Prof. Dr. Albert Schneider

61523
Grundzüge gewöhnlicher Differentialgleichungen

Leseprobe

Fakultät für
Mathematik und Informatik

FernUniversität in Hagen

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung und des Nachdrucks, verbleiben bei der FernUniversität. Das Werk darf gemäß § 53 UrhG im privaten Rahmen zum Beispiel durch Kopien oder digitale Speicherung vervielfältigt werden.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

Studierhinweise zu Kurseinheit 1 **6**

1 Elementare Integrationsmethoden **9**

1.1 Einleitung, Grundbegriffe 9

1.2 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen 25

1.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung 35

1.4 Die Bernoullische Differentialgleichung 43

1.5 Die Riccatische Differentialgleichung 46

1.6 Exakte Differentialgleichungen, integrierende Faktoren 55

Lösungen der Aufgaben zu 1.1 67

Lösungen der Aufgaben zu 1.2 68

Lösungen der Aufgaben zu 1.3 70

Lösungen der Aufgaben zu 1.4 72

Lösungen der Aufgaben zu 1.5 73

Lösungen der Aufgaben zu 1.6 76

Index zu Kurseinheit 1 **79**

Diese Seite bleibt aus technischen Gründen frei

Einleitung

In fast allen Bereichen, in denen mathematische Modelle zur Beschreibung von Phänomenen und Zusammenhängen benutzt werden, treten Differentialgleichungen auf. Das gilt besonders für die Natur- und Ingenieurwissenschaften, insbesondere für die Physik, und die Entwicklung der Theorie der Differentialgleichungen ist durch die vielfältigen Fragestellungen aus diesen Disziplinen wesentlich vorangetrieben und beeinflusst worden, sowohl bei den gewöhnlichen als auch bei den partiellen Differentialgleichungen.

In diesem Kurs werden die Grundlagen der Theorie der *gewöhnlichen* Differentialgleichungen entwickelt. Wir beschränken uns dabei aufs Reelle, um Kenntnisse aus der Funktionentheorie nicht voraussetzen zu müssen. Die Erweiterung aufs Komplexe wird nur dort ausgeführt, wo man mit der Kenntnis der komplexen Zahlen auskommt. Wir stützen uns daher allein auf die Grundkurse über Analysis und Lineare Algebra.

Da sich der Kurs an Studierende der Mathematik wendet, die sich ihre Kenntnisse allein durch schriftliches Studienmaterial erarbeiten, sind viele Details in breiterer Form als üblich dargestellt. Die Begriffe und Sätze werden anhand von Beispielen vorbereitet und erläutert und oft an späterer Stelle nochmals wiederholt. Hierauf kann man in einem Lehrbuch, das man begleitend oder ergänzend zu einer Vorlesung benutzt, verzichten, da man im Vortrag je nach Bedarf die notwendigen Wiederholungen einfügen kann.

Wir beginnen die erste Kurseinheit mit der Diskussion dreier Beispiele als Vorbereitung für die Einführung der wichtigsten Grundbegriffe und Methoden. Das erste Beispiel stammt aus der Physik und beschreibt ein idealisiertes Modell für den Zerfall einer radioaktiven Substanz. Als zweites Beispiel wird eine sogenannte logistische Gleichung betrachtet, die ein Modell für die Entwicklung einer Population liefert und erste qualitative Methoden deutlich macht. Das dritte Beispiel ist ein Differentialgleichungssystem - auch als Volterra - Lotka Gleichungen bezeichnet - und ein sogenanntes „Räuber - Beute“ Modell darstellt. An diesem letzten Beispiel lässt sich sehr schön zeigen, dass man auch ohne explizite Lösungsformeln das qualitative Verhalten von Lösungen sehr gut beschreiben kann. Nach diesen vorbereitenden Beispielen beschließen wir den Abschnitt 1.1 mit der Einführung der Grundbegriffe. In den folgenden Abschnitten 1.2 bis 1.4 werden dann einige spezielle Typen von Differentialglei-

chungen behandelt, bei denen man mit Hilfe gewisser „elementarer“ Integrationsmethoden Lösungen gewinnen kann. Hierzu gehört die Differentialgleichung mit getrennten Variablen, die lineare Differentialgleichung erster Ordnung, sowie die Bernoullische Differentialgleichung. Mit Hilfe geeigneter Transformationen lassen sich weitere Differentialgleichungen auf diese zurückführen. In Abschnitt 1.5 wird dann die Riccatische Differentialgleichung betrachtet, bei der man im allgemeinen keine elementaren Integrationsmethoden mehr besitzt. Abschnitt 1.6 befasst sich mit der exakten Differentialgleichung und deren Integration.

In der zweiten Kurseinheit wird ausführlich das Anfangswertproblem für explizite Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = f(x, y)$$

behandelt. Hierfür wiederholen wir zunächst in Abschnitt 2.2 die Grundlagen über die Stetigkeit, die Differenzierbarkeit und die Integrierbarkeit vektorwertiger ($\mathbb{R}^n$ - oder $\mathbb{C}^n$ - wertiger) Funktionen. Gestützt auf den Banachschen Fixpunktsatz, den wir in 2.3 beweisen, wird dann in Abschnitt 2.4 der Existenz - und Eindeutigkeitssatz von Picard - Lindelöf gezeigt, aus dem die eindeutige Existenz einer lokalen Lösung unter einer Lipschitzbedingung an f folgt. Jede Lösung besitzt eine maximale Fortsetzung, die von „Rand zu Rand “ verläuft und als globale Lösung des Anfangswertproblems bezeichnet wird. Falls f nur stetig angenommen wird, folgt noch die Existenz einer Lösung aus dem Existenzsatz von Peano, der in Abschnitt 2.5 bewiesen wird; die Eindeutigkeit ist aber nicht mehr gegeben, wie Gegenbeispiele zeigen. Im letzten Abschnitt 2.6 beschäftigen wir uns dann noch mit dem Anfangswertproblem für explizite Differentialgleichungssysteme n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$$

und zeigen, wie dieses auf ein Anfangswertproblem für ein explizites System erster Ordnung zurückgeführt werden kann. Die eindeutige Lösbarkeit ergibt sich unter einer entsprechenden Lipschitzbedingung an f.

In der dritten Kurseinheit befassen wir uns mit der Abhängigkeit der Lösung des Anfangswertproblems von den Anfangsdaten und möglichen weiteren Parametern. Zur Verdeutlichung der Problemstellung und auftretender Fragen dienen die Beispiele in 3.1. In Abschnitt 3.2 beweisen wir die stetige Abhängigkeit der Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, \lambda) \\ y(\xi) &= \eta \end{aligned}$$

von den Anfagsdaten ξ, η und λ, falls f stetig vom Parameter abhängt. Das Hauptergebnis ist Satz 3.2.19. Bei entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die Funktion f einschließlich der nach dem Parameter λ folgt in den Abschnitten 3.3 und 3.4 auch die entsprechende Differenzierbarkeitseigenschaft der Lösung nach den Anfangsdaten und Parametern. Das zentrale Ergebnis ist hier der Satz 3.4.25.

Die Ergebnisse des zweiten Paragraphen werden in der vierten Kurseinheit auf lineare Differentialgleichungssysteme angewendet, bei denen die Lipschitzbedingung erfüllt ist, und auf die folglich der Picard–Lindelöfsche Existenz– und Eindeutigkeitssatz angewendet werden kann. Hiermit beweist man im Abschnitt 4.2 die Existenz von Fundamentalsystemen für die homogene Gleichung und ihre Charakterisierung mit Hilfe der Wronski–Determinante. In 4.3 wird die inhomogene Gleichung betrachtet und das Lösungsverfahren der „Variation der Konstanten“ beschrieben. Im letzten Abschnitt 4.4 werden Systeme mit konstanten Koeffizienten betrachtet, und das Hauptergebnis ist die Bestimmung einer Fundamentalmatrix mit Hilfe der Eigenwerte der Koeffizientenmatrix des Systems und einer zugehörigen Basis aus Eigen– und Hauptvektoren.

Lineare Differentialgleichungen n–ter Ordnung lassen sich zurückführen auf Systeme erster Ordnung, und man erhält damit in 5.1 sofort die Existenz von Fundamentalsystemen für die lineare Differentialgleichung n–ter Ordnung einschließlich der Charakterisierung mit Hilfe der Wronski–Determinante. Ebenso erhält man die Möglichkeit, eine Lösung der inhomogenen Gleichung über den Ansatz der „Variation der Konstanten“ zu bestimmen. In Abschnitt 5.2 betrachtet man die lineare Differentialgleichung n–ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, und die Beschreibung einer Fundamentalmatrix gemäß Abschnitt 4.4 liefert für die Differentialgleichung n–ter Ordnung ein Fundamentalsystem mit Hilfe der Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms gemäß Satz 5.2.10. Für spezielle Inhomogenitäten findet man eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung durch geeignete Ansätze. Die Eulersche Differentialgleichung, deren Koeffizienten Potenzen der unabhängigen Variablen sind, lässt sich auf eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten transformieren, und man findet auch hier ein Fundamentalsystem allein mit Hilfe der Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms. In Abschnitt 5.3 werden die Er-

gebnisse nochmals explizit für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung formuliert. Abschnitt 5.4 enthält erste qualitative Aussagen über die Lösungen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung. Wir beweisen die Isoliertheit der Nullstellen, die Trennung der Nullstellen linear unabhängiger Lösungen (Sturmscher Trennungssatz) und führen die sogenannte Prüfertransformation ein, mit der genauere Aussagen über die Verteilung möglicher Nullstellen gemacht werden kann. Den Abschluss dieses Abschnitts bildet der Sturm–Piconesche Vergleichssatz. Am Ende dieses Paragraphen werden in Abschnitt 5.5 noch die Eigenschaft der Oszillation und der Nichtoszillation betrachtet, einige Kriterien bewiesen und schließlich für den nichtoszillatorischen Fall die Existenz von Prinzipallösungen und deren Charakterisierung bewiesen.

Im sechsten Paragraphen beschäftigen wir uns mit Zweipunkt– Randwertaufgaben. Die Definition erfolgt in 6.1 einschließlich einfacher Beispiele zur Erläuterung. Mit Abschnitt 6.2 beginnend untersuchen wir *lineare* Randwertaufgaben zweiter Ordnung. Die Lösungsgesamtheit der homogenen Randwertaufgabe bildet einen Vektorraum, und das Hauptergebnis von Abschnitt 6.2 ist Satz 6.2.15, der die Äquivalenz der eindeutigen Lösbarkeit der inhomogenen Aufgabe zur nur trivialen Lösbarkeit der homogenen Randwertaufgabe beinhaltet. In diesem Falle lässt sich die eindeutige Lösung der halbhomogenen Randwertaufgabe mit Hilfe der Greenschen Funktion des Randwertproblems darstellen, und Satz 6.3.10 zählt die Eigenschaften auf, durch die die Greensche Funktion charakterisiert ist. In 6.4 wird die adjungierte Randwertaufgabe erklärt und gezeigt, dass die homogene Randwertaufgabe genau dann nur trivial lösbar ist, wenn auch die adjungierte Randwertaufgabe nur die triviale Lösung zulässt. Die Greensche Funktion der adjungierten Randwertaufgabe existiert somit genau dann, wenn die Greensche Funktion des Ausgangsproblems existiert, und Satz 6.4.19 enthält die Beziehung der beiden Greenschen Funktionen zueinander. Selbstadjungierte Randwertaufgaben werden in Abschnitt 6.5 erklärt, und Satz 6.5.17 liefert die hermitesche Symmetrie der Greenschen Funktion selbstadjungierter Randwertaufgaben.

Im siebten und letzten Paragraphen betrachten wir Zweipunkt– Randeigenwertprobleme für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung. In 7.2 erkären wir dann, wann ein Randeigenwertproblem selbstadjungiert heißt und beweisen erste Eigenschaften für die Eigenwerte und Eigenlösungen. Selbstadjungierte Randeigenwertprobleme haben höchstens reelle Eigenwerte ohne endlichen Häufungspunkt, was wir in diesem Kurs nicht unter Benutzung funktionen-

theoretischer Sätze beweisen, sondern durch Rückführung selbstadjungierter Randeigenwertprobleme auf die Eigenwerttheorie selbstadjungierter Integraloperatoren im Raum der stetigen Funktionen $C_0([a,b],\mathbb{C})$ mit Hilfe der Greenschen Funktion. Die Eigenwerttheorie dieser Integraloperatoren wird in Abschnitt 7.3 entwickelt, einschließlich der Spektralzerlegung solcher Operatoren gemäß Satz 7.4.9, aus dem für selbstadjungierte Randeigenwertprobleme der Entwicklungssatz 7.4.29 nach den Eigenfunktionen folgt sowie der Entwicklungssatz 7.4.53 für verallgemeinerte selbstadjungierte Randeigenwertprobleme der Form 7.4.54. Unsere Ausführungen schließen in 7.5 ab mit einem Ausblick auf nicht-selbstadjungierte Randeigenwertprobleme.

Entsprechend dem angestrebten Ziel sind im Studientext stets erläuternde Beispiele vorgerechnet und Übungsaufgaben eingefügt, deren Lösungen man in den jeweiligen Lösungshinweisen überprüfen kann, aber es wird empfohlen, zunächst ohne Benutzung der Lösungshinweise die zur Aktivierung des Gelernten gedachten Aufgaben in Angriff zu nehmen, um eine Kontrolle des eigenen Verständnisses zu haben. Auch die Einsendeaufgaben knüpfen direkt an den Studientext an und dienen der Aktivierung des erarbeiteten Materials.

Jeder Kurseinheit sind kurze Studierhinweise beigefügt, die Ihnen das Lernziel des entsprechenden Abschnitts deutlich machen sollen. Gleichzeitig finden Sie einige Literaturangaben, in denen der jeweils vorliegende Stoff ebenfalls dargestellt ist und die Sie bei Verständnisschwierigkeiten mit hinzuziehen können. Diese Literaturangaben sind natürlich nicht umfassend, und die Reihenfolge ist ebenfalls willkürlich und nicht wertend. Ferner sind auch englischsprachige Lehrbücher aufgenommen, da hier einige ausgezeichnete Darstellungen des Stoffs vorhanden sind.

Studierhinweise zu Kurseinheit 1

Wir behandeln in dieser ersten Kurseinheit einige wichtige Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung und ihre Lösungsmethoden. Gleichzeitig werden die wichtigsten Grundbegriffe eingeführt. Sie sollten deshalb die Rechnungen zu den vorgeführten Beispielen in allen Einzelheiten nachvollziehen und die eingefügten Aufgaben nach den dargestellten Methoden zu lösen versuchen. Nach der Bearbeitung dieser Kurseinheit sollten Sie in der Lage sein,

1) den Begriff einer gewöhnlichen Differentialgleichung zu erläutern sowie die damit verbundenen Begriffe wie Ordnung und Dimension der Differentialgleichung, Lösung, Lösungskurve usw.,

2) das Anfangswertproblem für explizite Differentialgleichungen erster Ordnung zu formulieren und bei den speziellen behandelten Beispielen Existenz- und Eindeutigkeitsfragen zu beantworten,

3) vorgelegte Differentialgleichungen erster Ordnung vom Typ her zu erkennen und einzuordnen, sowie ihre Lösungsansätze zu beherrschen.

Machen Sie sich stets klar, dass man sich mit den geschilderten Methoden Lösungen verschaffen kann, dass aber im allgemeinen nichts über das maximale Existenzintervall ausgesagt wird. Dies muss man bei jedem Beispiel gesondert betrachten und sollte nach Lösung jeder Aufgabe getan werden.

Literaturverzeichnis zu Kurseinheit 1

Erwe, F.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.*
2. Auflage, BI Hochschultaschenbücher, Bibliographisches Institut, Mannheim 1964

Ince, E.L.: *Die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.*
BI Hochschultaschenbücher Bibliographisches Institut Mannheim

Kamke, E.: *Differentialgleichungen,* Bd. 1.
Geest und Portig KG., Leipzig 1969

Kamke, E.: *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen.*
Geest und Portig KG., Leipzig 1967

Peyerimhoff, A.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen,* Bd. 1.
Akademische Verlagsgesellschaft 1970, Frankfurt a. M.

Walter, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.*
5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1993

§ 1 Elementare Integrationsmethoden

1.1 Einleitung, Grundbegriffe

Differentialgleichungen treten in den unterschiedlichsten Bereichen auf, in denen mathematische Modelle und Theorien zur Beschreibung benutzt werden. Zur Einführung beginnen wir mit einem einfachen Beispiel aus der Physik.

