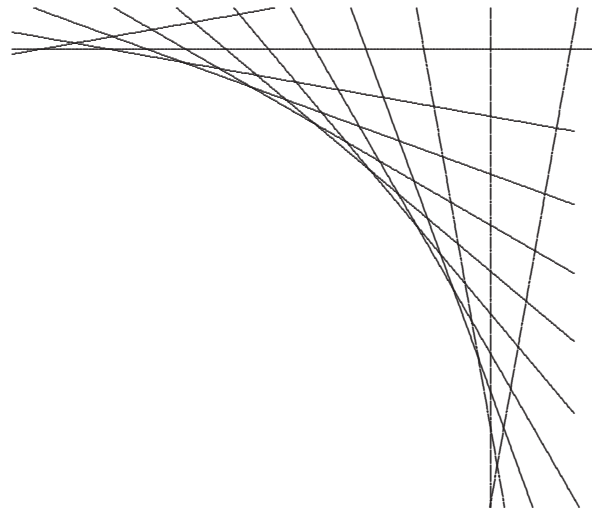
$$H_{c,\omega}: \quad \langle c, x \rangle = \omega$$

von einem Parameter  $\tau \in I$  abhängen, so wird man eine Schar von Geraden  $H_{c(\tau),\omega(\tau)}$ ,  $\tau \in I$ , erhalten. Die folgenden beiden unschuldigen Beispiele geben einen Einblick in die dabei auftretenden Phänomene:

$$c(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}, \quad \omega = 0:$$



$$c(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}, \quad \omega = 1:$$



Im ersten Falle wird der  $\mathbb{R}^2$  (oder ein Teil davon) lückenlos überdeckt; im zweiten Fall erscheint der Rand der Menge

$$\bigcup_{\tau \in I} H_{c(\tau),\omega(\tau)}$$

als Kurve und zwar als eine „Einhüllende der Schar“. Ein ähnliches Beispiel wurde in [3.1.5](#) unter anderen Gesichtspunkten betrachtet.

**Problem.** *Wie kann man entscheiden, ob eine Einhüllende einer Schar von Geraden existiert und wie kann man sie gegebenenfalls beschreiben?*

**5.6.2 Die Tangentschar einer Kurve.** In 4.2.5 hatte man bereits eine Geradenschar betrachtet: Die Schar der Tangenten an eine Kurve. Ist also  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Kurve, dann ist die Tangente an die Kurve im Punkte  $y = y(\tau)$  gegeben durch

$$T_y: \quad y + \mathbb{R}j.$$

In der Geradengleichung bekommt  $T_y$  die Form

$$\langle j^\perp, x \rangle = \langle j^\perp, y \rangle.$$

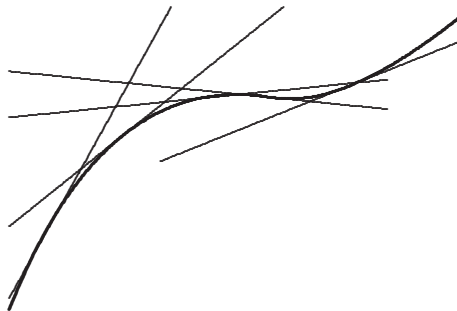
Man kann hier durch  $|j| = |j^\perp|$  dividieren und erhält eine Schar von Geraden

$$(1) \quad \eta(x, \tau) = 0, \quad \tau \in I,$$

wobei  $\eta$  als Funktion von  $x \in \mathbb{R}^2$  und  $\tau \in I$  erklärt ist durch

$$(2) \quad \eta(x, \tau) := \langle c, x \rangle - \omega \quad \text{mit} \quad c := t^\perp, \quad \omega := \langle t^\perp, y \rangle,$$

die *Tangentschar der Kurve*. Dabei sind  $c$  und  $\omega$  als Funktionen von  $\tau \in I$  aufzufassen.



Wie kann man jetzt die Kurve  $y$  aus der Schar (1) zurückgewinnen?

