Prof. Dr. Horst Herrlich, überarbeitet von Prof. Dr. Walter Tholen

Kurs 01354

Topologische Räume

LESEPROBE

Fakultät für
Mathematik und Informatik

FernUniversität in Hagen

Topologische Räume

Inhaltsverzeichnis

Studierhinweise zur Kurseinheit 1

Voraussetzungen zum Studium des Kurses

Der vorliegende Kurs Topologische Räume behandelt topologische Fragen im weitesten Sinne mit elementaren (mengentheoretischen) Hilfsmitteln.

Das für diesen Kurs benötigte technische Hilfswerkzeug (Umgang mit *Mengen, Relationen, Abbildungen, Kardinal- und Ordinalzahlen*) wird weitgehend durch den Kurs Naive Mengenlehre bereitgestellt. Die für eine über das formal-logische Verständnis hinausgehende Einsicht notwendige motivierende Analyse (insbesondere die Entwicklung der Begriffe *topologische* und *uniforme Struktur* aus dem anschaulich leicht zugänglichen, aber nur begrenzt brauchbaren *Abstands*-Begriff) wird durch den Kurs Metrische Räume (früherer Name: Einführung in die Topologie) bereitgestellt. Die Erarbeitung beider Kurse (die im folgenden mit NM und MR abgekürzt werden) ist *vor* einer Bearbeitung des vorliegenden Kurses dringend anzuraten. An einigen Stellen erweisen sich Kenntnisse über Kardinal- und Ordinalzahlen als nützlich, die in NM nicht bereitgestellt werden. Auf diese Stellen werden wir in den Studierhinweisen jeder Kurseinheit besonders aufmerksam machen. Sie können, ohne das Verständnis der Hauptergebnisse zu gefährden, vom Bearbeiter notfalls übergangen werden.

Allgemeine Studierempfehlungen

Versuchen Sie stets, neu eingeführte Begriffe nicht nur formal zu verstehen, sondern sich von ihnen eine möglichst klare (wenn immer möglich, anschaulich-geometrische) Vorstellung zu verschaffen. Sie können dieses am besten erreichen durch das Studium möglichst vieler konkreter Beispiele in dem Ihnen durch vorangegangene Kurse (z.B. Analysis) oder vorangegangene Teile dieses Kurses bereits vertraut gewordenen Rahmen. Scheuen Sie sich dabei nicht, möglichst viele Figuren zu malen. Der zweidimensionale Euklidische Raum $\underline{\mathbb{R}}^2$ – veranschaulicht durch das Zeichenblatt – ist eine unerschöpfliche Quelle von Einsichten und Veranschaulichungsmöglichkeiten.

Erliegen Sie nicht der Gefahr, nur rezeptiv zu sein. Versuchen Sie vielmehr, so kreativ wie möglich zu bleiben. Als erster Schritt hierzu sei die sorgfältige Bearbeitung aller Aufgaben empfohlen, als zweiter Schritt der Versuch, alle in diesem Kurs aufgestellten Sätze zunächst selbst zu beweisen. Für manche Aussagen ist das nicht schwer; denn die Beweisideen sollten aus der Analysis bereits bekannt sein. Für andere Aussagen wird es Ihnen vielleicht trotz erheblicher Anstrengung nicht gelingen, selbständig einen Beweis zu finden. Auch der vergebliche Versuch erweist sich jedoch in der Regel als nützlich. Sie werden den im Kurs gelieferten Beweis nämlich meist besser verstehen und sicher besser die Beweisidee behalten. Finden Sie Gefallen an dieser Methode, sollten Sie gelegentlich auch einen dritten oder gar vierten Schritt wagen: das Vermuten und Überprüfen neuer Sätze oder gar das selbständige Entwickeln neuer Begriffe.

Spezielle Hinweise zu § 1

Den Bearbeitern des vorliegenden Kurses sei aus den oben dargelegten Gründen dringend empfohlen, sich zunächst mit den Kursen NAIVE MENGENLEHRE und METRISCHE RÄUME vertraut zu machen. Insbesondere ist der sichere Umgang mit Durchschnitts- und Vereinigungsbildung von Mengensystemen zum Verständnis des §1 unbedingt notwendig. In diesem Paragraphen werden grundlegende Begriffe definiert und an Beispielen erläutert, deren Verständnis für den weiteren Verlauf des Kurses unentbehrlich ist. Wer seine Mengenlehre beherrscht, wird aber kaum auf unüberwindliche Schwierigkeiten stoßen.

Hingegen erfordern die Begriffe *Gewicht* (1.1.15), *Dichte* (1.2.30), die Sätze 1.1.17 und 1.2.33 und die Beispiele aus 1.4.6 (3) Kenntnisse über Kardinal- und Ordinalzahlen. Für Bearbeiter, denen die betreffenden Kenntnisse fehlen, stellen wir hier einige wichtige Fakten der *Kardinalzahltheorie* zusammen, die das Verständnis der genannten Abschnitte erleichtern werden:

Für zwei Mengen X, Y bedeutet $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$ genau, daß X und Y gleichmächtig sind, und $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$ ($\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$) heißt, daß X kleinere (oder gleiche) Mächtigkeit wie Y hat (vgl. NM 2.9). Spezielle Kardinalzahlen sind

$$\aleph_0 = \operatorname{card} \mathbb{N},$$
$$c = \operatorname{card} \mathcal{P}\mathbb{N} = 2^{\aleph_0},$$
$$\aleph_1 = \text{ kleinste überabzählbare Kardinalzahl},$$

also $\aleph_0 < \aleph_1 \leq c$. Die Aussage $\aleph_1 = c$ ist gerade der Inhalt der sogenannten *Kontinuumshypothese*, welche nicht aus den üblichen Axiomen der Mengenlehre geschlossen werden kann.