1. Der radioaktive Zerfall

Man habe eine radioaktive Substanz, die zum Zeitpunkt $t = 0$ die Masse m_0 hat. Ist $m(t)$ die zur Zeit t noch vorhandene Masse, so ist für $h > 0$ die Differenz $m(t) - m(t + h)$ der im Zeitintervall von t bis $t + h$ zerfallene Anteil der Substanz, und die physikalische (idealisierte) Annahme ist, dass dieser Anteil proportional der vorhandenen Masse $m(t)$ und der Zeitspanne h ist, also

1.1.1 $$m(t) - m(t + h) = \alpha h\, m(t)\,.$$

Der Proportionalitätsfaktor $\alpha > 0$ bestimmt sich aus den physikalischen Eigenschaften der Substanz. Unter der weiteren Annahme, dass m eine differenzierbare Funktion ist (was eine weitere Idealisierung des Modells ist), erhalten wir aus 1.1.1 durch Grenzübergang $h \to 0$, dass $m(t)$ für alle t der Gleichung $m'(t) = -\alpha\, m(t)$ genügen muss, d.h., es muss

1.1.2 $$m' = -\alpha\, m$$

erfüllt sein. Eine solche Gleichung, in der Funktionen und ihre Ableitungen vorkommen, nennt man eine **Differentialgleichung**.

Für reelle ρ ist durch $y(t) := \rho e^{-\alpha t}$ eine auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion y definiert, die der Differentialgleichung 1.1.2 genügt. Wir zeigen, dass man für ein geeignetes ρ die gesuchte Funktion m erhält. Dazu betrachten wir die Funktion ϕ, erklärt durch

1.1.3 $$\phi(t) := e^{\alpha t} m(t)\,.$$

Sie ist für $t \geq 0$ differenzierbar, und wegen 1.1.2 gilt

$$\phi'(t) = e^{\alpha t}(m'(t) + \alpha\, m(t)) = 0\,.$$

Daher ist ϕ eine konstante Funktion, deren Wert wir durch Einsetzen von $t = 0$ ermitteln. Es folgt

$$\phi(t) = \phi(0) = m(0) =: m_0 \quad \text{für jedes} \quad t \geq 0\,;$$

also ist nach 1.1.3

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t}\,.$$

Die Zeitspanne T, in der die Substanz zur Hälfte zerfällt, heißt die Halbwertzeit. Sie bestimmt sich aus der Gleichung

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-\alpha T}\,,$$

und damit ist $T = \dfrac{1}{\alpha}\log 2$. Die Konstante α wird im Experiment bestimmt. So findet man z.B. für Radon die Halbwertzeit von 3,8 Tagen und für Plutonium die von 24 000 Jahren.

1.1.4 Bemerkung

Ist z eine auf einem Intervall J definierte differenzierbare Funktion, die dort der Gleichung 1.1.2 genügt, so ergibt sich mit der gleichen Schlussweise wie für m, dass mit einem geeigneten ρ für $t \in J$

1.1.5 $$z(t) = \rho e^{-\alpha t}$$

gilt. Insbesondere kann also z durch 1.1.5 zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbaren Funktion erweitert werden, die für alle $t \in \mathbb{R}$ der Gleichung 1.1.2 genügt.

1.1.6 Bemerkung

Gibt man Zahlen τ und η vor, so gibt es genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion z, die für alle $t \in \mathbb{R}$ der Gleichung 1.1.2 genügt und für τ den Wert η annimmt. Denn nach Bemerkung 1.1.4 erhält man sämtliche Lösungen von 1.1.2 durch 1.1.5. Die Bedingung $z(\tau) = \eta$ ergibt für ρ notwendig $\rho = \eta e^{\alpha\tau}$. Also gibt es höchstens eine Lösung mit $z(\tau) = \eta$. Umgekehrt erhält man für dieses ρ eine Lösung mit der verlangten Eigenschaft.

2. Eine logistische Gleichung

Für jeden Zeitpunkt t bezeichne $p(t)$ eine Menge von Fischen in einem Teich, – beispielsweise gemessen durch das Gesamtgewicht der Fische – die durch Einsetzen aus einer Anfangsmenge p_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ herangewachsen ist, und $e > 0$ bezeichne eine konstante Entnahmerate (z.B. 100 kg Fische pro Monat). Unter der Annahme, dass p eine differenzierbare Funktion ist – was natürlich eine idealisierte Approximation ist – erfüllt sie nach einem einfachen Wachstumsmodell die Differentialgleichung

1.1.7 $$p' = ap - \varepsilon p^2 - e$$

und die **Anfangsbedingung** $p(0) = p_0$. Dabei sind a und ε positive Konstanten, und normalerweise ist ε klein gegen a. Mit der Funktion $f(p) = ap - \varepsilon p^2 - e$ können wir 1.1.7 als $p' = f(p)$ notieren.

Die Lösungen der Differentialgleichung 1.1.7 lassen sich wegen der konstanten Entnahmerate e noch durch explizite Formeln gewinnen – siehe Abschnitt 1.2. – Wenn aber die Entnahmerate e eine Funktion $e(t)$ der Zeit ist, geht das im Allgemeinen nicht mehr. Dennoch kann man oft das „qualitative“ Verhalten der Lösungen sehr gut beschreiben, und wir wollen dies für den Fall der konstanten Entnahmerate erläutern. Wir benutzen dabei, dass jede beschränkte Lösung für alle $t \geq 0$ existiert, was wir später zeigen. Ebenso benutzen wir, dass die Graphen zweier Lösungen entweder disjunkt oder identisch sind. Auch das folgt später aus Eindeutigkeitssätzen für 1.1.7.

Wir bestimmen zunächst die Nullstellen der rechten Seite von 1.1.7, das heißt von f. Man nennt sie die **kritischen Punkte** der Differentialgleichung. Die quadratische Gleichung $f(p) = ap - \varepsilon p^2 - e = 0$ hat die Lösungen

$$p = \frac{a}{2\varepsilon} \pm \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{a^2 - 4\varepsilon e}.$$

Die Anzahl der kritischen Punkte ist für das Verhalten der Lösungen von entscheidender Bedeutung. Wir setzen noch $e^* := \dfrac{a^2}{4\varepsilon}$ und beginnen mit

Fall 1: $a^2 - 4\varepsilon e > 0$, das heißt $e < e^*$. Wir haben dann die zwei kritischen Punkte

$$k_\pm = \frac{a}{2\varepsilon} \pm \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{a^2 - 4\varepsilon e}\,.$$

Diese Werte führen zu den beiden konstanten Lösungen

$$p_\pm(t) = k_\pm \quad \text{für } t \geq 0\,,$$

und die Graphen dieser Lösungen teilen den ersten Quadranten der (t,p) - Ebene in drei horizontale Streifen

$$\begin{aligned} I_1 : &= \{(t,p)\,|\,p < k_-\}, \\ I_2 : &= \{(t,p)\,|\,k_- < p < k_+\}, \\ I_3 : &= \{(t,p)\,|\,k_+ < p\} \end{aligned}$$

mit der Eigenschaft, dass $f(p)$ positiv ist für $(t,p) \in I_2$ und negativ für $(t,p) \in I_1 \cup I_3$. Das hat zur Folge, dass jede Lösung von 1.1.7 verschieden von p_+ und p_- streng monoton ist und den jeweiligen Streifen nicht verlassen kann.

Wir betrachten zuerst die Lösung $p(t)$ mit einem Anfangswert $p_0 > k_+$. Die Existenz und Eindeutigkeit dieser Lösung folgt aus den Existenz - und Eindeutigkeitssätzen, die wir in der Kurseinheit 2 beweisen werden. Diese Lösung verläuft im Streifen I_3 monoton fallend und ist daher beschränkt. Folglich existiert sie für alle $t \geq 0$, und es gilt $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = k_+$. Die Existenz des Grenzwertes folgt aus der Monotonie und der Beschränktheit nach unten. Aus der Differentialgleichung 1.1.7 folgt dann, dass auch der $\lim\limits_{t\to\infty} p'(t)$ existiert und nicht positiv ist. Da p beschränkt ist, gilt $\lim\limits_{t\to\infty} p'(t) = 0$, und damit ist $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)$ eine Nullstelle von f, die größer oder gleich k_+ sein muss und damit gleich k_+. Schließlich gilt auf Grund der Differentialgleichung für die Lösung p noch die Beziehung

1.1.8 $$p'' = f'(p)\,p' = (a - 2\varepsilon p)p'\,,$$

so dass für diese Lösung $p'' > 0$ gilt und daher der Graph dieser Lösungskurve konvex verläuft.

Jetzt betrachten wir die Lösung, deren Anfangswert p_0 der Bedingung $k_- < p_0 < k_+$ genügt. Sie kann den Streifen I_2 nicht verlassen und ist daher beschränkt. Also existiert sie für alle $t \geq 0$, ist streng monoton wachsend und es folgt mit gleicher Schlussweise wie zuvor die Beziehung $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = k_+$, die Existenz des Grenzwertes eingeschlossen. Wegen der Beziehung 1.1.8 ist die Lösungskurve konvex, solange $p(t) < \dfrac{a}{2\varepsilon}$ und konkav, wenn $p(t) > \dfrac{a}{2\varepsilon}$ ist .

Verbleibt zuletzt der Fall $0 < p_0 < k_-$. Die Lösungskurve verläuft streng monoton fallend im Streifen I_1 und ist wegen der Beziehung 1.1.8 konkav. Daher hat sie genau eine Nullstelle. Die nachfolgende Abbildung 1.1.9 veranschaulicht den Verlauf. Sie ist erstellt mit Maple zu den Parameterwerten $a = 1, \varepsilon = 0,2$ und $e = 0,3$, der kleiner als $e^* = 1,25$ ist.

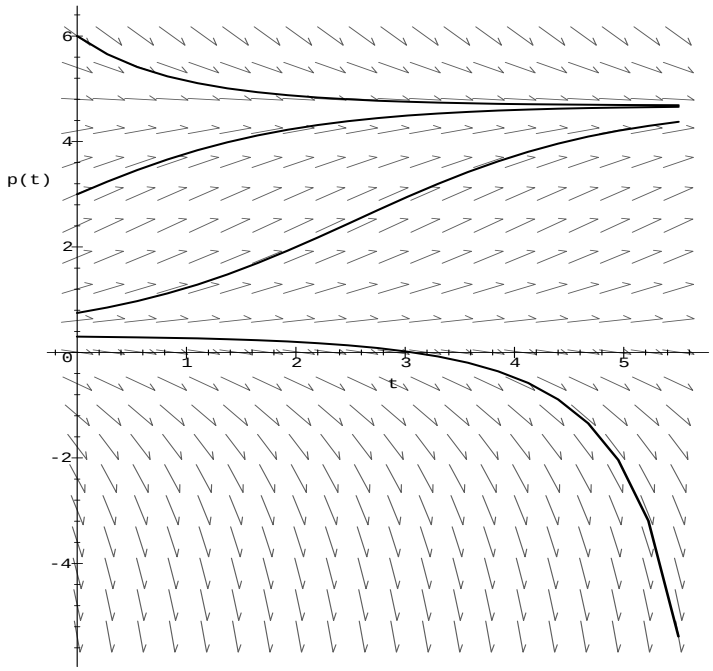


Abbildung 1.1.9

Fall 2: $a^2 - 4\varepsilon e = 0$, das heißt $e = e^*$. Dann hat f genau eine Nullstelle

$$k = \frac{a}{2\varepsilon},$$

die zu der konstanten Lösung

$$p_k(t) = \frac{a}{2\varepsilon} \quad \text{für } t \geq 0$$

führt. Der Graph dieser Lösung teilt den ersten Quadranten der (t,p) - Ebene in die beiden horizontalen Streifen

$$\begin{aligned} I_1 : &= \{(t,p) \,|\, p < k\}, \\ I_3 : &= \{(t,p) \,|\, k < p\}, \end{aligned}$$

und $f(p)$ ist negativ in $I_1 \cup I_3$. Das hat zur Folge, dass alle Lösungen verschieden von p_k streng monoton fallend sind und den jeweiligen Streifen nicht

verlassen können.

Betrachten wir die Lösung $p(t)$ mit einem Anfangswert $p_0 > k$. Diese Lösung ist monoton fallend und daher beschränkt. Daher existiert sie für alle $t \geq 0$, und wir erhalten wie im Fall 1, dass $\lim_{t\to\infty} p(t) = k$. Wegen 1.1.8 ist $p''(t) > 0$, also verläuft die Lösungskurve konvex.

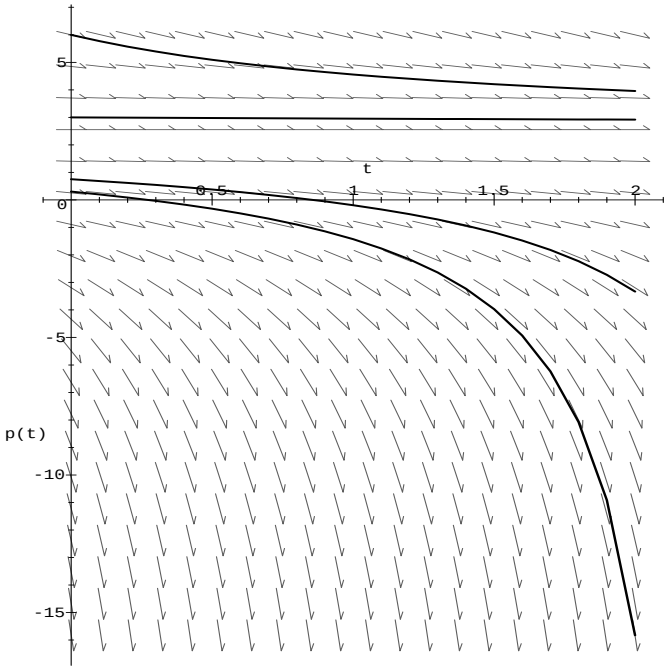


Abbildung 1.1.10

Ist nun $p(t)$ die Lösung mit einem Anfangswert $p_0 < k$, so ist die Lösungskurve wieder streng monoton fallend, und wegen 1.1.8 ist der Graph nun konkav. Daher besitzt p genau eine Nullstelle, wenn $p_0 > 0$ ist. Die Abbildung 1.1.10, die mit Maple zum Wert $e = e^* = 1,25$ erstellt wurde, veranschaulicht den Verlauf.

Fall 3: $a^2 - 4\varepsilon e < 0$, das heißt $e > e^*$. Jetzt hat die Differentialgleichung 1.1.7 keine kritischen Punkte, und $f(p)$ ist stets negativ. Daher sind alle Lösungen streng monoton fallend und jede Lösung mit positivem Anfangswert p_0 hat genau eine Nullstelle. Denn gäbe es eine Lösung $p(t)$ zu positivem Anfangswert ohne Nullstelle, so existiert wegen der Monotonie der $\lim_{t\to\infty} p(t) =: \rho \geq 0$. Auf Grund der Differentialgleichung konvergiert dann auch $p'(t)$ gegen einen nicht positiven Grenzwert. Dieser muß dann aber Null sein, weil sonst wegen

$$p(t) = p(t_0) + \int_{t_0}^{t} p'(\tau)d\tau$$

$p(t)$ gegen $-\infty$ streben müsste. Die Differentialgleichung für p liefert dann $f(\rho) = 0,$ und wir haben einen Widerspruch. Den Verlauf der Lösungen für diesen Fall enthält die nachfolgende Abbildung 1.1.11. Sie zeigt den Verlauf einiger Lösungen zum Wert $e = 4,25$.

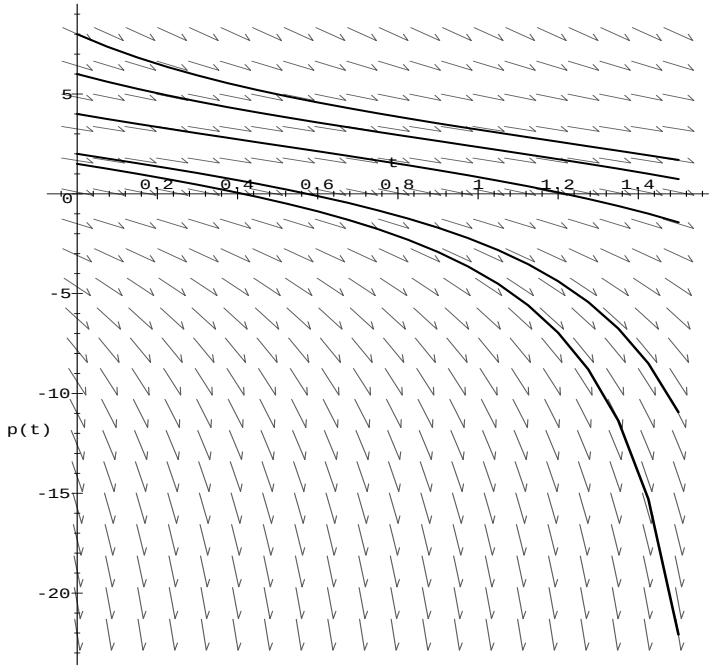


Abbildung 1.1.11

Bevor wir ein weiteres Beispiel behandeln, wollen wir die Ergebnisse erläutern, die dieses Wachstumsmodell liefert. Wir bezeichnen e^* als die **kritische** Entnahmerate. Für $0 < e < e^*$ liegt der erste Fall vor, und für jede Anfangsbedingung $p_0 > k_-$ entwickelt sich mit der Zeit ein Grenzbestand von k_+ kg. Dabei haben wir ein monotones Absinken auf den Grenzbestand, wenn die Anfangsmenge größer als k_+ war, und ein monotones Anwachsen, wenn der Anfangsbestand zwischen k_- und k_+ liegt. Wenn jedoch $p_0 < k_-$ ist, so stirbt die Population aus, so klein man auch die Entnahmerate wählt. Für die kritische Entnahmerate e^* entwickelt sich in der Zeit monoton fallend eine Grenzpopulation von $\dfrac{a}{2\varepsilon}$ kg, wenn der Anfangsbestand $p_0 \geq \dfrac{a}{2\varepsilon}$ ist. Für $p_0 < \dfrac{a}{2\varepsilon}$ stirbt die Population aus. Schließlich zeigt das Modell noch, dass für Entnahmeraten $e > e^*$ die Population immer ausstirbt, gleichgültig wie groß die Anfangspopulation ist.