**Satz.** *Die Kurve  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist Lösung  $x = y(\tau)$  der beiden Gleichungen*

$$\eta(x, \tau) = 0, \quad \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau} = 0.$$

*Hat  $y$  keine Wendepunkte, d. h. gilt  $\kappa(\tau) \neq 0$  für alle  $\tau \in I$ , so ist  $y$  die einzige Lösung dieses Systems von Differentialgleichungen.*

**Beweis.** Zunächst gilt  $\eta(y(\tau), \tau) = 0$  und

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=y(\tau)} &= \langle \dot{c}, y \rangle - \dot{\omega} \\ &= \langle t^\perp, y \rangle - (\langle t^\perp, y \rangle + \langle t^\perp, \dot{y} \rangle) = 0, \end{aligned}$$

denn  $\dot{y}$  und  $t$  sind parallel. Damit ist  $y = y(\tau)$  Lösung der beiden Gleichungen. Man schreibe nun (2) in der Form

$$(3) \quad 0 = \eta(x, \tau) = \langle t^\perp, x - y \rangle$$

und analog

$$(4) \quad 0 = \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau} = \langle t^\perp, x - y \rangle.$$

Nach den Ableitungsgleichungen in 4.3.9 ist  $t^\perp$  ein von Null verschiedenes Vielfaches von  $t$ , sofern  $\kappa \neq 0$ . Aus (3) und (4) folgt also  $x = y$ .

**5.6.3 Der Begriff der Einhüllenden.** Sind  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $c(\tau) \neq 0$  für  $\tau \in I$ , und  $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, dann definiert man

$$(1) \quad \eta(x, \tau) := \langle c(\tau), x \rangle - \omega(\tau), \quad \tau \in I,$$

und sagt, dass

$$(2) \quad \eta(x, \tau) = 0, \quad \tau \in I,$$

eine *Geradenschar definiert*. Das in 5.6.1 formulierte Problem kann man jetzt wie folgt angehen: Anschaulich wird sicher dann eine „Einhüllende“ der Geradenschar vorhanden sein, wenn die gegebene Geradenschar gleich der Tangentenschar der „Einhüllenden“ ist. Satz 5.6.2 legt also die folgende Definition nahe:

**Definition.** Jede stetige Lösung  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  der Gleichungen

$$(3) \quad \eta(x, \tau) = 0, \quad \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau} = 0,$$

nennt man eine *Einhüllende (oder Hüllkurve oder Enveloppe)* der durch  $\eta$  definierten Geradenschar.

Gleichwertig besagt dann dieser Satz, dass *die Einhüllende einer Tangentenschar gleich der ursprünglichen Kurve ist*.

**Bemerkungen.** 1) In (2) erhält man geometrisch die gleiche Geradenschar, wenn man  $c$  und  $\omega$  mit einem von Null verschiedenen differenzierbaren Skalar multipliziert. Da sich die Lösungen von (3) hierdurch nicht ändern (Beweis?), erhält man die gleiche Einhüllende.

2) Bei den Beispielen in 5.6.1 erhält man als Einhüllende einmal

$$\langle c, x \rangle = 0, \quad \langle c^\perp, x \rangle = 0, \quad \text{also } x = 0,$$

und die Einhüllende ist ein Punkt, also keine Kurve im strengen Sinne. Zum anderen folgt

$$\langle c, x \rangle = 1, \quad \langle c^\perp, x \rangle = 0, \quad \text{also } x = c,$$

und die Einhüllende ist der Einheitskreis.

**Aufgaben.** 1) Aus 3.1.3 destilliere man die Gleichung für eine Geradenschar, deren Einhüllende eine Ellipse ist. (Lösung s. 5.7.6.)

2) Für  $a \neq 0$  und  $\alpha > 0$  bestimme man die Einhüllende der Schar

$$\langle x, a^\perp + \tau a \rangle = \alpha \tau^2.$$

(Notfalls lese man 5.6.5.) (Lösung s. 5.7.7.)

**5.6.4 Die Normalenschar einer Kurve.** Ausgehend von einer Kurve  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  kann man neben der Tangentenschar (vergl. 5.6.2) auch die Schar der Normalen

$$N_y: \quad y + \mathbb{R}y^\perp$$

betrachten. In der Geradengleichung erhält man die Schar in der Form

$$\langle \dot{y}, x \rangle = \langle \dot{y}, y \rangle.$$

Man dividiert durch  $|\dot{y}|$  und erhält

$$(1) \quad \langle t, x \rangle = \langle t, y \rangle.$$

Zur Bestimmung der Einhüllenden hat man nach Definition 5.6.3 die Gleichung (1) nach dem Parameter zu differenzieren: Mit den Ableitungsgleichungen erhält man, falls die Krümmung  $\kappa$  von  $y$  nirgends Null wird,

$$|\dot{y}| \kappa \langle t^\perp, x \rangle = |\dot{y}| \kappa \langle t^\perp, y \rangle + \langle t, \dot{y} \rangle,$$

also

$$(2) \quad \langle t^\perp, x \rangle = \langle t^\perp, y \rangle + \frac{1}{\kappa}.$$

Ein Vergleich von (1) und (2) ergibt

$$x = y + \frac{1}{\kappa} t^\perp,$$

d. h. *die Einhüllende der Normalenschar ist die Evolute der Kurve* (vergl. Definition 5.2.1). Nach Satz 5.2.2 war dies zumindest anschaulich klar.