In den Definitionen Gewicht und Dichte benutzen wir auch, daß die Klasse der Kardinalzahlen *wohlgeordnet* ist, d.h. , daß jede nichtleere Klasse von Kardinalzahlen ein kleinstes Element besitzt.

Bearbeitern, denen die Theorie der metrischen Räume noch in guter Erinnerung ist, wird inbesondere der Abschnitt 1.2 sehr vertraut erscheinen. Im Gegensatz hierzu ist der in 1.3 entwickelte Umgang mit Mengensystemen, obwohl prinzipiell nicht schwierig, wohl den meisten Bearbeitern neu und sollte sorgfältig geübt werden, wozu u.a. die Beispiele in 1.4 reichlich Anlaß geben.

Literaturhinweise

Deutschsprachige Lehrbücher der Topologie:

P. Alexandroff, H. Hopf, Topologie, Berichtigter Reprint, Springer, Berlin, 1974

W. Franz, Topologie I, Walter de Gruyter, Berlin 1973.

K.P. Grotemeyer, Topologie, Bibliographisches Institut, Mannheim 1969.

K. Jänich, Topologie, Springer, Berlin 1990 (3. Auflage).

H.-J. Kowalsky, Topologische Räume, Birkhäuser, Basel 1961

S. Lipschutz, Allgemeine Topologie, Springer, Berlin 1972.

G. Preuss, Allgemeine Topologie, Springer, Berlin 1972

B. v. Querenburg, Mengentheoretische Topologie, Springer, Berlin 1973.

W. Rinow, Topologie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

H. Schubert, Topologie, Teubner, Stuttgart 1971.

Wichtige englischsprachige Lehrbücher der Topologie:

N. Bourbaki, General Topology I, II, Addison-Wesley, Reading 1966.

J. Dixmier, General Topology, Springer, Berlin 1984.

J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston 1966.

R. Engelking, General Topology, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin 1989.

I. M. James, Gernal Topology and Homotopy Theory, Springer, Berlin 1984.

J. L. Kelley, General Topology, van Nostrand, Princeton 1955.

J. Stillwell, Classical Topology and Combinatorial Group Theory, Springer, Berlin 1993 (2. Auflage).

S. Willard, General Topology, Addison-Wesley, Reading 1970.

Topologische Räume

Kurseinheit 1

Inhaltsverzeichnis

§ 1 Topologische Strukturen, Grundbegriffe und Beispiele

1.0 Einleitung

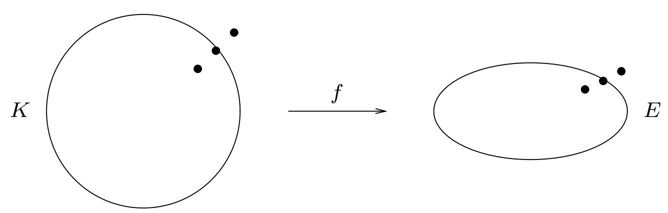
Was ist Topologie?

Eine Antwort auf diese Frage zu Anfang eines Kurses über Topologie muß notwendigerweise unvollständig und ungenau bleiben. Dennoch ist es hilfreich, sich Klarheit über die Ziele einer mathematischen Teildisziplin zu verschaffen zu suchen, bevor man beginnt, sie in der ganzen Strenge ihrer modernen axiomatischen Beschreibung zu studieren.

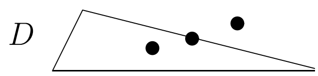
Das Wort Topologie hat die griechischen Bestandteile $\tau o\pi o\varsigma$ (Stellung, Lage) und $\lambda o\gamma o\varsigma$ (Wort, Lehre), die die Disziplin schon recht treffend beschreiben. In der Topologie befaßt man sich vornehmlich mit der relativen Lage gewisser (meist geometrischer) Objekte zueinander, nicht mit ihrer Länge, ihrem Volumen, u.s.w. Während man in der Geometrie zwei Objekte (z.B. Dreiecke) nur als "gleich" betrachtet, wenn sie durch eine sogenannte Bewegung (z.B. Drehung, Spiegelung) ineinander überführt werden können, so daß sich weder Abstände noch Winkel verändern, betrachtet man in der Topologie Eigenschaften, die sich invariant unter viel allgemeineren stetigen Verformungen verhalten. Mit anderen Worten, topologische Eigenschaften müssen bewahrt bleiben unter Streckung, Stauchung, Biegung und dergleichen, nicht aber unter unstetigen Prozessen wie reißen, abschneiden oder lochen. Die zulässigen stetigen Verformungen müssen zudem reversibel sein, d.h. es muß möglich sein, ein zulässig verformtes Objekt in zulässiger Weise in seinen Originalzustand zurückzuführen. Die folgenden einfachen Beispiele mögen diese Ideen erläutern.