3. Die Volterra-Lotka Gleichungen

Als letztes Beispiel betrachten wir ein sogenanntes **Räuber-Beute Modell**

mit konstanter Wachstumsrate. Hier bezeichne $x(t)$ die Dichte einer Beutepopulation und $y(t)$ die einer Räuberpopulation (z.B. Karpfen - Hechte in einem See). Bei unserem Modell wird angenommen, dass die Räuber sich nur von den Beutetieren ernähren, wogegen für die Beutetiere unbegrenzt Nahrung zur Verfügung steht. Ferner nehmen wir an, dass x und y differenzierbare Funktionen sind, was natürlich eine Idealisierung darstellt. Den Quotienten $\frac{x'}{x}$ ($x > 0$ vorausgesetzt) nennt man die **Wachstumsrate** der Beutepopulation, und es wird angenommen, dass

1.1.12
$$\frac{x'}{x} = \alpha - \beta y\,, \quad \alpha, \beta > 0$$

ist. Dieses Modell geht also davon aus, dass bei Abwesenheit von Hechten ($y(t) = 0$ für $t \geq 0$) die Beutepopulation eine konstante Wachstumsrate α hat, die sich aber verringert, wenn $y(t) > 0$ ist, ja sogar negativ wird, wenn $y(t)$ groß wird, so daß die Populationsdichte der Beutetiere dann sinkt. Für die Wachstumsrate $\frac{y'}{y}$ der Räuberpopulation wird entsprechend angenommen, dass

1.1.13
$$\frac{y'}{y} = -\gamma + \delta x\,, \quad \gamma, \delta > 0$$

ist. Für $x(t) = 0$ für $t \geq 0$ ist die Wachstumsrate der Räuber negativ, die Dichte der Räuber sinkt also, und die Wachstumsrate wird erst positiv, wenn die Anzahl der Beutetiere genügend anwächst.

Aus 1.1.12 und 1.1.13 folgt, dass x und y dem **Differentialgleichungssystem**

1.1.14
$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - \beta xy\,, \quad \alpha, \beta > 0\,, \\ y' &= -\gamma y + \delta xy\,, \quad \gamma, \delta > 0 \end{aligned}$$

genügen muss. Das System 1.1.14 nennt man das **Volterra-Lotka** Gleichungssystem, weil es von Volterra und Lotka zur Beschreibung des obigen Modells formuliert wurde.

Wir setzen

$$p(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

definieren

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := \begin{pmatrix} \alpha x - \beta xy \\ -\gamma y + \delta xy \end{pmatrix},$$

und können dann das System 1.1.14 in der Form

1.1.15 $$p' = f(p)$$

schreiben. Ist $p : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ Lösung von 1.1.15, — wir werden den Lösungsbegriff gleich definieren — so beschreibt p eine orientierte Kurve, die in jedem Punkt $p(t)$ den Tangentialvektor $f(p(t))$ besitzt. Heftet man in jedem Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ den Vektor $f(p)$ an, so entsteht das **Richtungsfeld** der Differentialgleichung 1.1.15, das schon einen Hinweis auf die möglichen Lösungskurven gibt.

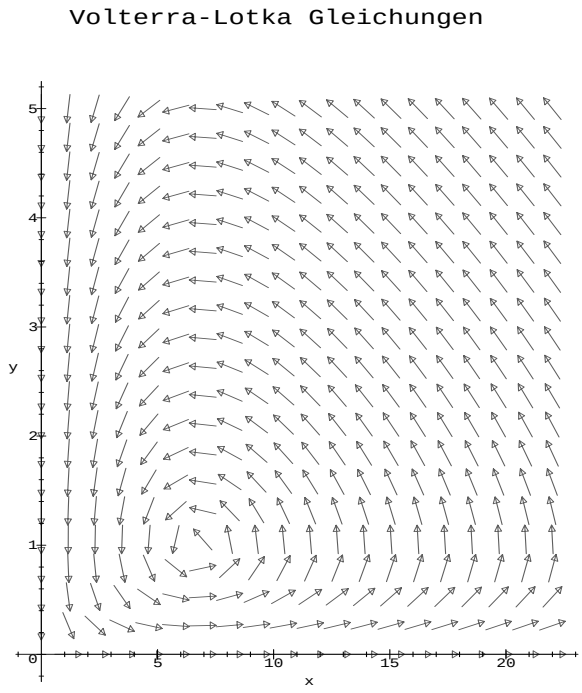


Abbildung 1.1.16

Die Gleichung $f(p) = 0 \in \mathbb{R}^2$ hat die beiden Nullstellen $\tilde{p}_0 = (0,0)$ und $\tilde{p}_1 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$. $\tilde{p}_1$ liegt im ersten Quadranten, und man erhält das in der Abbildung 1.1.16 dargestellte Richtungsfeld.

Dieses Richtungsfeld lässt vermuten, dass die Lösungskurven im ersten Quadranten geschlossene Kurven um den kritischen Punkt $\tilde{p}_1$ sind. Genauer lässt sich beweisen, daß es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \neq \tilde{p}_1$ mit $x_0 > 0$ und $y_0 > 0$ genau eine Lösung von 1.1.15 gibt, die eine geschlossene Kurve um $\tilde{p}_1$ definiert. Diese Lösung existiert für alle $t \in \mathbb{R}$ und ist periodisch. Unser Modell liefert also für jede Population ein periodisches Langzeitverhalten, das man aus dem **Phasenportrait** in Abbildung 1.1.17 sehr schön ablesen kann. Die Beutepopulation nimmt ab, wenn die Räuberpopulation wächst, und wenn die Räuberpopulation abnimmt, wächst die Beutepopulation an.

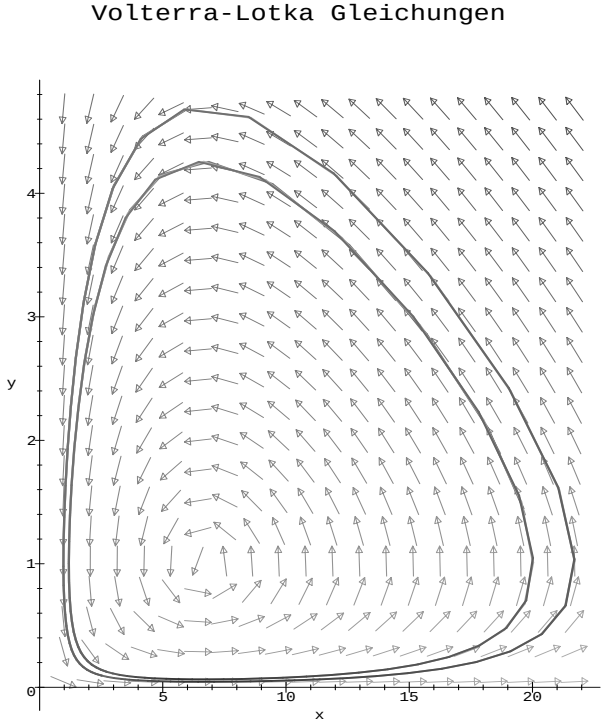


Abbildung 1.1.17

Unsere drei Beispiele führen jeweils auf eine Differentialgleichung bzw. auf ein Differentialgleichungssystem für eine Funktion einer reellen Veränderlichen. Andere Aufgaben, wie etwa Wärmeleitungsprobleme, ergeben für die Temperatur $T(x, y, z, t)$ an der Stelle (x, y, z) des dreidimensionalen Raumes zur Zeit t eine Differentialgleichung der Form

1.1.18
$$\frac{\partial T}{\partial t} + a_1(x, y, z)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_2(x, y, z)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + a_3(x, y, z)\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0\,.$$

Wegen des Auftretens partieller Ableitungen nennt man 1.1.18 eine **partielle Differentialgleichung**. In diesem Kurs werden nur Differentialgleichungen für Funktionen einer reellen Variablen betrachtet, die **gewöhnliche Differentialgleichungen** genannt werden.

1.1.19 Bemerkung

Wir werden von jetzt ab Punkte im $\mathbb{R}^k$ (also Vektoren) generell mit lateinischen Buchstaben wie $a, b, \cdots \cdot x, y, z$ bezeichnen und Abbildungen

$$f : D \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$$

Funktionen nennen. Die Dimensionen k und l ergeben sich nachfolgend immer aus dem Zusammenhang. Nur wo es notwendig wird, schreiben wir deutlicher

$$x = (x_1, x_2, ..., x_k)^\top \in \mathbb{R}^k$$

bzw.

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_l(x))^\top = (f_1(x_1, ..., x_k), ..., f_l(x_1, ..., x_k))^\top \in \mathbb{R}^l$$

Mit dieser Vereinbarung lassen sich die vorangehenden Beispiele alle in der Form

$$p' = f(p)$$

mit einer Funktion f schreiben.

Wir beginnen nun mit der Einführung der Grundbegriffe.

1.1.20 Definition

m und n seien natürliche Zahlen und

$$F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(n+1)m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine Funktion. Dann bezeichnet man eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0\,,$$

in der eine unabhängige Variable x, eine $\mathbb{R}^m$-wertige Funktion y und endlich viele Ableitungen der Funktion vorkommen, als eine **gewöhnliche Differentialgleichung**. *Die höchste Ordnung der vorkommenden Ableitungen heißt die* **Ordnung der Differentialgleichung** *und m die* **Dimension der Differentialgleichung**.

Nach dieser Definition sind 1.1.2 und 1.1.7 Differentialgleichungen 1. Ordnung der Dimension 1, und 1.1.15 ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung der Dimension 2. Weitere Beispiele sind:

1.1.21 $$y^{(3)} + 2y^2 + x = 0\,,$$

1.1.22 $$(y')^5 + xy = 0\,.$$

1.1.21 ist eine Differentialgleichung 3. Ordnung und 1.1.22 eine 1. Ordnung, beide mit der Dimension 1.

Ist eine Differentialgleichung n–ter Ordnung in der Form

1.1.23 $$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

gegeben, so nennt man sie eine **implizite Differentialgleichung**.
Ist diese Gleichung nach der höchsten Ableitung aufgelöst, also von der Form

1.1.24 $$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})\,,$$

so nennt man sie eine **explizite Differentialgleichung n–ter Ordnung**.

Bemerkung:
Falls $m > 1$ ist, findet man in den meisten Lehrbüchern die Bezeichnung **explizites Differentialgleichungssystem n-ter Ordnung**.

1.1.25 Definition

Lösung einer Differentialgleichung

Eine im Intervall J definierte $\mathbb{R}^m-$wertige Funktion y heißt eine **Lösung der Differentialgleichung** 1.1.23 *im Intervall J, wenn y in J n-mal differenzierbar ist, F für alle $x \in J$ im Punkte $(x, y(x), ..., y^{(n)}(x))^\top$ definiert ist und*

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$$

für $x \in J$ *gilt.*

Beispiele

1) $y(x) = \tan x$ ist eine Lösung von $y' = 1 + y^2$ im Intervall $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2) $y(x) = \exp(-x^2)$ ist eine Lösung von $y' = -2xy$ auf ganz $\mathbb{R}$. □

Beide Differentialgleichungen sind explizite Differentialgleichungen der Form $y' = f(x, y)$, und f ist jeweils auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert. Im ersten Fall kann man jedoch die Lösung nicht zu einer auf einem größeren Intervall erklärten Lösung fortsetzen, wogegen im zweiten Fall die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ gegeben ist. Auf dieses Phänomen gehen wir später noch ein.

1.1.26 Bezeichnung

Jede Lösung einer Differentialgleichung nennt man auch ein **Integral** der Differentialgleichung. Der Graph einer Lösung heißt **Lösungskurve** oder **Integralkurve**.

Diese geometrische Veranschaulichung ist besonders nützlich bei expliziten Differentialgleichungen 1. Ordnung der Dimension $m = 1$, was wir nachfolgend erläutern. Hierfür sei D eine Teilmenge der (x, y)–Ebene und f eine auf D erklärte Funktion. Nach unserer Definition 1.1.25 ist eine auf einem Intervall J definierte Funktion ϕ in J genau dann eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) ϕ ist auf J differenzierbar.

(2) $(x, \phi(x)) \in D$ für alle $x \in J$.

(3) $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$ für alle $x \in J$.

Das ergibt aber sofort folgende geometrische Interpretation: Die Funktion f ordnet jedem Punkt $(x, y) \in D$ einen Wert $f(x, y)$ zu. Wir ziehen durch den Punkt (x, y) die Gerade mit dem Anstieg $f(x, y)$, d.h. ist α der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Geraden, so ist $\tan \alpha = f(x, y)$. Die Funktion ϕ ist nun genau dann eine Lösung, wenn in jedem Punkt $(x, \phi(x))$ des Graphen von ϕ die Ableitung $\phi'(x)$ mit dem durch f in diesem Punkte bestimmten Anstieg übereinstimmt. Man wählt deshalb folgende

1.1.27 Bezeichnung

das Richtungsfeld

Das Tripel $(x, y, f(x, y))$ wird als **Linienelement** in (x, y) bezeichnet und die Gesamtheit dieser Linienelemente in D als ein durch die explizite Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

in D definiertes **Richtungsfeld**.

Die geometrische Darstellung nehmen wir durch Anheften eines kleinen Geradenstückes im Punkte (x, y) vor. Eine Lösung ist dann gerade dadurch gekennzeichnet, dass der Graph der Funktion auf dieses Richtungsfeld passt. Umgekehrt kann man durch Betrachten des Richtungsfeldes manchmal eine Lösung ablesen. Wir geben Beispiele:

(1) $y' = y\,.$

Hier ist $f(x, y) = y,$ und wir können für D die ganze Ebene wählen. Auf den Kurven $f(x, y) = \text{const}$, die **Isoklinen** genannt werden, erhalten wir in allen Punkten jeweils den gleichen Anstieg. Dies liefert das in der Abbildung 1.1.28 dargestellte Richtungsfeld. Wir sehen natürlich, dass die Differentialgleichung

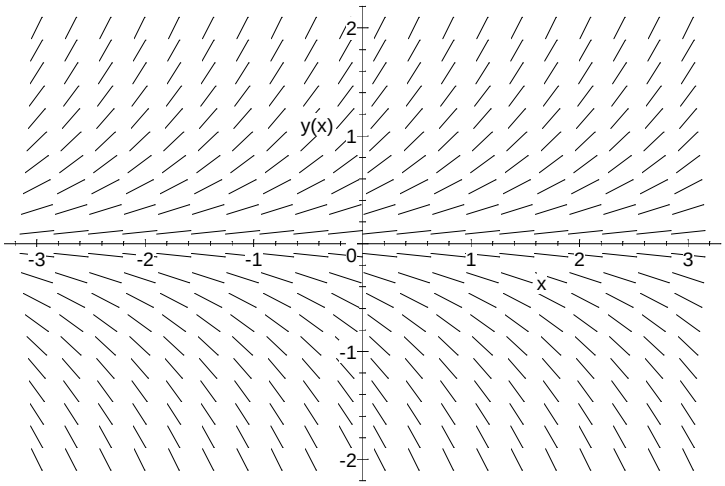


Abbildung 1.1.28

1.1.2 mit $\alpha = -1$ vorliegt und wissen daher, dass mit $\phi(x) = \rho e^x$ sämtliche Lösungen vorliegen. Diese passen auf das dargestellte Richtungsfeld. Ferner wissen wir schon, dass durch jeden Punkt (ξ, η) genau eine Lösungskurve geht. □

(2) $\qquad y' = -\dfrac{x}{y} \qquad , \qquad y \neq 0\,.$

Hier ist $f(x,y) = -\dfrac{x}{y}$, und f definiert außerhalb der x-Achse ein Richtungsfeld. Die Isoklinen sind die Geraden durch den Nullpunkt. Sie liefern z.B. sofort in der oberen Halbebene das in der Abbildung 1.1.29 dargestellte Richtungsfeld. Man sieht, dass offenbar die Halbkreise $\phi(x) := +\sqrt{r^2 - x^2}$ $(r > 0)$ auf dieses Richtungsfeld passen. Man bestätigt aber auch für $|x| < r$ sofort

$$\phi'(x) = \frac{1}{2\phi(x)}(-2x) = -\frac{x}{\phi(x)}\,. \qquad \square$$

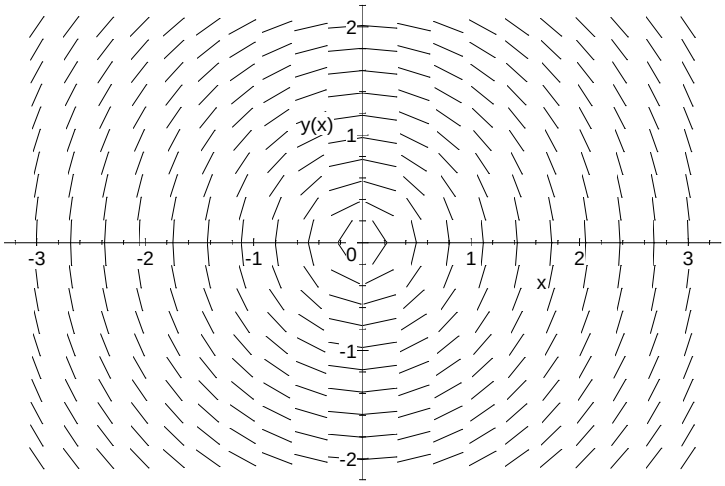


Abbildung 1.1.29

1.1.30 Aufgabe

L Man bestimme die Isoklinen der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{1}{2}y^3\,.$$

1.1.31 Bemerkung

In unseren Beispielen für Differentialgleichungen 1. Ordnung erhielten wir – und dies liegt an den Eigenschaften von f – stets eine von einem reellen Parameter c abhängige Schar von Lösungen, die eine Schar von Kurven im Definitionsbereich von f darstellen. Man kann aber auch umgekehrt von einer einparametrigen Schar von Kurven ausgehen und nach einer Differentialgleichung fragen, die diese Kurvenschar als Lösungen besitzt. Da uns diese Frage

nicht weiter interessieren wird, wollen wir uns mit einem einfachen Beispiel begnügen.