**5.6.5 Eine Formel für die Einhüllende.** Geht man von einer Geradenschar

$$(1) \quad \langle c, x \rangle = \omega$$

aus, bei der  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Abbildungen sind, dann kann man, ohne die geometrische Schar zu ändern, sowohl  $c$  als auch  $\omega$  mit einem differenzierbaren und von Null verschiedenen Faktor multiplizieren (vergl. Bemerkung 1 in 5.6.3). Man darf also ohne Einschränkung

$$(2) \quad |c(\tau)| = 1 \quad \text{für alle } \tau \in I$$

annehmen. Nach Lemma 4.2.2 gibt es daher eine stetige Abbildung  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$(3) \quad \dot{c} = \gamma c^\perp.$$

**Satz.** *Gilt  $\gamma(\tau) \neq 0$  und  $|c(\tau)| = 1$  für  $\tau \in I$ , dann ist die Einhüllende der Schar (1) durch*

$$x = \omega c + \frac{\dot{\omega}}{\gamma} c^\perp$$

*gegeben.*

**Beweis.** Nach Definition 5.6.3 hat man (1) nach dem Parameter zu differenzieren und erhält mit (3)

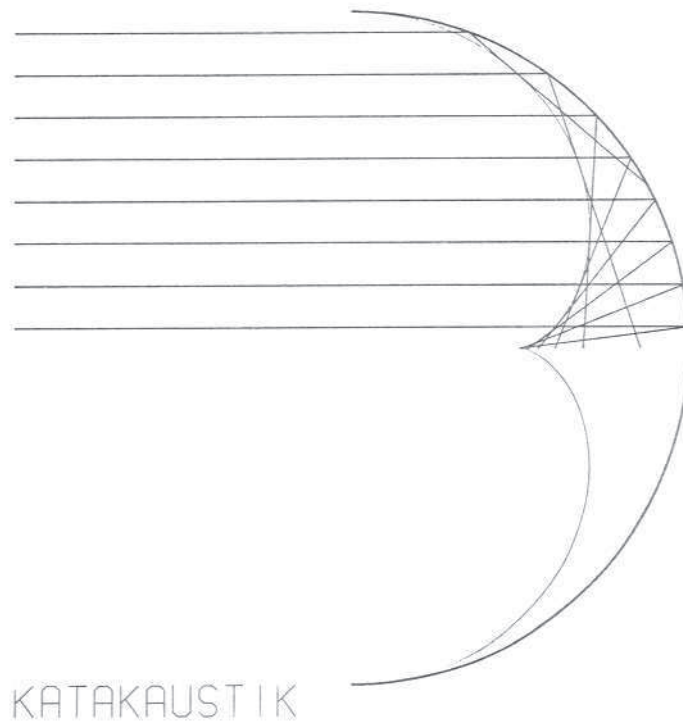
$$(4) \quad \gamma \langle c^\perp, x \rangle = \dot{\omega}.$$

Da man (1) in der Form  $\langle c, x - \omega c \rangle = 0$  schreiben kann, gibt es  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x = \omega c + \varphi c^\perp$ . Man trägt dies in (4) ein und erhält  $\gamma \varphi = \dot{\omega}$ . Damit ist der Satz bewiesen.

**Aufgabe.** Parallel zur  $x_1$ -Achse einfallendes Licht werde am Halbkreis

$$K = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| = 1, x_1 \geq 0\}$$

reflektiert. Die Einhüllende der reflektierten Strahlen heißt Katakaustik. Man bestimme ihre Parametrisierung (bei Vernachlässigung von Sekundärreflektionen). Wie kann man eine Katakaustik näherungsweise technisch realisieren? (Lösung s. 5.7.8.)