1.0.1 Beispiel

Ein Kreis K kann durch simultane (horizontale) Streckung und (vertikale) Stauchung in eine Ellipse E wie unten abgebildet verformt werden, und die angewendete Verformung f läßt sich auch umkehren.



Für den Topologen sind K und E *homöomorph* (von griech. $o\mu o\iota o\varsigma$ = ähnlich und $\mu o\rho\varphi\epsilon\iota\nu$ = drehen, wenden), d.h. topologisch nicht unterscheidbar. Während Sie die Transformation f (unter Anwendung Ihrer Schulmathematik), nach Einführung eines Koordinatensystems und unter Vorgabe der Streckungs- und Stauchungsfaktoren) noch leicht beschreiben können und Sie deshalb diese Verformung als natürlich empfinden mögen, mutet das folgende Verfahren zumindest vom geometrischen Standpunkt schon recht brutal an. Nehmen Sie ein Modell von K, das aus weichem Draht gefertigt ist. Dann können Sie offenbar durch behutsames Biegen K in ein beliebiges Dreieck D (oder irgendein anderes Vieleck) verformen, und aus D können Sie K auf dieselbe Weise zurückgewinnen. K ist also auch homöomorph zu D!



Was kann der Nutzen sein, eine Theorie zu entwickeln, die nicht imstande ist, zwischen so unterschiedlichen Objekten wie Kreis und Dreieck zu unterscheiden? Eine befriedigende Antwort hierauf können letztlich nur die Resultate der Theorie geben, die wir in diesem Kurs darstellen wollen. Dennoch zeigt das Beispiel der Verformung von K zu E oder D, daß es wichtige Eigenschaften gibt, die sich unter der Verformung nicht ändern: Ein Punkt *auf* der Kreislinie K wird in einen Punkt *auf* dem Bildobjekt E (oder D) abgebildet, und ein Punkt *innerhalb* des Kreises K bleibt auch nach der Transformation *innerhalb* des Bildobjektes, und genauso für *außerhalb*. Die Frage der (qualitativen) Position eines Punktes relativ zum Kreis K ist also topologischer Natur und gehört deshalb in den Rahmen dieses Kurses. Hingegen ist z.B. die Frage des (quantitativen) Abstandes von einem Punkt zum Kreis K topologisch sinnlos, da der Abstand nicht invariant unter Streckung, Stauchung, Biegung, u.s.w. bleibt.

1.0.2 Beispiel

Im Hinblick auf Beispiel 1.0.1 wird es Sie verblüffen, daß sich Objekte, die sich anschaulich-geometrisch kaum unterscheiden lassen, leicht als topologisch verschieden nachweisen lassen. Betrachten wir etwa die drei Intervalle

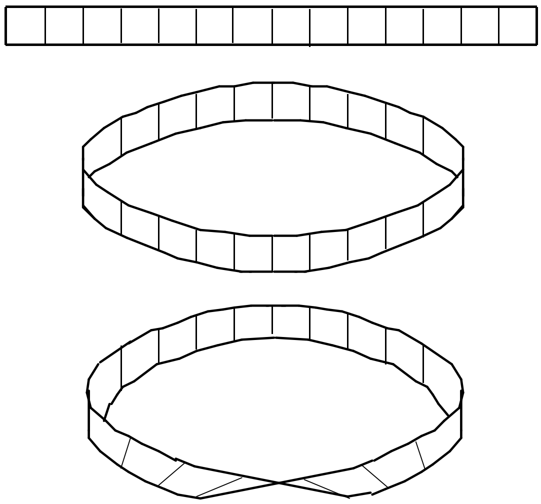
$$\begin{aligned}
]0,1[&= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}, \\
]0,1] &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}, \\
[0,1] &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\},
\end{aligned}$$

deren unterschiedliches Verhalten Sie als Analytiker sofort erkennen. Die ersten beiden Intervalle enthalten in $\mathbb{R}$ konvergente Folgen, ohne den Limespunkt zu enthalten (z.B. die Folge $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$). Hingegen enthält $[0,1]$ stets den Limes seiner in $\mathbb{R}$ konvergenten Folgen. Wie wir in KE 2 sehen werden, ist das Konvergenzverhalten von Folgen eine topologische Invariante und ermöglicht es in der Tat, $[0,1]$ als nichthomöomorph zu $]0,1]$ zu erkennen. Es gibt jedoch ein einfacheres Argument, das ohne Rückgriff auf die reelle Gerade $\mathbb{R}$ auskommt und zudem auch $]0,1[$ und $]0,1]$ als topologisch verschieden nachweist. Es beruht auf dem Begriff des Zusammenhangs, der offenbar eine topologische Invariante ist (denn zusammenhängende Objekte bleiben zusammenhängend unter Strecken, Stauchen, Biegen u.s.w.; es ist nicht erlaubt zu reißen oder schneiden!). Nennen wir einen Punkt x eines Objektes X *Schnittpunkt*, falls $X \setminus \{x\}$ *nicht* zusammenhängend ist (vgl. MR 5.1.23). Offenbar ist jeder Punkt von $]0,1[$ ein Schnittpunkt. Mit anderen Worten, $]0,1[$ hat keinen Nichtschnittpunkt, wohingegen $]0,1]$ genau einen und $[0,1]$ genau zwei Nichtschnittpunkte hat. Auf ähnliche Weise sieht man auch, daß keines der drei Intervalle homöomorph zur Kreislinie K (oder zu E oder D) ist: Jeder Punkt von K ist Nichtschnittpunkt!