Beispiel

$$xy = c \qquad \text{(Hyperbelschar)} \ .$$

Als Lösungen für eine Differentialgleichung ist diese Gleichung nach y aufzulösen. Wir setzen die Auflösung $y(x)$ ein und differenzieren die entstehende Identität. Das ergibt

$$y + xy' = 0,$$

also

$$y' = -\frac{y}{x} \qquad (x \neq 0)\,. \qquad \square$$

In den nächsten Paragraphen wollen wir einige spezielle Typen von Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachten, für die es gewisse „einfache“ Methoden gibt, mit denen man Lösungen mit Hilfe von „elementaren“ Funktionen angeben kann. Da dies meist durch Aufsuchen von Stammfunktionen geschieht, spricht man auch von **Integration der Differentialgleichung**. Insbesondere soll gezeigt werden, wie man bei diesen Gleichungen zu einer Lösung des **Anfangswertproblems** kommt, das wir für explizite Differentialgleichungen 1. Ordnung jetzt formulieren.

1.1.32 Das Anfangswertproblem

das Anfangswertproblem bei expliziten Differentialgleichungen 1. Ordnung

Gegeben ist auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ und $(\xi, \eta) \in D$. Gesucht ist eine in einem Intervall J definierte Funktion $\phi : J \to \mathbb{R}^n$ die folgenden Bedingungen genügt:

(i) ϕ ist in J Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$,

(ii) $\xi \in J$ und $\phi(\xi) = \eta$.

(ii) nennt man die **Anfangsbedingung**.

Für den eindimensionalen Fall bedeutet dies geometrisch, ein Kurvenstück im $\mathbb{R}^2$ durch den Punkt (ξ, η) zu finden, das Lösungskurve der Differentialgleichung ist. Hat man auf den Intervallen J_1 und J_2 zwei Lösungen des Anfangswertproblems, so werden sie als gleich angesehen, wenn sie auf dem Durchschnitt $J_1 \cap J_2$ übereinstimmen.

1.2 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

In diesem und auch in den weiteren Abschnitten betrachten wir nur explizite Differentialgleichungen der Dimension 1. Wir beginnen mit der

1.2.1 Definition

Die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ *hat* **getrennte Variable**, *wenn* f *ein Produkt der Form* $f(x,y) = h(x)g(y)$ *ist. Die Bezeichnung rührt daher, dass man für* $g(y) \neq 0$ *die Differentialgleichung auch in der Form* $\dfrac{y'}{g(y)} = h(x)$ *schreiben kann, in der die Variablen getrennt erscheinen.*

Wir behandeln jetzt für diese Differentialgleichung das Anfangswertproblem und orientieren uns an einem einfachen Beispiel.

Beispiel

$$\begin{aligned} y' &= y^2\,, \\ y(\xi) &= \eta \quad , \quad \eta \neq 0\,. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, ϕ sei eine Lösung des Anfangswertproblems. ϕ ist dann auf einem Intervall J differenzierbar, und es gelten

1.2.2 $$\xi \in J \quad , \quad \phi(\xi) = \eta\,,$$

1.2.3 $$\phi'(x) = (\phi(x))^2 \quad \text{für} \quad x \in J\,.$$

Wegen 1.2.3 ist mit ϕ auch ϕ' auf J stetig. Ferner ist $\phi(\xi) \neq 0\,,$ und wegen der Stetigkeit von ϕ können wir durch Verkleinern von J erreichen, dass $\phi(x) \neq 0$ ist in $J\,.$ Somit gilt dort

$$\frac{\phi'(x)}{\phi^2(x)} = 1\,.$$

Wir integrieren diese Gleichung in den Grenzen von ξ bis x und erhalten

$$\int_\xi^x \frac{\phi'(t)}{(\phi(t))^2}\,dt = \int_\xi^x dt = x - \xi\,.$$

Auf der linken Seite führen wir die neue Variable $u = \phi(t)$ ein, und mit der Substitutionsregel der Integralrechnung folgt unter Beachtung von $\eta = \phi(\xi)$

$$\int_{\eta}^{\phi(x)} \frac{1}{u^2} du = x - \xi \,.$$

$\frac{1}{u^2}$ besitzt für $u \neq 0$ die Stammfunktion $-\frac{1}{u}$, und damit gilt

$$-\frac{1}{\phi(x)} + \frac{1}{\eta} = x - \xi \,.$$

Wir lösen diese Gleichung noch nach $\phi(x)$ auf und finden

1.2.4

$$\phi(x) = \frac{\eta}{1 - \eta(x - \xi)} \,.$$

Diese Rechnung zeigt uns, wie eine Lösung des Anfangswertproblems aussehen muss. Wir wählen daher das Intervall J als

$$J := \{x \,|\, |x - \xi| < \frac{1}{|\eta|}\} =]\, \xi - \frac{1}{|\eta|} \,,\, \xi + \frac{1}{|\eta|} \,[$$

und erklären dort die Funktion

$$\psi(x) := \frac{\eta}{1 - \eta(x - \xi)} \,.$$

ψ ist auf J differenzierbar, und man bestätigt leicht, dass ψ eine Lösung des Anfangswertproblems ist. Da jede Lösung des Anfangswertproblems entsprechend unserer Rechnung in einer Umgebung von ξ mit ψ übereinstimmen muss, ist die lokal eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems gezeigt. Ist $\eta = 0$, so kann man sofort $y(x) = 0$ als eine Lösung des Anfangswertproblems angeben. Am Schluss dieses Abschnitts zeigen wir noch, dass auch in diesem Fall die Eindeutigkeit gegeben ist. □

Die bei diesem Beispiel durchgeführten Überlegungen lassen sich auch im allgemeinen Fall anwenden. Es gilt:

1.2.5 **Satz**

Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sei h stetig im Intervall $J_x :=]a, b[$ und g stetig im Intervall $J_y :=]c, d[$. (ξ, η) sei ein Punkt aus $J_x \times J_y$ mit $g(\eta) \neq 0$. Dann gibt es ein Intervall $J \subset J_x$ mit $\xi \in J$ und eine Lösung ϕ in J des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= h(x)g(y)\,, \\ y(\xi) &= \eta\,, \end{aligned}$$

die sich in J *implizit durch die Gleichung*

$$\int_{\eta}^{\phi(x)} \frac{1}{g(s)}\,ds = \int_{\xi}^{x} h(t)\,dt$$

bestimmt. Ist ψ *in* $\tilde{J}$ *eine weitere Lösung des Anfangswertproblems, so stimmen* ϕ *und* ψ *auf* $J \cap \tilde{J}$ *überein.*

Beweis
Da g in η stetig ist, gibt es ein abgeschlossenes Intervall $I \subset J_y$, das η als inneren Punkt enthält und auf dem g nicht verschwindet. Auf den Intervallen I und J_x erklären wir die beiden Funktionen G und F durch

$$G(y) := \int_{\eta}^{y} \frac{1}{g(s)}\,ds \quad , \quad F(x) := \int_{\xi}^{x} h(t)\,dt\,.$$

Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung ist G auf I stetig differenzierbar und wegen $G'(y) = \dfrac{1}{g(y)}$ ist G' positiv oder negativ. Daher ist G auf I eine streng monotone Funktion und besitzt auf dem Bildintervall $L := G(I)$ eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion G^{-1} mit der Ableitung $(G^{-1})'(x) = \dfrac{1}{G'(G^{-1}(x))} = g(G^{-1}(x))$. Wegen $G(\eta) = 0$ ist 0 ein innerer Punkt von L.
Da F auf J_x differenzierbar ist und $F(\xi) = 0$ ist, gibt es ein Intervall J mit $\xi \in J$ derart, dass für $x \in J$ durch

$$\phi(x) := (G^{-1} \circ F)(x)$$

in J eine differenzierbare Funktion erklärt ist mit $\phi(\xi) = G^{-1}(F(\xi)) = G^{-1}(0) = \eta$. Ferner ist

$$\begin{aligned} \phi'(x) = (G^{-1})'(F(x))F'(x) &= g\,(G^{-1}(F(x)))\,h(x) \\ &= g(\phi(x))h(x)\,. \end{aligned}$$

Damit ist ϕ eine Lösung unseres Anfangswertproblems in J. Wir zeigen jetzt, dass es keine weitere Lösung gibt. Sei also ψ eine Lösung des Anfangswertproblems. ψ ist dann in einem Intervall $\tilde{J}$ differenzierbar, $\xi \in \tilde{J}$, $\psi(\xi) = \eta$, und ψ erfüllt in $\tilde{J}$ die Gleichung $\psi'(x) = g(\psi(x))\, h(x)$. Wegen $g(\psi(\xi)) \neq 0$ können wir durch Verkleinern von $\tilde{J}$ gleich $g(\psi(x)) \neq 0$ in $\tilde{J}$ und $\psi(x) \in I$ voraussetzen. Daher gilt dort

$$\frac{\psi'(x)}{g(\psi(x))} = h(x)\,.$$

Somit ist für $x \in \tilde{J}$

$$\int_\xi^x \frac{\psi'(t)}{g(\psi(t))}\, dt = \int_\xi^x h(t)\, dt\,,$$

so dass in einer Umgebung von ξ gilt

$$F(x) = \int_\xi^x h(t)\, dt = \int_\xi^x \frac{\psi'(t)}{g(\psi(t))}\, dt = \int_\eta^{\psi(x)} \frac{1}{g(s)}\, ds = G(\psi(x))\,.$$

Daraus folgt $\psi(x) = G^{-1}(F(x)) = \phi(x)$ auf Grund der Injektivität von G auf I. Damit ist auch die Eindeutigkeit bewiesen. □

Bei der Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems durch die Gleichung

$$\int_\eta^y \frac{ds}{g(s)} = \int_\xi^x h(t)\, dt$$

werden die Integrale durch Aufsuchen von Stammfunktionen bestimmt. Bezeichnet man mit $\int f(z)dz$ eine Stammfunktion zu f, so bestimmt sich die Lösung unseres Problems aus der Gleichung

1.2.6

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int h(x)dx + c$$

mit einer geeigneten Konstanten c. Auf diese Gleichung kommt man auch, indem man y' mit $\dfrac{dy}{dx}$ bezeichnet, also die Differentialgleichung in der Form

Trennung der Variablen

$$\frac{dy}{dx} = g(y)h(x)$$

schreibt. Multipliziert man formal mit dx und dividiert durch $g(y)$, so ergibt sich

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = h(x)dx$$

und man erhält 1.2.6 durch Integration. Erst unsere Überlegungen zu Satz 1.2.5 zeigen, dass man durch dieses formale Rechnen zu sinnvollen Ergebnissen kommt.

Wir betrachten jetzt noch den Fall $g(\eta) = 0$. Hier hat man sofort die Lösung $y(x) = \eta$ für $x \in J_x$. Ob es noch weitere Lösungen gibt, hängt von den Eigenschaften von g ab. Wir geben für jeden Fall ein Beispiel an:

Beispiel 1 $y' = y^2\ ,\ y(0) = 0\,.$

Ist z eine Lösung dieses Problems, so gilt in einer Umgebung von 0 die Gleichung

$$z'(x) = (z(x))^2\,.$$

Also ist z' in einer Umgebung von 0 differenzierbar, und wir erhalten mit der Kettenregel

$$z''(x) = 2z(x)z'(x) = 2(z(x))^3\,.$$

Mit vollständiger Induktion folgt so, dass z in einer Umgebung von 0 beliebig oft differenzierbar ist und die Gleichung

1.2.7 $$z^{(n)}(x) = n!(z(x))^{n+1}$$

gilt. Sei $n \in \mathbb{N}$ und x aus dem Existenzintervall. Dann gibt es nach dem Taylorschen Satz ein t_x zwischen 0 und x so dass

$$z(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^{(\nu)}(0)}{\nu!}\,x^\nu + \frac{z^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}\,x^{n+1}\,.$$

Mit 1.2.7 folgt

1.2.8 $$z(x) = (z(t_x))^{n+2}x^{n+1}\,.$$

Es ist $z(0) = 0$, und z ist stetig. Wir beschränken x auf eine solche Umgebung, wo $|z(x)| \leq 1$ und $|x| \leq \frac{1}{2}$. Dann folgt aus 1.2.8 die Abschätzung

$$|z(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} ,$$

also ist $z(x) = 0$ in einer Umgebung von 0. Damit haben wir die lokal eindeutige Lösbarkeit für dieses Anfangswertproblem. □

Beispiel 2 $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$.

Man hat sofort die Lösung $y(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Wir betrachten dann die Funktion φ, definiert durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & \text{für} \quad x \geq 0 , \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 . \end{cases}$$

φ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, $\varphi(0) = 0$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi'(x) = +\sqrt{|\varphi(x)|} .$$

Diese Lösung des Anfangswertproblems ist in jeder Umgebung von 0 verschieden von der ersten Lösung, also ist für dieses Problem keine lokale Eindeutigkeit gegeben. □

1.2.9 Bemerkung

Wir haben für stetige h und g nur die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems gezeigt, aber keine Aussage über die Größe des Existenzintervalls gemacht. Im Falle $g(y) \neq 0$ kann man dies zwar mit den obigen Methoden erreichen, meistens ergibt sich aber in konkreten Fällen das maximale Existenzintervall der Lösung direkt aus der gefundenen Darstellung.

Beispiel

$$y' = -\frac{x}{y} \quad , \quad y(\xi) = \eta \quad , \quad \eta > 0 .$$

Als Intervalle J_x und J_y wählen wir $J_x := \mathbb{R}$ und $J_y :=]0, \infty[$. Die Trennung der Variablen führt auf die Gleichung

$$\int_{\eta}^{y} s\,ds = -\int_{\xi}^{x} t\,dt\,,$$

also

$$\frac{1}{2}(y^2 - \eta^2) = -\frac{1}{2}(x^2 - \xi^2)\,.$$

Wir setzen $\xi^2 + \eta^2 = r^2$ mit $r > 0$ und erhalten

$$y^2 = r^2 - x^2\,.$$

Somit ist $\varphi(x) = +\sqrt{r^2 - x^2}$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems. Der maximale Existenzbereich ist offensichtlich das Intervall $]-r, +r[$. □

1.2.10 Aufgabe

L Man bestimme eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{e^{x-y}}{1+e^x} \quad , \quad y(0) = 1\,.$$

Ist die Lösung eindeutig bestimmt? Wie groß ist das maximale Existenzintervall?

Eine wichtige Methode zur Integration einer Differentialgleichnung besteht darin, nach einer Transformation zu suchen, mit der man eine gegebene Differentialgleichung auf einen bekannten Typ transformieren kann. So lässt sich zeigen, dass man die Differentialgleichung

1.2.11
$$y' = f\left(\frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{b_1 x + b_2 y + b_3}\right)$$

stets auf eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen transformieren kann. Für einen allgemeinen Beweis verweisen wir auf das Lehrbuch von W. Walter, Seite 18 - 20, und begnügen uns hier damit, die Methode an zwei Beispielen vorzuführen.

1. Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

1.2.12
$$\begin{aligned} y' &= (2x + 2y - 1)^2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

Offenbar ist die Differentialgleichung vom Typ 1.2.11. Wir führen für differenzierbares y die Transformation

1.2.13
$$u(x) := 2x + 2y(x) - 1$$

ein und erhalten

$$u'(x) = 2 + 2y'(x).$$

Also ist y Lösung der Differentialgleichung von 1.2.12 genau dann, wenn

$$u' = 2 + 2(2x + 2y - 1)^2 = 2 + 2u^2$$

ist und $y(0) = 1$ ist äquivalent zu $u(0) = 1$. y ist daher genau dann Lösung des Anfangswertproblems 1.2.12, wenn u Lösung des Anfangswertproblems

1.2.14
$$\begin{aligned} u' &= 2 + 2u^2\,, \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

ist. Trennung der Variablen ergibt

$$\int_1^u \frac{1}{1+s^2} ds = \int_0^x 2\,dt$$

also

$$\arctan(u) = \arctan(1) + 2x = \frac{\pi}{4} + 2x.$$

Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems 1.2.14

$$u(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Sie besitzt das maximale Existenzintervall $J = \left]-\frac{3\,\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$. Anschließend lösen wir noch die Transformation 1.2.13 nach y auf und finden damit als Lösung des Anfangswertproblems 1.2.12

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 - 2x\right) \qquad \square$$

2. Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

1.2.15
$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} - \frac{x}{y}\,, \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung ist vom Typ 1.2.11 mit $f(t) = t - \dfrac{1}{t}$. Jetzt führen wir für differenzierbares y die Transformation

1.2.16
$$u(x) = \frac{1}{x}y(x) \qquad (x \neq 0)$$

ein und erhalten

$$u'(x) = -\frac{1}{x^2}y(x) + \frac{1}{x}y'(x) = -\frac{1}{x}u(x) + \frac{1}{x}y'(x).$$

Daher ist y eine Lösung des Anfangswertproblems 1.2.15 genau dann, wenn

$$u' = -\frac{1}{x}u + \frac{1}{x}\left(u - \frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{x}\frac{1}{u}.$$

und $y(1) = 1$ ist äquivalent zu $u(1) = 1$. y ist daher genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems 1.2.15, wenn u eine Lösung des Anfangswertproblems

1.2.17
$$\begin{aligned} u' &= -\frac{1}{x}\frac{1}{u}\,, \\ u(1) &= 1 \end{aligned}$$

ist. Trennung der Variablen führt für $x > 0$ zu

$$\int_1^u s\,ds = -\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

also

$$\frac{u^2}{2} = \frac{1}{2} - \log|x|.$$

Es folgt

$$u^2 = 1 - 2\,\log|x| = 1 - \log(x^2)$$

und damit lautet die gesuchte Lösung

$$u(x) = \sqrt{1 - \log(x^2)}.$$

Jetzt lösen wir noch die Transformation 1.2.16 nach y auf und erhalten damit als Lösung des Anfangswertproblems 1.2.15

$$y(x) = x\sqrt{1 - \log(x^2)}. \qquad \square$$

Bemerkung
In unserem ersten Beispiel war die Differentialgleichnung von der Form

1.2.18 $$y' = f(ax + by + c)$$

und im zweiten Beispiel von der Form

1.2.19 $$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Auf diese beiden Fälle lässt sich die Differentialgleichung 1.2.11 stets transformieren, und zwar auf 1.2.18, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$$

und auf die Form 1.2.19, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

1.2.20 Aufgabe

L Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x - y}{x + 2y}\,, \\ y(1) &= 0\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Man benutze die Transformation $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$.

1.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Differentialgleichung

1.3.1 $$y' + f(x)y = g(x)\,.$$

Wir setzen voraus, dass f und g in einem Intervall J stetig sind. 1.3.1 heißt **lineare Differentialgleichung.** Die Bezeichnung erklärt sich aus der Tatsache, dass die für differenzierbare Funktionen durch $L[y](x) := y'(x) + f(x)y(x)$ erklärte Abbildung linear ist. Es gilt also

$$L[\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2] = \alpha_1 L[y_1] + \alpha_2 L[y_2]\,.$$

Wir betrachten zunächst den Fall $g(x) = 0$ für alle $x \in J$. Man bezeichnet dann 1.3.1 als **homogene lineare Differentialgleichung** 1. Ordnung. Es liegt der Fall getrennter Variablen vor. Wir bestimmen die für $\xi \in J$ eindeutige Lösung y_0, die die Anfangsbedingung $y_0(\xi) = 1$ erfüllt. Man beachte, dass die Voraussetzungen für Satz 1.2.5 erfüllt sind. Trennung der Variablen ergibt die Bedingung

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int f(x)dx + c$$

oder

$$\log|y| = -\int_{\xi}^{x} f(t)dt + c\,.$$

Man setzt die Anfangsbedingung ein und erhält

$$c = \log|1| = 0\,.$$

Wenn wir berücksichtigen, dass y_0 lokal um ξ das Vorzeichen nicht wechselt, erhalten wir als Lösung

$$y_0(x) = \exp\Big(-\int_{\xi}^{x} f(t)dt\Big)\,.$$

y_0 ist in ganz J (stetig) differenzierbar und genügt dort der Differentialgleichung $L[y_0] = 0$. Nun folgt sofort

1.3.2 **Satz**

Existenz- und Eindeutigkeitssatz

f sei stetig in J, $\xi \in J$ und $\eta \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine auf ganz J (stetig) differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems

1.3.3 $$y' + f(x)y = 0\,,$$

1.3.4 $$y(\xi) = \eta\,.$$

Diese Lösung ist gegeben durch

1.3.5 $$y(x) = \eta \exp\Big(-\int\limits_{\xi}^{x} f(t)dt\Big) = \eta y_0(x)\,.$$

Beweis
1.3.5 definiert auf J eine stetig differenzierbare Funktion, die wegen $L[y] = L[\eta y_0] = \eta L[y_0] = 0$ der Differentialgleichung 1.3.3 genügt. Ferner ist $y(\xi) = \eta \cdot 1 = \eta$. Sei nun z eine weitere Lösung des Anfangswertproblems. z genügt dann in einem Intervall $I \subset J$ der Differentialgleichung 1.3.3, wobei $\xi \in I$ und $z(\xi) = \eta$ gilt. Auf I ist die Funktion ϕ, definiert durch

1.3.6 $$\phi(x) := \exp\Big(\int\limits_{\xi}^{x} f(t)dt\Big) z(x)\,,$$

differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= f(x)\exp\Big(\int\limits_{\xi}^{x} f(t)dt\Big) z(x) + \exp\Big(\int\limits_{\xi}^{x} f(t)dt\Big) z'(x)\\ &= \exp\Big(\int\limits_{\xi}^{x} f(t)dt\Big)\Big(z'(x) + f(x)z(x)\Big) = 0\,.\end{aligned}$$

Damit ist ϕ auf I konstant, und es folgt

$$\phi(x) = \phi(\xi) = 1 \cdot \eta = \eta\,.$$

Mit 1.3.6 ist also $z(x) = \eta \exp\Big(-\int\limits_{\xi}^{x} f(t)dt\Big)$. Das zeigt zunächst die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems. Ferner folgt, dass die Lösung J als maximales Existenzintervall besitzt. □

Da man offenbar alle Lösungen der Differentialgleichung durch Variation von ξ und η erfasst, ergibt sich die

1.3.7 Folgerung

Lösungsgesamtheit im homogenen Fall

Alle Lösungen der Differentialgleichung 1.3.3 *haben* J *als maximales Existenzintervall, und sämtliche Lösungen werden gegeben durch* 1.3.5.

Beispiel

$$y' + x^2 y = 0\,.$$

Hier ist $f(x) = x^2$; f ist stetig auf $\mathbb{R}$. Also haben alle Lösungen $\mathbb{R}$ als maximales Existenzintervall. Wir wählen in 1.3.5 $\xi = 0$ und erhalten die Lösungsgesamtheit

$$y(x) = \eta \exp\Big(-\int_0^x t^2 dt\Big) = \eta e^{-\frac{1}{3}x^3}\,. \qquad \square$$

Bemerkung

Für jede Lösung y einer homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung gilt entweder $y(x) \neq 0$ für alle $x \in J$ oder $y(x) = 0$ für alle $x \in J$.

Wir betrachten jetzt den Fall $g(x) \neq 0$ für mindestens ein $x \in J$. Wir bezeichnen dann die Differentialgleichung

1.3.8
$$y' + f(x)y = g(x)$$

als **inhomogene Differentialgleichung**. Wir zeigen zunächst, dass 1.3.8 stets mindestens eine in ganz J definierte Lösung z_0 besitzt. Dies geschieht mit der als **„Variation der Konstanten“** bezeichneten Methode, die folgendes besagt: Sei $\xi \in J$ und y_0 die spezielle Lösung von 1.3.3 mit $y_0(\xi) = 1$. Nach 1.3.5 ist sie gegeben durch $y_0(x) = \exp(-\int_\xi^x f(t)dt)$. Dann erhalten wir sämtliche Lösungen von 1.3.3 in der Form

$$y(x) = c\, y_0(x) \quad , \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Man ersetzt jetzt hier die Konstante c durch eine differenzierbare Funktion $c(x)$ – man variiert die Konstante – und versucht, durch Einsetzen in die Differentialgleichung 1.3.8 $c(x)$ so zu bestimmen, dass eine Lösung der Differentialgleichung entsteht. Das ergibt für $c(x)$ die Bedingung

$$c'(x)y_0(x) + c(x)(y_0'(x) + f(x)y_0(x)) = g(x)\,,$$

also wegen $L[y_0] = 0$

$$c'(x) = g(x)(y_0(x))^{-1} = g(x) \exp\Big(\int\limits_{\xi}^{x} f(t)dt \Big) .$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn wir

$$c(x) = \int\limits_{\xi}^{x} c'(t)dt = \int\limits_{\xi}^{x} g(t) \exp\Big(\int\limits_{\xi}^{t} f(\tau)d\tau \Big)dt$$

wählen. c ist auf J sogar stetig differenzierbar, und wir erhalten mit

$$z_0(x) := \Big(\int\limits_{\xi}^{x} g(t) \exp\Big(\int\limits_{\xi}^{t} f(\tau)d\tau \Big)dt \Big) \exp\Big(- \int\limits_{\xi}^{x} f(t)dt \Big)$$

eine Lösung von 1.3.8 mit J als maximalen Existenzintervall.
Das Ergebnis fassen wir zusammen in dem

1.3.9 Satz

Methode der Variation der Konstanten

f und g seien stetig in J und $\xi \in J$. Ist y_0 die in J definierte, eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + f(x)y = 0 ,$$
$$y(\xi) = 1 ,$$

so gibt es in J eine Lösung z_0 der inhomogenen Gleichung

$$y' + f(x)y = g(x)$$

der Form

$$z_0(x) = c(x)y_0(x)$$

mit differenzierbarem c. Die Funktion c wird bestimmt durch Einsetzen in die Differentialgleichung. Man bezeichnet diese Methode als **„Variation der Konstanten“.**

Beispiel

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}\,.$$

Die Koeffizienten sind stetig im Intervall $J =]0, \infty[$. Die zugehörige homogene Gleichung ist

$$y' + \frac{1}{x}y = 0\,.$$

Durch Trennung der Variablen erhalten wir für Lösungen y die Beziehung

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx + \hat{c}$$

mit $\hat{c} \in \mathbb{R}$ oder

$$\log|y| + \log|x| = \hat{c}\,,$$

bzw. $\log|y|x = \hat{c}$ wegen $x > 0$. Es folgt $|y|x = e^{\hat{c}}$. Hieraus ergibt sich dann weiter $y(x) = \dfrac{c}{x}$ mit $c \in \mathbb{R}$ für $x \in]0, \infty[$. Wir machen nun den Ansatz $y(x) = \dfrac{c(x)}{x}$ und finden die Bedingung

$$c'(x)\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\,.$$

$c(x) = \log x$ ist eine Lösung für $x > 0$, und damit ist $\dfrac{1}{x}\log x$ eine Lösung der Differentialgleichung für $x > 0$. □

Wir erhalten nun einen einfachen Zusammenhang zwischen den Lösungen der homogenen und der inhomogenen Differentialgleichung.

1.3.10 Satz

Sei z_0 eine Lösung der Gleichung 1.3.8 *in J. Dann ist y in J genau dann eine Lösung von* 1.3.8, *wenn $y - z_0$ in J eine Lösung von* 1.3.3 *ist.*

Beweis
Sei y in J definiert und $z := y - z_0$. z ist genau dann in J differenzierbar, wenn y in J differenzierbar ist. In diesem Falle ist

$$L[z] = L[y - z_0] = L[y] - L[z_0] = L[y] - g\,,$$

und somit ist $L[y] = g$ genau dann, wenn $L[z] = 0$ ist. □

1.3.11 Folgerung

Jede Lösung y der inhomogenen Differentialgleichung hat J als maximales Existenzintervall.

Beweis
Sei z_0 eine Lösung von 1.3.8 mit Existenzintervall J. Ist y im Intervall $I \subset J$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung, so ist $z := y - z_0$ in I eine Lösung der homogenen Gleichung. Da diese J als maximales Existenzintervall besitzt, folgt aus $y = z + z_0$ die Behauptung. □

1.3.12 Folgerung

Lösungen der homogenen und inhomogenen Gleichung

Ist z_0 eine Lösung der inhomogenen Gleichung und $y_0 \neq 0$ eine Lösung der homogenen Gleichung, so erhält man sämtliche Lösungen der inhomogenen Gleichung in der Form

1.3.13
$$y(x) = \eta y_0(x) + z_0(x)\,, \quad \eta \in \mathbb{R}\,.$$

Beweis
y durchläuft nach Satz 1.3.10 genau dann alle Lösungen der inhomogenen Gleichung, wenn $y - z_0$ alle Lösungen der homogenen Gleichung durchläuft, d.h.

$$y(x) - z_0(x) = \eta y_0(x)\,, \quad \eta \in \mathbb{R}\,,$$

was zu zeigen war. □

1.3.14 Satz

Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sei $\xi \in J$ und $\eta \in \mathbb{R}$. Dann hat die inhomogene Differentialgleichung genau eine Lösung y mit $y(\xi) = \eta$. Sie ist gegeben durch

1.3.15
$$y(x) = \exp\Big(-\int_\xi^x f(t)dt\Big)\left(\int_\xi^x g(t)\exp\Big(\int_\xi^t f(\tau)d\tau\Big)dt + \eta\right).$$

Beweis

$$y_0(x) := \exp\Big(-\int_\xi^x f(t)dt\Big)$$

ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung mit $y_0(\xi) = 1$, und

$$z_0(x) := \left(\int_\xi^x g(t) \exp\Big(\int_\xi^t f(\tau) d\tau \Big) dt \right) y_0(x)$$

ist eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit $z_0(\xi) = 0$. Dann ist

1.3.16 $$y(x) := \eta y_0(x) + z_0(x)$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung mit

$$y(\xi) = \eta y_0(\xi) + z_0(\xi) = \eta .$$

Das zeigt die Existenz und die Darstellung gemäß 1.3.15. Ist nun z eine weitere Lösung des Anfangswertproblems, so ist $w := z - y$ eine Lösung der homogenen Gleichung mit $w(\xi) = 0$. Dann ist aber $w(x) = 0$ für jedes $x \in J$ (vgl. die Bemerkung nach 1.3.7) und daher $z = y$. □

Bemerkung
Man nennt z_0 eine **partikuläre Lösung** und 1.3.16 die **allgemeine Lösung.** In den Anwendungen versucht man meist, eine partikuläre Lösung durch einen speziellen Ansatz zu finden.

1.3.17 Aufgabe

L Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + \frac{1}{x} y = x^2 .$$

Wie lautet die Lösung mit $y(1) = 1$, und welches maximale Existenzintervall besitzt sie?

Aus Satz 1.3.14 erhält man die

1.3.18 Folgerung

Sind y_1, y_2 in J Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung, so gilt entweder $y_1(x) = y_2(x)$ für $x \in J$, oder es ist stets $y_1(x) \neq y_2(x)$.

Beweis
Ist $y_1(\xi) = y_2(\xi) =: \eta$ für ein $\xi \in J$, so sind y_1 und y_2 zwei Lösungen eines Anfangswertproblems für die inhomogene Gleichung und sind deshalb in J identisch. □

1.3.19 Aufgabe

L y_1 und y_2 seien zwei im Intervall J verschiedene Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung. Für jede weitere Lösung y der inhomogenen Differentialgleichung ist dann

$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = \text{const.}$$

1.4 Die Bernoullische Differentialgleichung

Als **Bernoullische Differentialgleichung** bezeichnet man die Gleichung

1.4.1 $$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha \ , \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Von den Funktionen f und g verlangen wir die Stetigkeit in einem Intervall J, und da z^α für beliebiges reelles α nur für $z > 0$ erklärt ist, ist die rechte Seite der Differentialgleichung 1.4.1 im Gebiet $J\times]0,\infty[$ definiert. Für $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ liegt eine lineare Differentialgleichung vor, mit der wir uns im Abschnitt 1.3 befasst haben. Wir setzen deshalb $\alpha \neq 0$ und $\alpha \neq 1$ voraus, und wir werden zeigen, dass die Integration von 1.4.1 auf die Integration einer linearen Differentialgleichung zurückgeführt werden kann. Sei $\varphi(x) > 0$ in einem Intervall $I \subset J$. Wir definieren dann die Funktion ψ durch

1.4.2 $$\psi(x) := \varphi(x)^{1-\alpha} \quad , \quad x \in I\,.$$

Hierdurch wird eine bijektive Abbildung aller auf I definierten differenzierbaren und positiven Funktionen auf sich erklärt. Es ist

$$\psi'(x) = (1-\alpha)\varphi(x)^{-\alpha}\varphi'(x)$$

und damit

$$\begin{aligned} & \psi'(x) - (1-\alpha)(f(x)\psi(x) + g(x)) \\ = \ & (1-\alpha)(\varphi(x)^{-\alpha}\varphi'(x) - f(x)\varphi(x)^{1-\alpha} - g(x)) \\ = \ & (1-\alpha)\varphi(x)^{-\alpha}(\varphi'(x) - f(x)\varphi(x) - g(x)\varphi(x)^\alpha)\,. \end{aligned}$$

Damit ist φ in I eine positive Lösung von 1.4.1 genau dann, wenn die durch 1.4.2 in I definierte Funktion ψ dort eine positive Lösung der linearen Differentialgleichung

1.4.3 $$z' = (1-\alpha)f(x)z + (1-\alpha)g(x)$$

ist. Damit ist die Reduktion gezeigt.
Zusammenfassend folgt also

1.4.4 Satz

Transformation der Bernoullischen Differentialgleichung

Seien f und g im Intervall J stetig und $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. I sei ein Teilintervall von J, $\xi \in I$ und $\eta > 0$. Dann ist eine auf I positive Funktion y in I eine Lösung von 1.4.1 *mit $y(\xi) = \eta$ genau dann, wenn $z = y^{1-\alpha}$ in I eine positive Lösung von* 1.4.3 *ist mit $z(\xi) = \eta^{1-\alpha}$.*

1.4.5 Bemerkung

Da eine lineare Differentialgleichung eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems besitzt, hat auch die Bernoullische Differentialgleichung für $\eta > 0$ genau eine Lösung des Anfangswertproblems.