## 5.7 Lösungen der Aufgaben in Kurseinheit 5

### 5.7.1 Aufgabe 5.1.2

Zunächst die Archimedische Spirale  $y(\tau) = \tau \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}$ :

Das begleitende Zweibein  $\{t, t^\perp\}$  mit  $t = \frac{\dot{y}}{|\dot{y}|}$  und  $t^\perp = \frac{\dot{y}^\perp}{|\dot{y}|}$  ergibt sich aus

$$\dot{y}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \tau - \tau \sin \tau \\ \sin \tau + \tau \cos \tau \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau} y(\tau) + y(\tau)^\perp,$$

$$|\dot{y}(\tau)| = \sqrt{1 + \tau^2}.$$

Für die Bogenlänge berechnet man

$$\begin{aligned} \lambda(y, 0, \tau) &= \int_0^\tau |\dot{y}(\sigma)| d\sigma = \int_0^\tau \sqrt{1 + \sigma^2} d\sigma \\ &= \frac{\tau}{2} \sqrt{1 + \tau^2} + \frac{1}{2} \log(\tau + \sqrt{1 + \tau^2}). \end{aligned}$$

Wegen

$$\ddot{y}(\tau) = -\frac{1}{\tau^2} y + \frac{1}{\tau} \dot{y} + \dot{y}^\perp = \frac{2}{\tau} y^\perp - y$$

gilt für die Krümmung

$$\kappa(\tau) = \frac{\langle \ddot{y}, \dot{y}^\perp \rangle}{|\dot{y}|^3} = \frac{\langle \frac{2}{\tau} y^\perp - y, \frac{1}{\tau} y^\perp - y \rangle}{|\dot{y}|^3} = \frac{2 + \tau^2}{(1 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun die logarithmische Spirale  $y(\tau) = e^\tau \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}$ :

Das begleitende Zweibein erhält man aus

$$\dot{y}(\tau) = e^\tau \begin{pmatrix} \cos \tau - \sin \tau \\ \sin \tau + \cos \tau \end{pmatrix} = y(\tau) + y(\tau)^\perp,$$

$$|\dot{y}(\tau)| = \sqrt{2} |y(\tau)| = \sqrt{2} e^\tau.$$

Die Bogenlänge (ab  $-\infty$ ) ist

$$\lambda(y, -\infty, \tau) = \int_{-\infty}^\tau |\dot{y}(\sigma)| d\sigma = \int_{-\infty}^\tau \sqrt{2} e^\sigma d\sigma = \sqrt{2} e^\tau.$$

Wegen

$$\ddot{y}(\tau) = \dot{y}(\tau) + \dot{y}(\tau)^\perp = 2y(\tau)^\perp$$

gilt für die Krümmung

$$\kappa(\tau) = \frac{\langle \ddot{y}, \dot{y}^\perp \rangle}{|\dot{y}|^3} = \frac{\langle 2y^\perp, y^\perp - y \rangle}{|\dot{y}|^3} = \frac{2e^{2\tau}}{2\sqrt{2}e^{3\tau}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^\tau}.$$

Die natürliche Gleichung ist also  $\kappa = \frac{1}{\lambda}$ .



Zum Schluss  $y(\tau) = \cos \tau \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{pmatrix}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}$ :

Es gilt

$$\dot{y}(\tau) = \begin{pmatrix} -2 \cos \tau \sin \tau \\ \cos^2 \tau - \sin^2 \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 2\tau \\ \cos 2\tau \end{pmatrix}, \quad |\dot{y}(\tau)| = 1.$$

Die Kurve ist also nach der Bogenlänge parametrisiert. Die Gleichung

$$\ddot{y}(\tau) = 2 \begin{pmatrix} -\cos 2\tau \\ -\sin 2\tau \end{pmatrix} = 2\dot{y}(\tau)^\perp$$

liefert für die Krümmung

$$\kappa(\tau) = \langle \ddot{y}(\tau), \dot{y}(\tau)^\perp \rangle = 2.$$

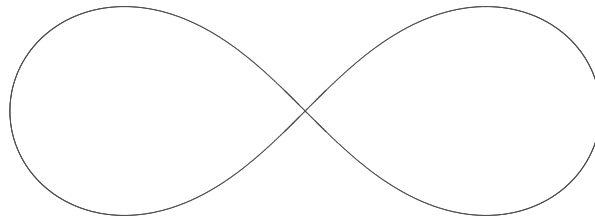
Die natürliche Gleichung ist also  $\kappa = 2$ . Aus

$$y(\tau) = \begin{pmatrix} \cos^2 \tau \\ \sin \tau \cos \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\tau \\ \frac{1}{2} \sin 2\tau \end{pmatrix}$$

sieht man, dass es sich um den Kreis mit Radius  $\frac{1}{2}$  um  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$  handelt.

### 5.7.2 Aufgabe 5.1.5

Wir betrachten die Bernoullische Lemniskate  $y(\tau) = \rho(\tau) \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}$  (s. 5.1.5) mit  $\rho^2(\tau) = 2 \cos(2\tau)$ .