In der Untersuchung topologischer Eigenschaften spielen Konstruktionsprinzipien, die es einem erlauben, aus möglichst einfachen Bausteinen topologisch kompliziertere Gebilde zu schaffen, eine wichtige Rolle. Unser drittes einführendes Beispiel gibt hierzu einen ersten Einblick. Die Fragen, die es aufwirft, gehen zum Teil sogar über diesen Kurs hinaus und können befriedigend nur mit den Hilfsmitteln der sogenannten Algebraischen Topologie beantwortet werden.

1.0.3 Beispiel

Wir wollen hier wiederum drei geometrische Gebilde miteinander vergleichen, und dazu ist es am besten, wenn Sie sich Modelle hiervon herstellen, wie folgt: Schneiden Sie sich drei schmale Papierstreifen (gleicher Länge und Breite). Den ersten (rechteckigen) Streifen R belassen Sie so, wie er ist. Den zweiten kleben Sie an den kurzen Enden zusammen und erhalten einen (dünnen!) Armreif A. Den dritten kleben Sie ebenfalls an den kurzen Enden zusammen, aber erst nach vorheriger $180°$-Drehung und nennen das so erhaltene Gebilde M.
Es ist nicht verwunderlich, daß uns der Klebeprozeß, der von R zu A führt, ein zu R nichthomöomorphes Objekt liefert, denn Kleben ist genauso wie Schneiden oder Reißen ein Prozeß, der topologische Eigenschaften zerstören kann. Wir sehen hier zum Beispiel, daß der Rand von R zusammenhängend ist, während der Rand von A in zwei disjunkte Kreislinien zerfällt. M hingegen hat nur eine (zusam-

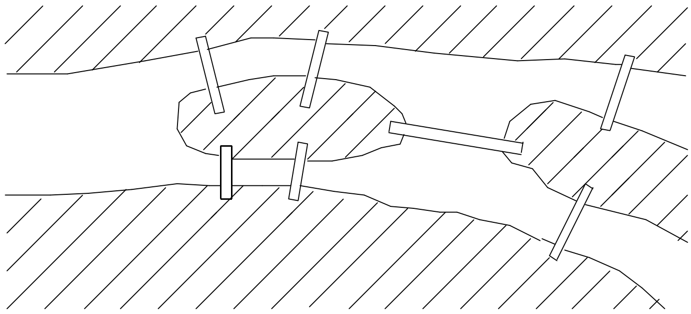


menhängende) Randlinie. (Fahren Sie mit einem Bleistift entlang des Randes!) R ist also nicht homöomorph zu A, und A ist nicht homöomorph zu M.
Das Gebilde M erschien wohl erstmals im mathematischen Kontext 1858 in unveröffentlichten Arbeiten der beiden deutschen Mathematiker Joseph Listing (1808-1882) und A. F. Möbius (1790-1868) und ist allgemein unter dem Namen *Möbiusband* bekannt. Es hat nicht nur eine einzige Randlinie, sondern auch nur eine einzige Fläche. (Fahren Sie nochmals mit dem Bleistift einer gedachten Mittellinie entlang! Wenn Sie noch ein bißchen mehr mit Ihrem Modell M "spielen" wollen, dann zerschneiden Sie M entlang der gedachten Mittellinie – das Ergebnis wird Sie überraschen!)

Beispiel 1.0.3 soll Ihnen nicht nur verdeutlichen, wie einfache Konstruktionsprinzipien zu neuen interessanten Objekten führen, sondern Ihnen auch die Grenzen und Gefahren einer rein heuristischen (d.h. wortreichen und plausibel klingenden) Argumentationsweise aufzeigen. Haben wir nicht A und M beide auf sehr ähnliche Weise aus R konstruiert, mit dem einzigen Unterschied, daß wir bei M vor dem Kleben noch eine Drehung ausgeführt haben, die wir doch zuvor als topologische Invariante identifiziert hatten? Wie ist es dann möglich, daß die Resultate so verschieden sind? Um hierauf befriedigende Antworten zu geben, benötigt man exakte Grundlagen und Definitionen. Anschauliche Beispiele helfen, Ideen für eine exakte Theorie zu entwickeln, aber entbinden uns nicht von der Notwendigkeit, diese Ideen mit mathematischer Präzision darzustellen und zu verifizieren. Andernfalls kommt es im allgemeinen recht schnell zu Fehlschlüssen.