Beispiel

$$y' = \frac{1}{x}y + xy^3 \quad , \quad y(1) = 1\,.$$

Es liegt der Fall $\alpha = 3$ vor. Die Transformation 1.4.2 ist also anzusetzen mit

$$z = y^{-2}\,.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} z' &= -2y^{-3}y' \\ &= -2y^{-3}(\frac{1}{x}y + xy^3) \\ &= -2\frac{1}{x}y^{-2} - 2x \\ &= -\frac{2}{x}z - 2x \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit 1.4.3. Eine partikuläre Lösung z_0 dieser Differentialgleichung ist $z_0(x) := -\frac{1}{2}x^2$. Die Lösung der homogenen Gleichung bestimmen wir aus

$$\int \frac{1}{z}\,dz = -\int \frac{2}{x}\,dx + \hat{c}\,,$$

also

$$\log|z| = \log\left(\frac{1}{x^2}\right) + \hat{c}$$

bzw. $\log(|z|x^2) = \hat{c}$. Es folgt $|z|x^2 = e^{\hat{c}}$. Hieraus ergibt sich weiter

$$z(x) = \frac{c}{x^2}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ für $x \in]0, \infty[$. Die allgemeine Lösung ist damit gegeben durch

$$z(x) = \frac{c}{x^2} - \frac{1}{2}x^2 .$$

Die Anfangsbedingung für z ist $z(1) = (y(1))^{-2} = 1$, und damit ist $c = \frac{3}{2}$. Daher ist

$$z(x) = \frac{3 - x^4}{2x^2} ,$$

und die Rücktransformation auf y liefert uns als Lösung unserer Aufgabe

$$y(x) = z(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3 - x^4}} . \qquad \square$$

1.4.6 Bemerkung (zum vorangehenden Beispiel)

label1.4.6 Obwohl z als Lösung einer linearen Differentialgleichung $]0, \infty[$ als maximales Existenzintervall besitzt, reicht das Existenzintervall von y nur bis zur kleinsten positiven Wurzel von $x^4 - 3 = 0$. Das liegt einfach daran, dass z dort das Vorzeichen wechselt und damit die Voraussetzungen an die Transformation 1.4.2 nicht mehr gegeben sind.

1.4.7 Bemerkung

Beschränkt man α auf ganze Zahlen, so kann man auch noch eine Lösung des Anfangswertproblems für $\eta < 0$ finden.

1.4.8 Aufgabe

L Man prüfe nach, dass für ganzzahlige negative α Satz 1.4.4 auch für $\eta < 0$ gültig bleibt.

1.5 Die Riccatische Differentialgleichung

Wir haben bislang nur Differentialgleichungen behandelt, deren Lösungen man durch Bestimmung von Stammfunktionen ermitteln konnte. Formeln für Lösungen von Differentialgleichungen, die so gewonnen werden, nennt man **Quadraturformeln**. Beispiele sind die Formeln aus Satz 1.2.5 und 1.3.15. Es gibt aber auch Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Lösungen man nicht mehr durch Quadraturformeln finden kann. Hierzu gehört die **Riccatische Differentialgleichung** , die wir in diesem Abschnitt behandeln. Es ist die Differentialgleichung

1.5.1 $$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)\,.$$

Von den Koeffizienten nehmen wir an, dass sie in einem Intervall J stetig sind. Ferner setzen wir $f(x) \neq 0$ für mindestens ein $x \in J$ voraus, da sonst eine lineare Differentialgleichung vorliegt, deren Behandlung in Abschnitt 1.3 erledigt ist. Man kann zeigen, dass bei beliebigen f, g und h 1.5.1 nicht mehr durch Quadraturformeln gelöst werden kann. Falls man jedoch eine Lösung kennt, lassen sich weitere Lösungen durch Quadraturen finden. Ein weiteres Phänomen von 1.5.1 machen wir uns an dem Beispiel

1.5.2 $$y' = 1 + y^2$$

deutlich. Die Koeffizienten $f(x) = h(x) = 1$ und $g(x) = 0$ sind stetig auf $J = \mathbb{R}$, und für $\xi \in \mathbb{R}$ erhalten wir die Lösung $y(x) := \tan(x - \xi)$. Im Gegensatz zur linearen Differentialgleichung finden wir als maximales Existenzintervall das offene Intervall $]\xi - \frac{\pi}{2}, \xi + \frac{\pi}{2}[$, obwohl die Koeffizienten auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind.

Unter zusätzlichen Voraussetzungen an f kann ein einfacher Zusammenhang zwischen den Lösungen 1.5.1 und den Lösungen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung hergestellt werden. Es gilt nämlich

1.5.3 Satz

zugeordnete lineare Dif-ferentialgleichung 2. Ordnung

f sei stetig differenzierbar in J und $f(x) \neq 0$ für jedes $x \in J$. Ferner sei $]a, b[\subset J$. Dann hat 1.5.1 in $]a, b[$ genau dann eine Lösung, wenn

1.5.4 $$f(x)\,y'' - (f'(x) + g(x)\,f(x))y' + f^2(x)\,h(x)\,y = 0$$

eine Lösung hat, die in $]a,b[$ *nicht verschwindet.*

Beweis
Wir wählen ein $\xi \in]a,b[$ fest. Mit $C^k\,(]a,b[)$ bezeichnen wir den Vektorraum aller auf $]a,b[$ k-mal stetig differenzierbaren Funktionen. Für $z \in C^1\,(]a,b[)$ definieren wir die Funktion

1.5.5 $$(Tz)(x) := \exp\left(-\int_\xi^x f(t)z(t)\,dt\right).$$

T liefert dann eine bijektive Abbildung von $C^1\,(]a,b[)$ auf die Menge

$$V := \left\{u \in C^2\,(]a,b[) \mid u(x) \neq 0 \text{ in }]a,b[\text{ und } u(\xi) = 1\right\}.$$

Denn für $z \in C^1\,(]a,b[)$ gilt sicher $Tz \in V$. Ist dann $Tz_1 = Tz_2$, so ist nach Definition 1.5.5

$$\exp\left(-\int_\xi^x f(t)z_1(t)\,dt\right) = \exp\left(-\int_\xi^x f(t)z_2(t)\,dt\right).$$

Wir differenzieren und erhalten mit $Tz_1 = Tz_2$

$$-(Tz_1)(x)\,f(x)z_1(x) = -(Tz_1)(x)\,f(x)z_2(x),$$

und wegen $f(x) \neq 0$ in $]a,b[$ folgt $z_1 = z_2$. Also ist T injektiv. Sei dann $u \in V$. Wir betrachten dann die Funktion

1.5.6 $$z := -\frac{1}{f}\,\frac{u'}{u}.$$

Dann gilt

$$-f\,z = \frac{u'}{u}$$

und Integration von ξ bis x liefert

$$\begin{aligned} -\int_\xi^x f(t)z(t) &= \log(u(x)) - \log(u(\xi)) \\ &= \log\left(u(x)\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u(x) = \exp\left(-\int_\xi^x f(t)z(t)dt\right),$$

und das beweist die Surjektivität von T. Für $z \in C^1(]a,b[)$ folgt

$$(Tz)' = -(Tz)\, f\, z$$

und damit

$$\begin{aligned}(Tz)'' &= -(Tz)'fz - (Tz)f'z - (Tz)fz' \\ &= (Tz)f^2z^2 - (Tz)f'z - (Tz)fz'.\end{aligned}$$

Hiermit bestätigt man sofort die Gleichung

1.5.7
$$\begin{aligned}& f(Tz)'' - [f' + gf]\,(Tz)' + f^2h(Tz) \\ = \;& f^2(Tz)\,[-z' + gz + fz^2 + h]\end{aligned}$$

und wegen $f^2(x) \neq 0$ und $(Tz)(x) \neq 0$ für jedes $x \in]a,b[$ folgt aus dieser Gleichung sofort, dass z eine Lösung von 1.5.1 genau dann ist, wenn Tz eine Lösung von 1.5.4 ist. □

1.5.8 **Bemerkung**

Für $u \in V$ galt $u = Tz$, wobei z mit 1.5.6 gegeben ist. Das bedeutet

1.5.9
$$T^{-1}u = -\frac{1}{f}\,\frac{u'}{u}.$$

Diese bijektive Beziehung zwischen den Lösungen von 1.5.1 und 1.5.4 wenden wir jetzt an auf das

Beispiel

1.5.10
$$y' = 1 + y^2\,.$$

Das ist eine Riccati-Gleichung mit $f(x) = 1$, $g(x) = 0$ und $h(x) = 1$ für $x \in I = \mathbb{R}$. Also lautet die Gleichung 1.5.4 hier

1.5.11 $$y'' = -y\,.$$

$z(x) = \tan x$ ist eine Lösung von 1.5.10 im Intervall $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. Wir bestimmen Tz und erhalten wegen $-\int\limits_0^x \tan(t)dt = \log(\cos x)$,

$$\begin{aligned} Tz &= \exp\left(-\int_0^x \tan(t)dt\right) \\ &= \exp\left(\log(\cos x)\right) \\ &= \cos x, \end{aligned}$$

was in der Tat in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ eine Lösung von 1.5.11 ist, die dort nicht verschwindet. $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist zwar nicht das maximale Existenzintervall für Tz, aber in größeren Intervallen treten jetzt Nullstellen von Tz auf.

1.5.10 ist ein Beispiel dafür, wie man aus einer Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung eine Lösung ohne Nullstelle der zugeordneten linearen Differentialgleichung 1.5.4 erhält. Eine Anwendung für die umgekehrte Richtung stellt die nachfolgende Aufgabe dar.

1.5.12 Aufgabe

L Man bestimme durch Übergang zur Differentialgleichung 1.5.4 eine Lösung des Anfangswertproblems

1.5.13 $$y' = -e^x y^2 + y - 5e^{-x}\,,$$

1.5.14 $$y(0) = \eta\,.$$

Man begründe zugleich die Eindeutigkeit.

Wir zeigen jetzt, dass die vollständige Lösung der Riccatischen Differentialgleichung durch **Quadratur** gelingt, wenn man eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung kennt. Bei Anwendungen versucht man dies meist dadurch zu erreichen, dass man mit einem speziellen Ansatz eine Lösung zu raten versucht, was natürlich nur bei einigen einfachen Beispielen gelingt. Wir setzen von f jetzt nur noch voraus, dass f in J stetig ist und dort in keinem Teilintervall identisch verschwindet. Dann gilt

1.5.15 Satz

y_0 sei im Intervall $I :=]a,b[\subset J$ eine Lösung von 1.5.1. *Sind u und y auf I differenzierbare Funktionen mit*

1.5.16 $$u(x)(y(x) - y_0(x)) = 1$$

für $x \in I$, so ist y in I eine Lösung von 1.5.1 *genau dann, wenn u in I eine Lösung von*

1.5.17 $$u' = -(2f(x)y_0(x) + g(x))u - f(x)$$

ist.

Beweis
Sei zunächst y in I eine Lösung von 1.5.1. Wir setzen

1.5.18 $$z(x) := y(x) - y_0(x)\,.$$

z ist in I stetig differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} z'(x) &= y'(x) - y_0'(x) \\ &= f(x)(y^2(x) - y_0^2(x)) + g(x)((y(x) - y_0(x))\,. \end{aligned}$$

Wegen $y^2(x) - y_0^2(x) = z(x)(z(x) + 2y_0(x))$ erhalten wir für z die Differentialgleichung

1.5.19 $$z' = f(x)z^2 + (2f(x)y_0(x) + g(x))z\,.$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 2$. Wegen 1.5.16 verschwindet z auf I nicht, und deshalb ist nach Abschnitt 1.4 $u := \dfrac{1}{z}$ in I eine Lösung der Differentialgleichung 1.5.17. Genügt nun umgekehrt u in I der Differentialgleichung 1.5.17, so ist wegen 1.5.16 u in I von Null verschieden, und deshalb genügt nach Abschnitt 1.4 $z := \dfrac{1}{u}$ in I der speziellen Bernoullischen Differentialgleichung 1.5.19. Wegen 1.5.16 ist $z = y - y_0$, und Einsetzen in 1.5.19 liefert

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_0'(x) + f(x)y^2(x) - 2f(x)y_0(x)y(x) + f(x)y_0^2(x) \\ &\quad +2f(x)y_0(x)y(x) + g(x)y(x) - 2f(x)y_0^2(x) - g(x)y_0(x) \\ &= f(x)y^2(x) + g(x)y(x) + y_0'(x) - f(x)y_0^2(x) - g(x)y_0(x) \\ &= f(x)y^2(x) + g(x)y(x) + h(x)\,, \end{aligned}$$

und somit ist y in I Lösung von 1.5.1 . □

1.5.20 **Bemerkung**

weitere Lösungen bei bekannter partikulärer Lösung

Hat man in I eine Lösung y_0 der Riccatischen Differentialgleichung, so erhält man mit Satz 1.5.15 sämtliche in ganz I von y_0 verschiedene Lösungen in der Form

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{u(x)}\,,$$

wobei u sämtliche, in I nirgends verschwindende Lösungen von 1.5.17 durchläuft.

Beispiel

$$y' = y^2 + 2xy + 2\,.$$

Wir haben für $x \neq 0$ die partikuläre Lösung $y_0(x) := -\frac{1}{x}$. Die Differentialgleichung 1.5.17 lautet hier

1.5.21
$$u' = -\left(-\frac{2}{x} + 2x\right)u - 1$$

oder

1.5.22
$$u' = \left(\frac{2}{x} - 2x\right)u - 1\,.$$

Die Lösungen der homogenen Gleichung bestimmen wir gemäß Abschnitt 1.2 aus der Formel

$$\int \frac{1}{u}\,du = \int \left(\frac{2}{x} - 2x\right)dx + c\,,$$

woraus sofort

$$u(x) = cx^2 e^{-x^2}$$

folgt. Eine Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmen wir mit der Methode der Variation der Konstanten. Setzen wir noch

$$E(x) := \int_0^x e^{t^2}\, dt\,,$$

so findet man für die inhomogene Gleichung die partikuläre Lösung

$$u_0(x) := x - 2x^2 e^{-x^2} E(x)\,.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung 1.5.22 ist somit

$$u(x,c) := x + x^2 e^{-x^2}(c - 2E(x))\,.$$

Alle von $-\dfrac{1}{x}$ verschiedenen Lösungen erhalten wir damit durch

$$\begin{aligned} y(x,c) &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x + x^2 e^{-x^2}(c - 2E(x))} \\ &= -\frac{e^{-x^2}(c - 2E(x))}{1 + xe^{-x^2}(c - 2E(x))}\,. \end{aligned}$$

□

Nach der in Satz 1.5.15 beschriebenen Methode erhalten wir in I nur solche Lösungen, die in ganz I von y_0 verschieden sind. Dass es aber keine weiteren Lösungen in I gibt, folgt aus

1.5.23 Satz

Eindeutigkeitssatz

Sei $I :=]a,b[\subset J$, *und* y_1, y_2 *seien in* I *Lösungen von* 1.5.1. *Dann gilt entweder* $y_1(x) = y_2(x)$ *für alle* $x \in I$ *oder* $y_1(x) \neq y_2(x)$ *für alle* $x \in I$.

Beweis

Nehmen wir an, die Behauptung sei falsch. Dann kann man wegen der Stetigkeit der Lösungen in I ein $x_0 \in I$ und ein nichtleeres offenes Teilintervall $I_1 \subset I$ finden mit folgenden Eigenschaften:

(1) x_0 ist Eckpunkt von I_1 ,
(2) $y_1(x_0) = y_2(x_0)$,
(3) $y_1(x) \neq y_2(x)$ für $x \in I_1$.