Wegen  $y(0) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $y(\pm\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist die rechte Hälfte der Lemniskate gegeben durch

$$y(\tau) = \sqrt{2 \cos(2\tau)} \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \tau \leq \frac{\pi}{4}.$$

Nach Satz 5.1.3 hat die rechte Hälfte der Lemniskate den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos(2\tau) d\tau = \frac{1}{2} \sin(2\tau) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

die gesamte eingeschlossene Fläche der Lemniskate ist also gleich 2.

**5.7.3 Aufgabe 5.2.2**

Nach Definition der Evolute und mit  $t^* = \varepsilon t^\perp$ ,  $\varepsilon = \frac{\dot{\rho}}{|\dot{\rho}|} = \text{sign } \dot{\rho}$  errechnet man für  $\alpha \in I$

$$\begin{aligned} y(\tau) &= y^*(\tau) - \rho(\tau)t^\perp(\tau) \\ &= y^*(\tau) - (\rho(\alpha) + (\rho(\tau) - \rho(\alpha)))\varepsilon t^*(\tau) \\ &= y^*(\tau) - \left(\varepsilon\rho(\alpha) + \int_\alpha^\tau |(y^*)'(\sigma)| d\sigma\right)t^*(\tau) \\ &= y^*(\tau) - (\lambda_\alpha^*(\tau) + \varepsilon\rho(\alpha))t^*(\tau). \end{aligned}$$

Hier könnte man noch die Konstante  $\varepsilon\rho(\alpha)$  beseitigen:

$$\langle y^*(\alpha) - y(\alpha), t^*(\alpha) \rangle = \langle \rho(\alpha)t^\perp(\alpha), \varepsilon t^\perp(\alpha) \rangle = \varepsilon\rho(\alpha).$$

**5.7.4 Aufgabe 5.2.4**

*Parabel:* Für die Parabel  $y(\tau) = \begin{pmatrix} \tau^2 \\ \tau \end{pmatrix}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  errechnet man  $|\dot{y}(\tau)| = \sqrt{1 + 4\tau^2}$  und

$$\begin{aligned} \kappa(\tau) &= -\frac{2}{(1 + 4\tau^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \rho(\tau) = -\frac{(1 + 4\tau^2)^{\frac{3}{2}}}{2} \\ y^*(\tau) &= y(\tau) + \rho(\tau)t^\perp(\tau) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\tau^2 \\ -4\tau^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man erhält also eine NEILSche Parabel (vgl. 4.2.1).

Für die Parabel „ $y^2 = 2px$ “ ergibt sich

$$y^*(\tau) = p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 3p\tau^2 \\ -2\sqrt{2p}\tau^3 \end{pmatrix}.$$

*Hyperbel:* Wir gehen aus von einer Parametrisierung des „rechten Hyperbelastes“

$$y(\tau) = \begin{pmatrix} a \cosh \tau \\ b \sinh \tau \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Über

$$\begin{aligned} \dot{y}(\tau) &= \begin{pmatrix} a \sinh \tau \\ b \cosh \tau \end{pmatrix}, \quad \dot{y}^\perp(\tau) = \begin{pmatrix} -b \cosh \tau \\ a \sinh \tau \end{pmatrix}, \\ |\dot{y}| &= \sqrt{a^2 \sinh^2 \tau + b^2 \cosh^2 \tau}, \quad \ddot{y}(\tau) = y(\tau) \end{aligned}$$

errechnet man  $\langle \dot{y}(\tau), \dot{y}^\perp(\tau) \rangle = -ab$  und

$$\kappa(\tau) = -\frac{ab}{\sqrt{a^2 \sinh^2 \tau + b^2 \cosh^2 \tau}}.$$

Hieraus erhält man für die Evolute

$$\begin{aligned} y^*(\tau) &= y(\tau) + \rho(\tau)t^\perp(\tau) = \begin{pmatrix} a \cosh \tau \\ b \sinh \tau \end{pmatrix} - \frac{a^2 \sinh^2 \tau + b^2 \cosh^2 \tau}{ab} \begin{pmatrix} -b \cosh \tau \\ a \sinh \tau \end{pmatrix} \\ (*) &= \begin{pmatrix} \frac{a^2+b^2}{a} \cosh^3 \tau \\ -\frac{a^2+b^2}{b} \sinh^3 \tau \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für  $\tau \rightarrow \infty$  hat man wegen  $\cosh \tau - \sinh \tau = e^{-\tau}$  näherungsweise  $\cosh \tau \approx \sinh \tau =: t$  und sieht, dass sich die Evolute (bis auf eine vernachlässigte Verschiebung in  $x$ -Richtung) verhält wie die Halbgerade

$$\frac{1}{ab}t^3 \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

die auf der zugehörigen Asymptote senkrecht steht.