1.0.4 Historische Anmerkungen

Bevor wir uns auf den (anfangs mühevollen!) Weg der exakten Einführung der notwendigen Begriffe begeben, sind wohl noch einige historische Anmerkungen angebracht, auch weil sie uns weiter Aufschluß zur Frage "Was ist Topologie" geben. Vielleicht läßt sich der Ursprung der Topologie in das Jahr 1676 legen, als *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716), den man zusammen mit *Isaac Newton* (1642-1727) als Begründer der Differentialrechnung ansieht, zum ersten Mal den Begriff "Geometria situs" (= Geometrie der Lage) benutzte, um die Wichtigkeit von qualitativer Lage im Gegensatz zu quantitativer Größe zu betonen. Der große Mathematiker *Carl Friedrich Gauß* (1777-1855) sagte 1833 der "Geometria situs", im neunzehnten Jahrhundert eher als "Analysis situs" bekannt, eine wichtige Zukunft voraus. Fast hundert Jahre früher hatte der Schweizer Mathematiker *Leonhard Euler* (1707-1783), zu der Zeit in Königsberg tätig, eine erste Anwendung topologischer Denkweise gegeben. Er stellte den Sonntagsspaziergängern der Stadt das Problem, ob es möglich ist, alle sieben Brücken über den Pregel in Königsberg in einem Spaziergang ohne Wiederholung zu überqueren. Der Fluß teilt sich in den Alten und den Neuen Pregel, und die Brücken verbinden auch eine Flußinsel mit den Ufern, wie folgt.



Euler bewies eine allgemeine, vom französischen Mathematiker *René Descartes* (1596-1650) vermutete graphentheoretische Formel, die insbesondere eine negative Antwort auf sein berühmtes *"Königsberger Brückenproblem"* beinhaltet.

Der Begriff "Topologie" wurde wohl erstmals vom zuvor erwähnten *Joseph Listing* benutzt, der 1847 ein Lehrbuch über Knoten und Flächen mit dem Titel "Vorstudien zur Topologie" veröffentlichte, das jedoch wenig Wiederhall fand. Unvergleichlich wichtiger für die spätere Entwicklung der Topologie war das Werk *Bernhard Riemanns* (1826-1866), dessen geometrische und analytische Studien von Flächen und Mannigfaltigkeiten einen bis heute wirksamen Einfluß auf viele Gebiete der Mathematik ausübten. Mengentheoretisch begründete Topologie, wie wir sie in diesem Kurs kennenlernen, geht in ihrem Ursprung fast notwendigerweise auf den Begründer der Mengenlehre, *Georg Cantor* (1845-1918), zurück, der sich vor allem mit Eigenschaften der reellen Geraden $\mathbb{R}$ und ihrer Unterräume beschäftigte. Im Jahre 1906 machte dann der französische Mathematiker *Maurice Fréchet* (1878-1973) einen wichtigen Schritt in Richtung allgemeiner topologischer Räume.

Die "Punkte" seiner abstrakten (metrischen) Räume mußten nicht mehr Punkte gewöhnlicher geometrischer Objekte sein, sondern waren einfach Elemente strukturierter Mengen. Fréchet konzentrierte sich jedoch auf den Begriff der Folgenkonvergenz, der sich zwar als topologische Invariante erweist, aber nicht stark genug ist, topologische Räume allgemein zu beschreiben. Der entscheidende Schritt zur abstrakten Topologie blieb *Felix Hausdorff* (1868-1942) überlassen, der Ideen von *David Hilbert* (1862-1943) und *Hermann Weyl* (1885-1955) aufgriff und dessen 1914 erstmals erschienenes Lehrbuch "Grundzüge der Mengenlehre" die mengentheoretische Topologie als mathematisches Teilgebiet klar absteckte und nachhaltigen Einfluß auf die Mathematik des 20. Jahrhunderts ausübte. Auf Hausdorff, der unter dem Pseudonym Paul Mongré auch als Philosoph, Dichter und Stückeschreiber tätig war und der 1942 den Freitod wählte, um der Verschleppung in ein Konzentrationslager zu entgehen, gehen die Begriffe des inneren Punktes einer Menge und der Umgebung eines Punktes zurück. Der polnische Mathematiker *Kazimierz Kuratowski* (1896-1980) entwickelte dann 1922 die Begriffe des Berührpunkts einer Menge, des offenen Kerns und der abgeschlossenen Hülle einer Menge, die sich wie Hausdorffs Begriffe alle zur axiomatischen Beschreibung topologischer Räume eignen. Dieses werden wir schon in dieser Kurseinheit zeigen. Unser Ziel ist es dann, Sie mit den wichtigsten der vielen weiteren Entwicklungen und Resultate der mengentheoretischen Topologie vertraut zu machen. Die Untersuchung topologischer Probleme mit analytischen, kombinatorischen oder algebraischen Hilfsmitteln (*Algebraische Topologie*) sowie die Untersuchung von Mengen, die gleichzeitig mit topologischen und algebraischen Strukturen versehen sind (*Topologische Algebra*), bleiben anderen Kursen vorbehalten. Studierenden, die an weiteren historischen Hinweisen interessiert sind, wird besonders das auch im übrigen nützliche Buch "General Topology" von R. Engelking (Heldermann Verlag Berlin, 1989) als Ergänzungslektüre empfohlen.