Auf I_1 betrachten wir dann die Funktion

1.5.24
$$u(x) := \frac{1}{y_1(x) - y_2(x)} .$$

Sie ist nach Satz 1.5.15 in I_1 eine Lösung der linearen Differentialgleichung 1.5.17. u hat dann nach der Folgerung 1.3.11 das maximale Existenzintervall J, und daher existiert $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0)$. Das aber steht wegen 1.5.24 im Widerspruch zu

$$\lim_{x \to x_0} (y_1(x) - y_2(x)) = y_1(x_0) - y_2(x_0) = 0 . \qquad \square$$

Zusammen mit Satz 1.5.15 erhalten wir die

1.5.25 Folgerung

die allgemeine Lösung bei bekannter partikulärer Lösung

Sei $I :=]a, b[\subset J$ und y_0 in I eine Lösung von 1.5.1. *u_0 sei in I eine Lösung der linearen Differentialgleichung* 1.5.17 *und v_0 eine nichttriviale Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Dann gilt in I für jede weitere Lösung y der Gleichung* 1.5.1: *Entweder ist $y(x) = y_0(x)$ für $x \in I$, oder es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für $x \in I$ gilt*

$$y(x) = y_0(x) + \frac{1}{u_0(x) + c\, v_0(x)} .$$

Beweis
Nach Satz 1.5.23 gilt entweder $y(x) = y_0(x)$ für alle $x \in I$ oder $y(x) \neq y_0(x)$ für alle $x \in I$. Im zweiten Fall ist dann

$$u(x) := \frac{1}{y(x) - y_0(x)}$$

in I eine Lösung der linearen Differentialgleichung 1.5.17. Also gibt es ein (eindeutig bestimmtes) $c \in \mathbb{R}$, so dass

$$u(x) = u_0(x) + c v_0(x) ,$$

was dann die Behauptung ergibt. $\square$

1.5.26 Aufgabe

L Man bestimme alle Lösungen von

$$y' = y^2 + 1 - x^2$$

und gebe jeweils die zugehörigen maximalen Existenzintervalle an.
(Hinweis: $y(x) = x$ ist eine partikuläre Lösung.)

1.5.27 Aufgabe

L y_ν $(\nu = 0, 1, 2, 3)$ seien in einem offenen Intervall $I \subset J$ vier verschiedene Lösungen der Riccatischen Differentialgleichung. Man zeige, dass der Quotient (Doppelverhältnis)

$$\frac{y_2(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_0(x)} : \frac{y_3(x) - y_1(x)}{y_3(x) - y_0(x)}$$

in I konstant ist.

1.6 Exakte Differentialgleichungen, integrierende Faktoren

Zur Einführung betrachten wir im Gebiet $G := \mathbb{R}^2$ die Differentialgleichung (mit getrennten Variablen)

1.6.1 $$x + yy' = 0\,.$$

Ist φ in einem Intervall I eine Lösung, so gilt dort

1.6.2 $$x + \varphi(x)\varphi'(x) = 0\,.$$

Die linke Seite ist nun die Ableitung der Funktion

$$\phi(x) := \frac{1}{2}(x^2 + \varphi^2(x))\,,$$

also gilt mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ die Identität

$$x^2 + \varphi^2(x) = c \quad \text{für alle} \quad x \in I\,.$$

Besteht I nicht nur aus dem Nullpunkt, so ist $c > 0\,,$ und wir erhalten für die Lösung φ :

$$\varphi(x) = \pm\sqrt{c - x^2}\,.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung 1.6.1 bestimmen sich also durch Auflösen der Gleichung

$$F(x, y) := x^2 + y^2 = c$$

nach y , und 1.6.1 ist gerade die Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)y' = 0\,.$$

Entsprechend diesem Beispiel gehen wir nun vor:

1.6.3 Definition

G sei ein Gebiet in $\mathbb{R}^2$, und die Funktionen P und Q seien stetig in G. Dann heißt die Differentialgleichung

1.6.4
$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

in G **exakt** *(oder* **total***), wenn es eine in G stetig differenzierbare Funktion F gibt mit*

1.6.5
$$\frac{\partial F}{\partial x} = P\,,\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q\,.$$

Bemerkung
Man nennt F eine **Stammfunktion zu** (P,Q) in G oder auch eine **Stammfunktion der Differentialgleichung** in G .

Beispiel

$$F(x,y) := \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

ist in $\mathbb{R}^2$ eine Stammfunktion zu $P(x,y) = x\,, Q(x,y) = y\,.$ Also ist die Differentialgleichung 1.6.1 in $\mathbb{R}^2$ exakt. □

Für die Lösung exakter Differentialgleichungen erhalten wir den

1.6.6 Satz

Lösungen exakter Differentialgleichungen

Die Differentialgleichung 1.6.4 *sei in G exakt und F in G eine Stammfunktion. Ferner sei φ im Intervall I differenzierbar und $(x,\varphi(x)) \in G$ für $x \in I$. Dann ist φ in I genau dann eine Lösung von* 1.6.4, *wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit*

$$F(x,\varphi(x)) = c \quad \textit{für} \quad x \in I\,.$$

Beweis
Nach der Kettenregel ist $F(x,\varphi(x))$ in I differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(F(x,\varphi(x))) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\,\varphi'(x)\\ &= P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\,\varphi'(x)\,.\end{aligned}$$

Daher verschwindet die rechte Seite genau dann in I, wenn $F(x, \varphi(x))$ in I konstant ist. □

Es schließen sich jetzt zwei Fragen an.

1. Wie erkennt man, ob eine gegebene Differentialgleichung exakt ist?

2. Ist eine Differentialgleichung exakt, wie findet man eine Stammfunktion?

Bei den Anwendungen sind die Funktionen P und Q meist sogar stetig differenzierbar. Gibt es also in G eine Stammfunktion F, so ist diese in G dann zweimal stetig differenzierbar, und nach dem Satz von Schwarz sind die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung vertauschbar. Damit erhalten wir die **notwendige Bedingung**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Diese Bedingung ist z.B. in 1.6.1 erfüllt. Aus der Analysis ist bekannt, dass bei beliebigen Gebieten diese Bedingung nicht hinreichend ist. Beschränkt man sich jedoch auf einfach zusammenhängende Gebiete, so gilt auch die Umkehrung:

1.6.7 Satz

Integrabilitätskriterium

Die Funktionen P und Q seien in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G stetig differenzierbar. Dann gibt es in G genau dann eine Stammfunktion, wenn dort

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

gilt.

Zum Beweis wird auf die Kurse über Analysis verwiesen. Dieser Beweis enthält zugleich eine Antwort auf die zweite Frage. Ist nämlich $(\xi, \eta) \in G$, so erhält man lokal eine Stammfunktion durch die Formel

1.6.8

$$F(x,y) := \int_{\xi}^{x} P(t,\eta)dt + \int_{\eta}^{y} Q(x,t)dt\,.$$

Bemerkung
In den Anwendungen werden als Gebiete meist Rechtecke, Kreisscheiben oder auch konvexe Gebiete betrachtet. Sie sind einfach zusammenhängend, so dass auf sie Satz 1.6.7 anwendbar ist.

Beispiel
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\log(1+y^2) + \frac{2y(x-1)}{1+y^2} y' = 0\,.$$

Die Koeffizienten P und Q sind stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$, und wegen

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\log(1+y^2)\right) = \frac{2y}{1+y^2}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y(x-1)}{(1+y^2)}\right) = \frac{2y}{1+y^2}$$

ist die Bedingung von Satz 1.6.7 erfüllt. Eine Stammfunktion ist

$$F(x,y) = \int_0^x \log(1+0)dt + \int_0^y \frac{2t(x-1)}{1+t^2}\,dt = (x-1)\log(1+y^2)\,.$$

Damit erhalten wir alle Lösungen durch Auflösung der Gleichung

$$(x-1)\log(1+y^2) = c$$

nach y. □

Bemerkung
Ist F in G eine Stammfunktion, so genügen nach Satz 1.6.6 alle Lösungen φ der Gleichung $F(x,\varphi(x)) = c$ mit einem geeigneten $c \in \mathbb{R}$. Man erhält also alle Lösungen durch Auflösen einer Gleichung der Form

1.6.9 $$F(x,y) = c$$

nach y mit einem geeigneten $c \in \mathbb{R}$.

1.6.10 Aufgabe

L Man bestimme eine Stammfunktion für die Differentialgleichung

$$(3x^2+y^2) + 2xyy' = 0\,.$$

Wir kommen nun zur Lösung des Anfangswertproblems bei exakten Differentialgleichungen. Es gilt:

1.6.11 Satz

Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Die Differentialgleichung 1.6.4 *sei in* G *exakt. Sei* $(\xi,\eta)\in G$ *und* $Q(\xi,\eta)\neq 0$. *Dann gibt es genau eine Lösung* y *von* 1.6.4 *mit* $y(\xi)=\eta$.

Beweis

Sei F in G eine Stammfunktion von P und Q. Dann erfüllt die Funktion

$$\phi(x,y) := F(x,y) - F(\xi,\eta)$$

folgende Bedingungen:

(i) ϕ ist in G stetig differenzierbar,

(ii) $\dfrac{\partial\phi}{\partial y}(\xi,\eta) = Q(\xi,\eta)\neq 0$,

(iii) $\phi(\xi,\eta)=0$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es ein Intervall I und genau eine auf I stetig differenzierbare Funktion y mit folgenden Eigenschaften:

1) $y(\xi)=\eta$,

2) $\phi(x,y(x)) = F(x,y(x)) - F(\xi,\eta) = 0$ für $x\in I$.

Nach Satz 1.6.6 ist y daher Lösung von 1.6.4, und dies zeigt die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems. Da umgekehrt jede Lösung z des Anfangswertproblems in einer Umgebung von ξ die Gleichung $\phi(x,z(x)) = 0$ erfüllt, liefert der Satz über implizite Funktionen zugleich die Eindeutigkeit der Lösung. □

Ist die Differentialgleichung 1.6.4 in G nicht exakt, so kann man versuchen, sie durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion $\mu(x,y)$ exakt zu machen. Solche Multiplikatoren, mit denen man die Differentialgleichung exakt machen kann, nennt man **integrierende Faktoren**. Da durch $\mu = 0$ jede Differentialgleichung 1.6.4 exakt wird, wird diese Funktion ausgeschlossen, und man erklärt:

1.6.12 Definition

Multiplikator, integrierender Faktor

Sei μ stetig in $G_1 \subset G$ und $\mu(x,y) \neq 0$ für mindestens ein $(x,y) \in G_1$. μ *heißt in G_1 ein* **integrierender Faktor** *für* 1.6.4 *genau dann, wenn*

$$\mu(x,y)P(x,y) + \mu(x,y)Q(x,y)y' = 0$$

in G_1 exakt ist.

Ist G_1 einfach zusammenhängend und sind μ, P und Q in G_1 stetig differenzierbar, so gilt als **Integrabilitäts-Kriterium:** μ ist in G_1 integrierender Faktor genau dann, wenn

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)\,,$$

was zu

1.6.13
$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P - \frac{\partial \mu}{\partial x}Q = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

äquivalent ist.

Beispiel

1.6.14
$$y - xy' = 0\,.$$

Hier ist also $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = -x$. Wegen $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1$ ist 1.6.14 nicht exakt. Wir versuchen, aus 1.6.13 integrierende Faktoren zu bestimmen. Die Bedingung lautet

$$x\frac{\partial \mu}{\partial x} + y\,\frac{\partial \mu}{\partial y} = -2\mu\,.$$

Man bestätigt sofort, dass folgende Funktionen als Lösungen in Frage kommen:

1) $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2}$,

2) $\mu(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$,

3) $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xy}$.

Im 1. Fall ist μ im Gebiet $\{(x,y) \mid x > 0\}$ ein integrierender Faktor $\neq 0$. Die Differentialgleichung lautet nach Multiplikation mit $\dfrac{1}{x^2}$

$$\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}y' = 0\,,$$

und eine Stammfunktion in diesem Gebiet ist $\dfrac{y}{x}$. Auch im Gebiet $\{(x,y) \mid x < 0\}$ ist $\dfrac{y}{x}$ eine Stammfunktion.
Der 2. Faktor führt im Gebiet $\{(x,y) \mid y > 0\}$ oder $\{(x,y) \mid y < 0\}$ auf die exakte Differentialgleichung

$$\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}y' = 0\,.$$

Eine Stammfunkion ist $F(x,y) = \dfrac{x}{y}$, und wir erhalten alle Lösungen durch Auflösen der Gleichung

$$\frac{x}{y} = c\,.$$

Der letzte Faktor führt außerhalb der Koordinatenachsen zu der exakten Differentialgleichung

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y}y' = 0\,.$$

Eine Stammfunktion ist $F(x,y) = \log|x| - \log|y|$, und $F(x,y) = c$ führt auf

$$\frac{x}{y} = c\,.$$

Im ersten Quadranten sind in allen 3 Fällen die entstehenden Differentialgleichungen exakt. Als Lösungskurven erhält man in allen 3 Fällen die Halbstrahlen durch Null. Man hat nur jeweils die Konstante geeignet zu wählen. □

1.6.15 Aufgabe

L Man zeige, dass im Gebiet $J \times \mathbb{R}$ die Funktion

$$\mu(x,y) := \exp\Big(\int\limits_{\xi}^{x} f(t)dt\Big)$$

mit $\xi \in J$ ein integrierender Faktor der linearen Differentialgleichung

$$f(x)y - g(x) + y' = 0$$

ist. f und g werden dabei als stetig vorausgesetzt.

Durch Multiplikation der Differentialgleichung mit $\mu(x,y)$ wird jede Funktion y, die durch Auflösung der Gleichung $\mu(x,y) = 0$ entsteht, Lösung der exakt gemachten Differentialgleichung, ohne dass dies eine Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung sein muss. Man muss also noch nachprüfen, ob man notfalls diese Lösungen noch wegnehmen muss. Andererseits gewinnt man die Ausgangsgleichung durch Multiplikation mit μ^{-1} zurück, und daher sind Auflösungen von $\mu^{-1}(x,y) = 0$ nach y noch hinzuzunehmen.

Beispiel

$$y - xy' = 0$$

ist nicht exakt. Ein integrierender Faktor ist $\mu(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$, der uns die exakte Gleichung

$$\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}y' = 0$$

liefert. Die Lösungsgesamtheit wird gegeben durch Auflösen von

1.6.16 $$\frac{x}{y} = c \iff y = \alpha x\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

nach y. Da $\mu(x,y) \neq 0$ ist, braucht man keine Lösung von 1.6.16 wegzunehmen. $\mu^{-1}(x,y) = 0$ führt auf $y = 0$. Dies ist eine Lösung der Differentialgleichung, die in 1.6.16 nicht enthalten ist. Sie muss noch hinzugenommen werden.

1.6.17 Aufgabe

L Man zeige: Ist $Q(x,y)$ in G von Null verschieden und

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)}{Q(x,y)} =: \varphi(x)$$

eine nur von x abhängige Funktion, so ist jede Lösung von

$$\mu' = \varphi(x)\mu$$

ein nur von x abhängender integrierender Faktor.