Geht man von einer impliziten Darstellung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x \geq a$$

aus, so kürzt man in (\*)  $a^2 + b^2 =: f^2$  ab, setzt ferner

$$\frac{f^2}{a} \cosh^3(\tau) =: \xi, \quad \frac{f^2}{b} \sinh^3(\tau) =: \eta$$

und erhält  $y^*(\tau) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  mit

$$\left(\frac{a\xi}{f^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\eta}{f^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

(wegen  $\cosh^2 \tau - \sinh^2 \tau = 1$ ).

*Archimedische Spirale:* Für die allgemeine archimedische Spirale  $y(\tau) = a\tau \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , bekommt man

$$\begin{aligned} \dot{y}(\tau) &= \frac{1}{\tau}y(\tau) + y(\tau)^\perp, \quad |\dot{y}(\tau)| = |a|\sqrt{1 + \tau^2}, \\ t^\perp(\tau) &= -\text{sign}(a)\frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}} \begin{pmatrix} \sin \tau + \tau \cos \tau \\ -\cos \tau + \tau \sin \tau \end{pmatrix}, \\ \rho(\tau) &= |a|\frac{(1 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}{2 + \tau^2} \end{aligned}$$

und schließlich

$$y^*(\tau) = -a \frac{\tau^2 + 1}{\tau^2 + 2} \begin{pmatrix} -\sin \tau \\ \cos \tau \end{pmatrix} + \frac{a\tau}{\tau^2 + 2} \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}.$$

Für große  $\tau$  geht die Evolute also in den Kreis  $-a \begin{pmatrix} -\sin \tau \\ \cos \tau \end{pmatrix}$  über.

### 5.7.5 Aufgabe 5.5.5

Für die Traktrix

$$y(\tau) = [\log \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}) - \sin \tau]e + [\cosh \tau]e^\perp, \quad 0 \leq \tau < \frac{\pi}{2}$$

gilt nach 4.2.9

$$\dot{y}(\tau) = \frac{\sin^2 \tau}{\cos \tau} e - (\sin \tau)e^\perp, \quad |\dot{y}(\tau)| = \tan \tau.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sin^2 \tau}{\cos \tau} \right)' &= \frac{2 \cos^2 \tau \sin \tau + \sin^3 \tau}{\cos^2 \tau} \\ &= 2 \sin \tau + \frac{\sin \tau (1 - \cos^2 \tau)}{\cos^2 \tau} = \sin \tau + \frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau} \end{aligned}$$

gilt

$$\ddot{y}(\tau) = [\sin \tau + \frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau}]e - [\cos \tau]e^\perp.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \langle \ddot{y}(\tau), \dot{y}(\tau)^\perp \rangle &= -\sin^2 \tau + (\sin \tau) \left( \sin \tau + \frac{\sin \tau}{\cos^2 \tau} \right) \\ &= \frac{\sin^2 \tau}{\cos^2 \tau} = \tan^2 \tau, \end{aligned}$$

also

$$\frac{|\dot{y}|^2}{\langle \ddot{y}, \dot{y}^\perp \rangle} = \frac{\tan^2 \tau}{\tan^2 \tau} = 1.$$

Also gilt für die Evolute

$$\begin{aligned} y^*(\tau) &= y(\tau) + \dot{y}^\perp(\tau) = [\log \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2})]e + [\cos \tau + \frac{\sin^2 \tau}{\cos \tau}]e^\perp \\ &= [\log \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2})]e + \frac{1}{\cos \tau} e^\perp. \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\sigma(\tau) := \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right) \quad \text{für } 0 \leq \tau < \frac{\pi}{2},$$

so ist  $\sigma(\tau) \geq 0$ , denn wegen  $0 \leq \tau < \frac{\pi}{2}$  gilt  $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} < \frac{\pi}{2}$ , also  $1 \leq \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}) < \infty$  und damit  $0 \leq \sigma(\tau) < \infty$ . Es ist  $\dot{\sigma}(\tau) > 0$  für  $0 \leq \tau < \frac{\pi}{2}$ , und  $\sigma$  bildet das Intervall  $[0, \frac{\pi}{2}[$  streng monoton wachsend und bijektiv auf  $[0, \infty[$  ab, also ist  $\sigma : [0, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow [0, \infty[$  eine Parametertransformation. Nach dem Hinweis ist

$$\cosh \sigma(\tau) = \frac{1}{\cosh \tau},$$

also hat man

$$y^*(\tau) = \sigma(\tau)e + [\cosh \sigma(\tau)]e^\perp = \begin{pmatrix} \sigma \\ \cosh \sigma \end{pmatrix}$$

mit  $\sigma \geq 0$  für  $0 \leq \tau < \frac{\pi}{2}$ , also die Kettenlinie.