1.0.5 Aufbau des Kurses

In den 8 Paragraphen des Kurses Topologische Räume werden topologische Strukturen untersucht. Die wesentlichen Werkzeuge zur Untersuchung eines festen topologischen Raumes werden in § 1 und § 2 geschmiedet, die notwendigen Werkzeuge zum Vergleich mehrerer topologischer Räume in § 3. Verfahren zur Konstruktion neuer topologischer Räume werden in §4 entwickelt. In den folgenden 3 Paragraphen werden die wichtigsten Eigenschaften topologischer Räume (Trennungseigenschaften in § 5, Zusammenhangseigenschaften in § 6, Kompaktheitseigenschaften in § 7) untersucht. In § 8 werden Konstruktionsverfahren entwickelt, die es gestatten, topologische Räume durch solche mit "besseren" Eigenschaften in geeigneter Weise zu approximieren.

1.0.6 Übersicht zum ersten Paragraphen

Im vorliegenden ersten Paragraphen werden wesentliche Werkzeuge zur Untersuchung eines topologischen Raumes bereitgestellt. Abschnitt 1.1 enthält die notwendigen Grundbegriffe sowie einige wichtige Beispiele. Die in 1.2 entwickelten Hilfsmittel sind aus der Theorie metrischer Räume weitgehend vertraut. Neu ist hingegen die in 1.3 begonnene Untersuchung von Mengensystemen, d.h. von Mengen von Teilmengen einer festen Menge X. Dieses zur Untersuchung topologischer Räume äußerst wichtige und zur Untersuchung von Überdeckungsräumen unentbehrliche Werkzeug wurde in MR – mit Ausnahme des Beweises des wichtigen Charakterisierungssatzes des Cantorschen Diskontinuums MR 5.3.4 – nicht benötigt, da die Struktur eines metrischen Raumes in der Regel mit einfacheren Hilfsmitteln analysierbar ist. Als besonders nützlich erweisen sich geeignete *Überdeckungen* von X und geeignete *Filter* auf X. Letztere nehmen eine so wichtige Stellung insbesondere im Zusammenhang mit dem Konvergenzproblem ein (Folgen erweisen sich, wie bereits in MR angedeutet, in topologischen Räumen als unzulängliche Hilfsmittel), daß wir sie in § 2 gesondert untersuchen werden. Die Beispiele in 1.4 sollen durch Bereitstellung einiger interessanter, nicht metrisierbarer topologischer Räume helfen, das von den metrischen (bzw. metrisierbaren topologischen) Räumen her bekannte Bild zu ergänzen und zu bereichern.

1.1 Topologien auf einer Menge

Der Begriff der Topologie auf einer Menge beruht auf einer axiomatischen Beschreibung des Verhaltens sogenannter offener Teilmengen gegenüber gewissen mengentheoretischen Operationen.

1.1.1 Definition

Sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X heißt *Topologie* auf X, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(T1) $X \in \mathcal{T}$ und $\emptyset \in \mathcal{T}$.

(T2) Aus $A \in \mathcal{T}$ und $B \in \mathcal{T}$ folgt $A \cap B \in \mathcal{T}$.

(T3) Aus $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ folgt $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, so heißt das Paar $\underline{X} = (X, \mathcal{T})$ ein *topologischer Raum*. X heißt die *Trägermenge* von $\underline{X}$. Die Elemente von X heißen *Punkte* in $\underline{X}$. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offen* in $\underline{X}$.
Mit der Vorgabe des Mengensystems $\mathcal{T}$ haben wir also insbesondere festgelegt, welche Teilmengen $A \subset X$ offen (bzgl. der Topologie $\mathcal{T}$) genannt werden sollen, nämlich genau diejenigen A mit $A \in \mathcal{T}$. (T1) gibt dann eine Minimalbedingung für $\mathcal{T}$: Wenigstens die ganze Menge X und die leere Menge seien offen. Ferner, mit je zwei offenen Teilmengen sei auch ihr Durchschnitt offen (T2), und für jedes beliebige System $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ offener Teilmengen von X sei auch ihre Vereinigung $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ offen (T3). Der Fall $\mathcal{A} = \emptyset$ zeigt übrigens, daß (T3) schon den zweiten Teil von (T1) impliziert.

1.1.2 Beispiele

(1) Ist X eine Menge, so ist $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X. Bezüglich dieser Topologie sind also nur $\emptyset$ und X offen. Sie heißt die *indiskrete Topologie* auf X. Der zugehörige topologische Raum $(X, \mathcal{T}_0)$ heißt *indiskreter topologischer Raum* mit Trägermenge X.
(2) Ist X eine Menge, so ist die Menge $\mathcal{P}X$ aller Teilmengen von X eine Topologie auf X. Bezüglich dieser Topologie ist also jede Teilmenge von X offen. Sie heißt die *diskrete Topologie* auf X. Der zugehörige topologische Raum $(X, \mathcal{P}X)$ heißt *diskreter topologischer Raum* mit Trägermenge X.
(3) Auf $X = \{0, 1\}$ gibt es genau 4 Topologien:

$$\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, X\}$$
$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{0\}\},$$

$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}\},$$
$$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1\}\} = \mathcal{P}X.$$

Der topologische Raum $(X, \mathcal{T}_1)$ heißt *Sierpinski-Raum* und wird mit $\underline{\mathbb{S}}$ bezeichnet. Der diskrete Raum $(X, \mathcal{T}_3)$ wird mit $\underline{\mathbb{D}_2}$ bezeichnet.