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir nochmals das einleitende Beispiel 1.6.1

$$x + yy' = 0\,.$$

Wir fanden die Lösungen $y(x) = \pm\sqrt{c - x^2}\,, \quad c > 0\,,$ die Halbkreise um den Nullpunkt in der oberen bzw. unteren Halbebene darstellen. In den Endpunkten $(\pm\sqrt{c}, 0)$ sind die Lösungen nicht mehr differenzierbar, da y' dort entsprechend den senkrechten Tangenten die Werte $\pm\infty$ haben müsste. Diese Ausnahmestellen kommen deswegen zustande, weil wir y gegenüber x dadurch auszeichnen, dass wir die Halbkreise als Funktionen von x beschreiben. Wir wollen dementsprechend die Differentialgleichung 1.6.1 auch deutlicher mit

1.6.18 $$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

notieren.
Die gleichen Halbkreise können wir auch beschreiben durch

$$\left\{(x(y), y) \mid x(y) = \pm\sqrt{c - y^2}\,,\, y \in \left[-\sqrt{c}, +\sqrt{c}\right]\right\}\,.$$

$x(y)$ ist differenzierbar bis auf die Eckpunkte, wo wir jetzt eine waagerechte Tangente haben, und $x(y)$ ist Lösung der Differentialgleichung

1.6.19 $$x\frac{dx}{dy} + y = 0\,.$$

Nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion ist

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}\,,$$

solange $y'(x) \neq 0$ ist. Dies schreibt man deutlicher mit $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$. Man sieht so, dass die Differentialgleichung 1.6.19 aus 1.6.18 formal entsteht durch Multiplikation mit dx und Division durch dy. Eine strenge Rechtfertigung folgt aber

nur mit unseren Überlegungen zur Ableitung der Umkehrfunktion. Schließlich können wir eine Darstellung der Kreise um Null angeben, die keine der Koordinaten x oder y auszeichnet. Dies leistet z.B. die Parameterdarstellung

1.6.20
$$x(t) = \sqrt{c}\cos t \quad , \quad y(t) = \sqrt{c}\sin t\,,$$
$$t \in [0, 2\pi]\,.$$

x und y sind stetig differenzierbar und genügen der Differentialgleichung

1.6.21
$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0\,.$$

Solange $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ ist, kann die Gleichung $x = x(t)$ nach t aufgelöst werden und $t = t(x)$ in $y(t)$ eingesetzt werden. Für die Integralkurven erhalten wir so die Darstellung

$$(x(t), y(t)) = (x, y(t(x))) = (x, \tilde{y}(x))\ .$$

$\tilde{y}$ ist differenzierbar, und es gilt bekanntlich

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}\,.$$

$\tilde{y}$ genügt der Differentialgleichung 1.6.18, die wir also formal aus 1.6.21 erhalten durch Multiplikation mit dt und Division durch dx.
Aus der Parameterdarstellung 1.6.20 erhalten wir weitere Parameterdarstellungen, indem wir $t = h(\tau)$ setzen mit einer differenzierbaren Funktion h. Dann gilt für die Funktionen

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\tau) &:= x(h(\tau))\,, & \tilde{y}(\tau) &:= y(h(\tau))\,, \\ \frac{d\tilde{x}}{d\tau}(\tau) &= \frac{dx}{dt}(h(\tau))\cdot h'(\tau)\,, & \frac{d\tilde{y}}{d\tau}(\tau) &= \frac{dy}{dt}(h(\tau))\cdot h'(\tau)\,. \end{aligned}$$

Diese genügen der Differentialgleichung

1.6.22
$$\tilde{x}\frac{d\tilde{x}}{d\tau} + y\frac{d\tilde{y}}{d\tau} = 0\,.$$

Bis auf Umbenennung der Variablen t liegt also wieder die Differentialgleichung 1.6.21 vor. 1.6.21 ist also invariant gegen Parametertransformationen, und man notiert sie daher auch in der parameterfreien Form

1.6.23 $$x\,dx + y\,dy = 0\,,$$

in der keine der Koordianten x und y ausgezeichnet ist. Entsprechend diesem Beispiel erklären wir

1.6.24 **Definition**

parameter-invariante Form der Differential-gleichung

Die Funktionen P und Q seien stetig im Gebiet G. Als Lösungen der Differentialgleichung

1.6.25 $$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

bezeichnet man jede Kurve $(x(t), y(t))$ mit $t \in]\alpha, \beta[$, die dort den folgenden Bedingungen genügt:

(1) *x, y sind stetig differenzierbar,*

(2) $(x(t), y(t)) \in G$,

(3) $P\,(x(t), y(t))\,\dot{x}\,(t) + Q\,(x(t), y(t))\,\dot{y}\,(t) = 0\,.$

Dabei ist

$$\dot{x}\,(t) := \frac{dx}{dt}(t)\,, \quad \dot{y}\,(t) := \frac{dy}{dt}(t)\,.$$

1.6.26 **Aufgabe**

L Man ermittle die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$2xy\,dx + dy = 0\,.$$

Man gebe die Kurve an, die durch den Punkt $(0, 2)$ geht.

Entsprechend der Definition 1.6.3 nennt man die Differentialgleichung 1.6.25 in G exakt, wenn es in G eine Stammfunktion zu (P, Q) gibt. Dann folgt ganz analog zu Satz 1.6.6

1.6.27 Satz

1.6.25 *sei in G exakt und F sei in G eine Stammfunktion. Dann ist die Kurve $(x(t), y(t))$ in I mit stetig differenzierbaren Funktionen x und y sowie $(x(t), y(t)) \in G$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn*

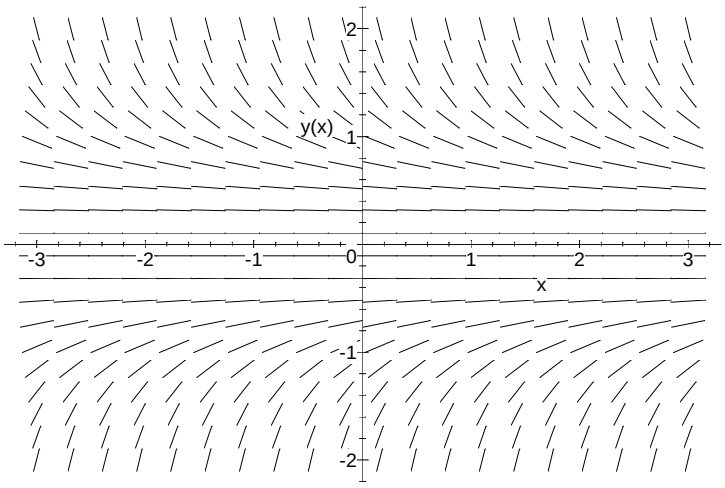
$$F\left(x(t), y(t)\right) = c \quad \textit{für jedes} \quad t \in I$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$ gilt.

Lösungen zu den Aufgaben

Lösungen zu 1.1

1.1.30 Die Isoklinen sind die Parallelen zur x–Achse. Sie liefern das in der nachfolgenden Abbildung dargestellte Richtungsfeld. In der oberen Halbebene ist der Anstieg in jedem Linienelement negativ und in der unteren Halbebene ist der Anstieg jeweils positiv.



Lösungen zu 1.2

1.2.10 Die Differentialgleichung ist

$$y' = \frac{e^x}{1+e^x} e^{-y}$$

und hat getrennte Variable. Es ist $(\xi, \eta) = (0, 1)$ mit $g(\eta) = g(1) = e^{-1} \neq 0$. Nach 1.2.5 hat das Anfangswertproblem genau eine Lösung, und diese ist bestimmt durch

$$\int_1^y e^\tau d\tau = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}\, dt\,,$$

d.h.

$$\begin{aligned} e^y - e &= \log(1+e^x) - \log(2) \\ &= \log\left(\frac{1}{2}(1+e^x)\right)\,. \end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung

$$y(x) = \log(\log\left(\frac{1}{2}(1+e^x)\right) + e)\,.$$

Das maximale Existenzintervall ist offenbar $\mathbb{R}$.

1.2.20 Man wähle die Transformation

$$u = \frac{y}{x}\,.$$

Dann ist $y' = u + x\,u'$ und wir erhalten für u die Differentialgleichung

$$u' = \frac{1}{x}\,\frac{1-2u-2u^2}{1+2u}\,,$$

und die Anfangsbedingung für y ergibt die Bedingung

$$u(1) = 0\,.$$

Trennung der Variablen ergibt die Beziehung

$$\int \frac{1+2u}{1-2u-2u^2}du = \int \frac{1}{x}dx + c\,.$$

Da

$$\int \frac{1+2u}{1-2u-2u^2}du = -\frac{1}{2}\,\log|1-2u-2u^2|\,,$$

folgt

$$-\frac{1}{2}\,\log|1-2u-2u^2| = \log|x| + c\,.$$

Wegen der Anfangsbedingung $u(1)=0$ finden wir für c: $-\frac{1}{2}\log(1) = c$, also $c=0$, und somit gilt für die gesuchte Lösung u

$$\begin{aligned}\log|1-2u-2u^2| &= -2\,\log\,x\\ &= -\log(x^2)\end{aligned}$$

so dass

$$\log|\left(1-2u-2u^2\right)x^2| = 0\,.$$

Da $u(1)=0$, gilt – zumindest lokal um 1 –

$$1-2u-2u^2 = \frac{1}{x^2}\,.$$

Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergibt dann für u

$$u(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}\sqrt{3x^2-2}\,.$$

und daher für y

$$y(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3x^2-2}\,.$$

Man bestätigt die Richtigkeit des Ergebnisses leicht durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Lösungen zu 1.3

1.3.17 Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung bestimmt man durch Trennung der Variablen zu (vgl. das Beispiel nach Satz 1.3.9)

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{1}{x}\, dx = c_1\,,$$

also

$$\log|yx| = c$$

und damit

$$y = \frac{c_2}{x}\,.$$

Eine Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmen wir durch den Ansatz

$$y_0(x) = c(x)\frac{1}{x}$$

und finden durch Einsetzen

$$c(x) = \frac{1}{4}x^4\,.$$

Eine partikuläre Lösung ist daher

$$y_0(x) = \frac{1}{4}x^3\,,$$

und die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = \frac{c}{x} + \frac{1}{4}x^3\,.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ ergibt $c = \dfrac{3}{4}$. Die gesuchte Lösung ist daher

$$y(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 + \frac{3}{x}\right)\,.$$

Sie existiert im Intervall $]0, \infty[$.

1.3.19 z_0 sei in J eine nichttriviale Lösung der homogenen Gleichung. Dann gibt es Konstanten c_1 und $c_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_2 \neq 0$ und

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x) + c_1 z_0(x)\,, \\ y_2(x) &= y_1(x) + c_2 z_0(x) \end{aligned}$$

für $x \in J$.
Damit ist

$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = \frac{c_1}{c_2}\,.$$

Lösungen zu 1.4

1.4.8 Wesentlich ist, dass durch die Gleichung

$$u = y^{1-a}$$

eine in beiden Richtungen stetig differenzierbare Abbildung des Gebietes $y < 0$ auf das Gebiet $u > 0$ bzw. $u < 0$ (α ungerade bzw. α gerade) erklärt wird. Damit sind alle Schlüsse zu Satz 1.4.4 durchführbar.

Lösungen zu 1.5

1.5.12 Es ist $f(x) = -e^x\,, \quad g(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}\,, \quad h(x) = -5e^{-x}\,.$

Die Voraussetzungen an f sind erfüllt. Die zugeordnete lineare Differentialgleichung lautet

$$u'' - 2u' + 5u = 0\,.$$

Wie wir später noch zeigen werden, erhält man sämtliche Lösungen dieser Differentialgleichung mit

$$u(x) = ae^x \cos 2x + be^x \sin 2x, \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

(Man bestätigt durch Einsetzen, dass u Lösung ist.) u erfüllt die Anfangsbedingungen

$$u(0) = a \quad , \quad u'(0) = a + 2b\,.$$

Man bekommt alle in einer Umgebung von Null definierten Lösungen der Riccatischen Differentialgleichung in der Form

$$y(x) = -\frac{1}{f(x)}\,\frac{u'(x)}{u(x)}\,,$$

wobei u alle in einer Umgebung von Null nicht verschwindenden Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung durchläuft. Es ist also $a \neq 0\,,$ und die Anfangsbedingung für y ergibt die Bedingung

$$\eta = y(0) = e^0\,\frac{u'(0)}{u(0)} = \frac{a + 2b}{a}\,.$$

Wegen $a \neq 0$ ergibt sich für b die Formel

$$b = \frac{a}{2}(\eta - 1)\,,$$

und die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(x) = e^{-x}\,\frac{(a + 2b)e^x \cos 2x + (b - 2a)e^x \sin 2x}{ae^x \cos 2x + be^x \sin 2x}\,.$$

Hiermit folgt

$$a + 2b = \eta a\,,$$

$$b - 2a = \frac{a}{2}(\eta - 5)$$

und damit

$$y(x) = \frac{\eta \cos 2x + \frac{1}{2}(\eta - 5)\sin 2x}{e^x \cos 2x + \frac{1}{2}(\eta - 1)e^x \sin 2x}\,.$$

Man sieht, dass man für jedes $a \neq 0$ die gleiche Lösung erhält. Das zeigt zugleich die Eindeutigkeit.

1.5.26 Man erhält zunächst die partikuläre Lösung

$$y_0(x) = x$$

mit $\mathbb{R}$ als maximalem Existenzintervall. Weitere von y_0 verschiedene Lösungen bestimmen wir durch die Transformation

$$y = y_0 + \frac{1}{u} = x + \frac{1}{u} \quad , \quad u \neq 0\,.$$

Dann ist

$$y' = 1 - \frac{1}{u^2}u'\,,$$

und u genügt der Differentialgleichung

$$u' = -2xu - 1\,.$$

Die homogene Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$u(x) = ce^{-x^2}\,,$$

und mit $E(x) := \int_0^x e^{t^2}\,dt$ wird

$$u_0(x) = -e^{-x^2}E(x)$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung ist daher

$$u(x) = e^{-x^2}[c - E(x)]$$

und damit

$$\begin{aligned} y(x) &= x + \frac{e^{x^2}}{c - E(x)} \\ &= \frac{x(c - E(x)) + e^{x^2}}{c - E(x)} \,. \end{aligned}$$

$c - E(x)$ hat genau eine Nullstelle α, also sind die maximalen Existenzintervalle

$$]-\infty, \alpha[\quad \text{und} \quad]\alpha, \infty[\,.$$

1.5.27 Wir betrachten in I die Funktionen

$$u_\nu(x) := \frac{1}{y_\nu(x) - y_0(x)} \quad , \ \nu = 1, 2, 3 \,.$$

Nach Satz 1.5.14 sind dies in I Lösungen einer linearen Differentialgleichung, die nach Voraussetzung paarweise verschieden sind. Nach Aufgabe 1.3.19 ist dann

$$\frac{u_2(x) - u_1(x)}{u_3(x) - u_1(x)} = \text{const} \,.$$

Nun ist

$$u_\nu(x) - u_1(x) = -u_1(x)\frac{y_\nu(x) - y_1(x)}{y_\nu(x) - y_0(x)} \,,$$

und das liefert die Behauptung.

Lösungen zu 1.6

1.6.10 Es ist

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \quad ,$$

also ist die Differentialgleichung in $\mathbb{R}^2$ exakt. Eine Stammfunktion findet man mit

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^x (3t^2)dt + \int_0^y 2xt\,dt \\ &= x^3 + xy^2\,. \end{aligned}$$

Also findet man alle Lösungen durch Auflösen von

$$x^3 + xy^2 = c$$

nach y.

1.6.15 Es ist

$$\begin{aligned} P(x,y) &= f(x)y - g(x)\,, \\ Q(x,y) &= 1\,. \end{aligned}$$

Da f und g in J stetig sind, existieren die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu P)$ und $\dfrac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$, sind in $J \times \mathbb{R}$ stetig und erfüllen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\mu P) &= \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \mu f\,, \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) &= \mu f Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x} = \mu f\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. Eine Stammfunktion ist

$$F(x,y) = y \exp\Big(\int_\xi^x f(t)dt\Big) - \int_\xi^x g(t) \exp\Big(\int_\xi^t f(\tau)d\tau\Big)\,dt\,.$$

1.6.17 Sei μ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mu' = \varphi(x)\mu\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) &= \mu' Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}\\ &= (\varphi Q)\mu + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}\\ &= \mu\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\mu P)\,.\end{aligned}$$

Das ist die Behauptung.

1.6.26 Es ist $P(x,y) = 2xy \quad , \quad Q(x,y) = 1\,.$

Da $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x\,, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0\,,$ ist die Gleichung nicht exakt. Die Differentialgleichung für integrierende Faktoren lautet hier

$$2xy\frac{\partial \mu}{\partial y} + 2x\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\,.$$

Jeder nur von x abhängige integrierende Faktor ist Lösung der Differentialgleichung

$$\mu' = 2x\mu\,.$$

Wir wählen die Lösung

$$\mu(x) = e^{x^2}\,,$$

und damit ist

$$2xye^{x^2}dx + e^{x^2}dy = 0$$

exakt. Eine Stammfunktion ist

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^x (\mu P)(t,0)dt + \int_0^y (\mu Q)(x,t)dt \\ &= ye^{x^2}\,. \end{aligned}$$

Alle Lösungen erfüllen damit die Gleichung

$$y(t)\exp\left((x(t))^2\right) = c\,.$$

Man wählt $x(t) = t$ und erhält $y(t) = ce^{-t^2}$. Die Kurve durch den Punkt $(0,2)$ erfüllt

$$2 = y(0)\,,$$

und daher ist $c = 2$ zu wählen. Dies liefert die Kurve

$$x(t) = t\,, \quad y(t) = 2e^{-t^2}\,.$$

Index

A

allgemeine Lösung 41
Anfangsbedingung 11, 24
Anfangswertproblem 24

D

Differentialgleichung 9
Differentialgleichungssystem 16
Dimension 20

E

exakt 56
explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung 20

G

getrennte Variable 25
gewöhnliche Differentialgleichung 20
gewöhnliche Differentialgleichungen 19

H

homogene lineare Differentialgleichung 35

I

implizite Differentialgleichung 20
inhomogene Differentialgleichung 37
Integrabilitäts-Kriterium 60
Integral 21
Integralkurve 21
Integration der Differentialgleichung 24
integrierende Faktoren 59
integrierender Faktor 60
Isoklinen 22

K

kritische Punkte 11

L

Lösung der Differentialgleichung 20
Lösungskurve 21
lineare Differentialgleichung 35
Linienelement 22
logistische Gleichung 11

N

notwendige Bedingung 57

O

Ordnung der Differentialgleichung 20

P

partielle Differentialgleichung 19
partikuläre Lösung 41
Phasenportrait 18

Q

Quadratur 49
Quadraturformeln 46

R

Räuber-Beute Modell 15
radioaktiver Zerfall 9
Riccatische Differentialgleichung 46
Richtungsfeld 17, 22

S

Stammfunktion der Differentialgleichung 56
Stammfunktion zu (P, Q) 56

T

total 56

V

Variation der Konstanten 37, 38

Volterra-Lotka 15, 16

W

Wachstumsrate 16

002 474 034 (10/16)

01334-4-01-S 1

Alle Rechte vorbehalten
© 2016 FernUniversität in Hagen
Fakultät für Mathematik und Informatik