Der Hinweis ist auch ganz leicht zu zeigen, denn wegen  $\cosh x = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$  gilt für  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}$ :

$$\begin{aligned} \cosh \log \tan \alpha &= \frac{1}{2} \left( \tan \alpha + \exp \log \frac{1}{\tan \alpha} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} + \tau)} = \frac{1}{\cos \tau}. \end{aligned}$$

### 5.7.6 Aufgabe 1) aus 5.6.3

Nach Satz 5.6.2 (in der Umformulierung auf Seite 264 unten) ist die Ellipse die Einhüllende ihrer Tangentenschar. Für die Ellipse

$$E \quad \langle x, Sx \rangle = 1 \quad \text{mit} \quad S = \begin{pmatrix} h_1^{-2} & 0 \\ 0 & h_2^{-2} \end{pmatrix}$$

ist die Tangente in  $c \in E$  nach 3.1.3 gegeben durch

$$T_c \quad \langle x, Sc \rangle = 1.$$

Setzen wir  $c \in E$  in der Form  $c = \begin{pmatrix} h_1 \cos \tau \\ h_2 \sin \tau \end{pmatrix}$  mit  $\tau \in \mathbb{R}$  an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle x, Sc \rangle = 1 &\iff \frac{x_1 c_1}{h_1^2} + \frac{x_2 c_2}{h_2^2} = 1 \\ (*) &\iff \frac{x_1 \cos \tau}{h_1} + \frac{x_2 \sin \tau}{h_2} = 1. \end{aligned}$$

Mit  $\eta(x, \tau) := \frac{x_1 \cos \tau}{h_1} + \frac{x_2 \sin \tau}{h_2} - 1$  ist also eine Parametrisierung der Tangentenschar gegeben durch  $\eta(x, \tau) = 0$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ .

(Für  $\tau \notin \{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$  ist (\*) äquivalent zu

$$\frac{x_1}{(h_1/\cos \tau)} + \frac{x_2}{(h_2/\sin \tau)} = 1,$$

so dass man direkt die „Achsenabschnitte“  $\frac{h_1}{\cos \tau}$  und  $\frac{h_2}{\sin \tau}$  der Geraden ablesen kann.)

### 5.7.7 Aufgabe 2) aus 5.6.3

Für  $\eta(x, \tau) := \langle a^\perp + \tau a, x \rangle - \alpha \tau^2$  hat man

$$\eta(x, \tau) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \eta}{\partial \tau}(x, \tau) = 0$$

zu lösen. Man kann nun die Überlegung 5.6.5 an diesem Beispiel durchführen oder das dortige Ergebnis hier spezialisieren:

$$\begin{aligned} c(\tau) &= \frac{a^\perp + \tau a}{|a|\sqrt{1 + \tau^2}}, \\ \dot{c}(\tau) &= \frac{1}{|a|} \left( -(1 + \tau^2)^{-\frac{3}{2}} \tau (a^\perp + \tau a) + (1 + \tau^2)^{-\frac{1}{2}} a \right) \\ &= \frac{(1 + \tau^2)^{-\frac{3}{2}}}{|a|} (-\tau a^\perp - \tau^2 a + (1 + \tau^2)a) \\ &= \frac{-1}{1 + \tau^2} \cdot \frac{-a + \tau a^\perp}{|a|\sqrt{1 + \tau^2}} = \gamma(\tau) c(\tau)^\perp \end{aligned}$$