L Verifizieren Sie diese einfachen Aussagen bitte selbst!

Wir bemerken zu (3), daß die Anzahl aller Topologien auf einer festen n-elementigen Menge ($n \geq 0$ endlich) erstaunlich groß ist.

n	Anzahl aller Topologien
0	1
1	1
2	4
3	29
4	355
5	6 942
6	209 527
7	9 535 341
8	642 779 354
9	63 260 289 423

(Eine Bestätigung dieser Angaben würde über den Rahmen dieses Kurses hinausgehen. Interessierte Leser seien auf M. Erné, Manuscripta Mathematica <u>11</u> (1974) 221-259, verwiesen.) Auf einer unendlichen Trägermenge X gibt es übrigens genausoviele Topologien wie es Teilmengen der Potenzmenge $\mathcal{P}X$ gibt.
Wichtiger (und Ihnen aus dem Kurs MR auch besser vertraut) sind Topologien, die durch eine *Metrik* d auf einer Menge X induziert werden, d.h. durch eine Abbildung $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{array}{lrcl} \text{(M1)} & d(x,y) & = & 0 \iff x = y, \\ \text{(M2)} & d(x,y) & = & d(y,x), \\ \text{(M3)} & d(x,y) & \leq & d(x,z) + d(z,y) \end{array}$$

für alle $x, y, z \in X$. Bekanntlich nennt man dann eine Teilmenge $A \subset X$ *offen bzgl.* d, falls es zu jedem $x \in A$ eine reelle Zahl $r > 0$ gibt mit

$$S(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\} \subset A.$$

(vgl. MR 1.1.10, 1.2.20). Es gilt dann:

1.1.3 Satz und Definition

(1) *Ist d eine Metrik auf einer Menge X, so ist die Menge $\mathcal{T}_d$ der bzgl. d offenen Teilmengen von X eine Topologie auf X.* Sie heißt *die durch d induzierte Topologie auf X.*
(2) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *metrisierbar*, falls es eine Metrik d auf X gibt mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.
(3) *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ mit endlicher Trägermenge X ist genau dann metrisierbar, wenn $\mathcal{T}$ die diskrete Topologie auf X ist.*
(4) Zwei Metriken d_1 und d_2 auf derselben Menge X heißen *topologisch äquivalent* falls $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$ gilt.

L

Beweis: (1) Führen Sie den Nachweis, daß $\mathcal{T}_d$ die Eigenschaften (T1) - (T3) erfüllt, bitte selbständig durch (ohne MR 1.2.21 zu konsultieren) . Es wird Sie vielleicht verwundern, daß dabei die Eigenschaften (M1) - (M3) überhaupt nicht benutzt werden müssen. Das zeigt Ihnen, wie allgemein der Begriff der Topologie ist!
(3) Nehmen wir zunächst an, daß der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ mit endlichem X diskret ist, so daß also $\mathcal{T} = \mathcal{P}X$ ist. Dann zeigt man leicht, daß die *diskrete Metrik* d_D auf X mit

$$d_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

(siehe MR 1.1.2(1)) die Eigenschaft hat, daß jede Teilmenge von X offen bzgl. d_D ist, daß also $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{d_D}$ ist.
Umgekehrt müssen wir zeigen, daß unter der Voraussetzung, daß es irgendeine Metrik d mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ gibt, notwendig $\mathcal{T} = \mathcal{P}X$ gilt. Weil sich jede Teilmenge $A \subset X$ als $A = \bigcup\{\{x\} \mid x \in A\}$ schreiben läßt, genügt es wegen (T3) zu zeigen, daß $\{x\}$ offen bzgl. d ist für jedes $x \in X$. Das aber ist klar im Falle, daß $X = \{x, \ldots, x_n\}$ endlich ist: Man betrachte

$$r = \min\,\{d(x_i, x_j) \mid i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq n\};$$

dann ist $r > 0$ (wegen M1) und $S(x, r) \subset \{x\}$ für jedes $x \in X$.
Wir bemerken zu (4), daß diese Definition im Einklang mit MR 2.2.6 steht.