mit  $\gamma(\tau) = \frac{-1}{1 + \tau^2}$ . Man hat

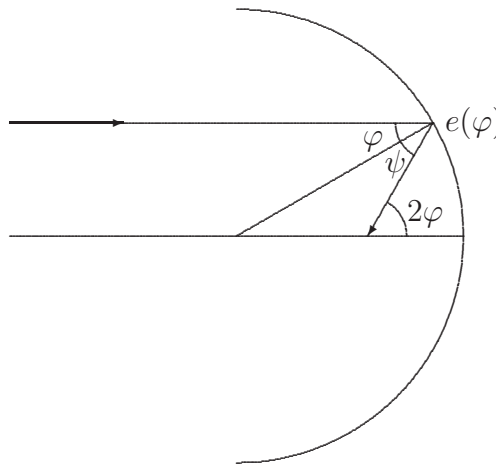
$$\begin{aligned} \omega(\tau) &= \frac{\alpha \tau^2}{|a|\sqrt{1 + \tau^2}}, \\ \frac{\dot{\omega}(\tau)}{\gamma(\tau)} &= \frac{-\alpha(1 + \tau^2)}{|a|} \left( -(1 + \tau^2)^{-\frac{3}{2}} \tau^3 + (1 + \tau^2)^{-\frac{1}{2}} 2\tau \right) \\ &= \frac{-\alpha}{|a|} \cdot \frac{-\tau^3 + (1 + \tau^2)2\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}} = \frac{-\alpha}{|a|} \cdot \frac{\tau^3 + 2\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}}. \end{aligned}$$

Nach dem Satz aus 5.6.5 erhält man dann die Einhüllende der Schar durch

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \omega(\tau) c(\tau) + \frac{\dot{\omega}(\tau)}{\gamma(\tau)} c(\tau)^\perp \\ &= \frac{\alpha \tau^2 (a^\perp + \tau a) - \alpha (\tau^3 + 2\tau) (-a + \tau a^\perp)}{|a|^2 (1 + \tau^2)} \\ &= \frac{\alpha (2\tau^3 + 2\tau) a - \alpha (\tau^2 + \tau^4) a^\perp}{|a|^2 (1 + \tau^2)} \\ &= \frac{2\alpha}{|a|^2} \tau a - \frac{\alpha}{|a|^2} \tau^2 a^\perp. \end{aligned}$$

Dies ist eine Parabel.

5.7.8 Aufgabe 5.6.5



Die einfallenden Lichtstrahlen, die an  $K$  reflektiert werden, liegen auf Geraden der Form

$$G_{e(\varphi),a} \text{ mit } a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Die reflektierten Strahlen beginnen in  $e(\varphi)$  und haben (s. Zeichnung) nach dem Reflektionsgesetz ( $\psi = \varphi$ ) den Richtungsvektor  $-e(2\varphi)$ . Sie werden also durch die Geradenschar

$$G_{e(\varphi),e(2\varphi)}, \quad \varphi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

gegeben. Für die  $H$ -Form  $H_{c(\varphi),\omega(\varphi)}$  dieser Geraden gilt (nach Aufgabe 2 a) aus 1.2.1)

$$\begin{aligned} c(\varphi) &= e(2\varphi)^\perp = \begin{pmatrix} -\sin(2\varphi) \\ \cos(2\varphi) \end{pmatrix}, \\ \omega(\varphi) &= \langle e(2\varphi)^\perp, e(\varphi) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(2\varphi) \\ \cos(2\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\sin(2\varphi) \cos \varphi + \cos(2\varphi) \sin \varphi = -\sin \varphi \end{aligned}$$

(wegen  $\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi$  und  $\cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1$ ). Wegen  $|c(\varphi)| = 1$  kann man Satz 5.6.5 anwenden; mit den Bezeichnungen aus 5.6.5 hat man

$$\dot{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2 \cos 2\varphi \\ -2 \sin 2\varphi \end{pmatrix} = 2c(\varphi)^\perp, \text{ also } \gamma \equiv 2, \dot{\omega}(\varphi) = -\cos \varphi.$$

Damit erhält man nach Satz 5.6.5 für die Einhüllende

$$x(\varphi) = -\sin \varphi \cdot e(2\varphi)^\perp + \frac{1}{2} \cos \varphi \cdot e(2\varphi),$$

also

$$x_1(\varphi) = \sin \varphi \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi \cos 2\varphi = \frac{3}{2} \cos \varphi - \cos^3 \varphi,$$

$$x_2(\varphi) = -\sin \varphi \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi \sin 2\varphi = \sin^3 \varphi.$$

Man kann die Katakaustik näherungsweise realisieren, indem man einen hohlzylinderähnlichen Gegenstand von geringer Höhe (z. B. Ehering) auf ein Blatt Papier legt und ihn im eventuell verdunkelten Raum mit einem Bündel Licht schräg von oben beleuchtet. Dann erscheint auf dem Papier die Katakaustik als Trennlinie zwischen hell und dunkel.