1.1.4 Beispiel

Jede Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ kann mit der *kanonischen* oder *natürlichen Topologie* versehen werden, indem man auf X zunächst die *Euklidische Metrik* d_E mit

$$d_E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

für $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in X$ und dann die induzierte Topologie $\mathcal{T}_{d_E}$ betrachtet. Anstelle der Euklidischen Metrik d_E kann man natürlich auch die *Maximummetrik* d_M oder die *Summenmetrik* d_S verwenden, mit

$$\begin{aligned} d_M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= max\{|x_i - y_i| \;\Big|\; i = 1, \ldots, n\}, \\ d_S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \end{aligned}$$

da diese zu d_E topologisch äquivalent sind, d.h. $\mathcal{T}_{d_E} = \mathcal{T}_{d_M} = \mathcal{T}_{d_S}$. Letzteres leitet man aus den Ungleichungen

$$\tfrac{1}{n} d_S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d_M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d_E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d_S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

leicht ab (vgl. MR 2.2.9(2)).
$X \subset \mathbb{R}^n$ versehen mit der natürlichen Topologie $\mathcal{T}_{d_E}$ wird kurz mit $\underline{X}$ bezeichnet. Damit haben wir insbesondere die topologischen Räume $\underline{\mathbb{R}^n}$, $\underline{\mathbb{R}}$, $\underline{\mathbb{I}} = \underline{[0,1]}$, $\underline{\mathbb{N}} = \{1, 2, \ldots\}$, $\underline{\mathbb{N}_0} = \underline{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ und $\underline{\mathbb{Q}}$ eingeführt.

Als nächstes wollen wir uns mit dem Vergleich und der Erzeugung von Topologien auf einer gegebenen Menge X befassen.

1.1.5 Definition

Die Menge aller Topologien auf einer festen Menge X wird durch die Inklusion geordnet. Sind $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X, so heißt $\mathcal{T}_1$ *kleiner* (oder *gröber*) als $\mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}_2$ *größer* (oder *feiner*) als $\mathcal{T}_1$, genau dann, wenn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ gilt.

1.1.6 Satz und Definition

Zu jeder Teilmenge $\mathcal{A}$ von $\mathcal{P}X$ existiert eine kleinste $\mathcal{A}$ umfassende Topologie auf X. Diese Topologie wird die *von $\mathcal{A}$ erzeugte Topologie von X* genannt.

Beweis: Wir wollen die beliebige Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}X$ in minimaler Weise so vergrößern, daß die Bedingungen (T1) - (T3) erfüllt sind, und gehen dazu in drei Schritten vor. Sei also

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &:= \mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}, \\ \mathcal{A}'' &:= \{B_1 \cap \ldots \cap B_n \mid n \in \mathbb{N},\ B_i \in \mathcal{A}'\ (i = 1, \ldots, n)\}, \\ \mathcal{A}''' &:= \{\bigcup \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A}''\}. \end{aligned}$$

Wir behaupten, daß $\mathcal{A}'''$ die kleinste $\mathcal{A}$ umfassende Topologie von X ist.
Erstens umfaßt $\mathcal{A}'''$ die Menge $\mathcal{A}$, denn $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'''$.

Zweitens ist $\mathcal{A}'''$ tatsächlich eine Topologie auf X : Wegen $\emptyset, X \in \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}'''$ gilt (T1). Zum Nachweis von (T2) betrachte man $B = \bigcup \mathcal{B}$ und $C = \bigcup \mathcal{C}$ mit $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \mathcal{A}''$. Dann ist

$$\begin{aligned} B \cap C &= \bigcup \mathcal{B} \cap \bigcup \mathcal{C} \\ &= \bigcup \{\tilde{B} \cap \tilde{C} \mid \tilde{B} \in \mathcal{B} \text{ und } \tilde{C} \in \mathcal{C}\}. \end{aligned}$$

Da aber für jedes $\tilde{B} \in \mathcal{A}''$ und $\tilde{C} \in \mathcal{A}''$ auch $\tilde{B} \cap \tilde{C} \in \mathcal{A}''$ ist, gilt $\{\tilde{B} \cap \tilde{C} \mid \tilde{B} \in \mathcal{B}$ und $\tilde{C} \in \mathcal{C}\} \subset \mathcal{A}''$ und somit $B \cap C \in \mathcal{A}'''$. Für (T3) betrachten wir eine beliebige Teilmenge $\{B_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{A}'''$. Jedes B_i ist von der Form $B_i = \bigcup \mathcal{B}_i$ mit $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{A}''$. Dann ist auch $\bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{B}_i \subset \mathcal{A}''$, und man hat

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} B_i &= \bigcup \; \{\bigcup \mathcal{B}_i \mid i \in I\} \\ &= \bigcup \; (\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i) \in \mathcal{A}'''. \end{aligned}$$

Drittens ist $\mathcal{A}'''$ kleiner als jede andere Topologie $\mathcal{T}$ auf X, die $\mathcal{A}$ umfaßt. Denn aus $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ folgt $\mathcal{A}' \subset \mathcal{T}$, weil $\mathcal{T}$ die Bedingung (T1) erfüllt, und dann $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{T}$, weil (T2) für $\mathcal{T}$ gilt, und schließlich $\mathcal{A}''' \subset \mathcal{T}$, weil $\mathcal{T}$ auch (T3) erfüllt. $\square$

1.1.7 Aufgabe

L (1) Bestimmen Sie die von $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ erzeugte Topologie auf der Menge $X = \{a, b, c, d\}$.

(2) Sei X eine Menge. Zeigen Sie, daß die von $\mathcal{A} = \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}$ die Form $\mathcal{T} = \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$ hat. Man nennt $\mathcal{T}$ die *coendliche Topologie auf* X. ($X \setminus A$ bezeichnet das Komplement von A in X.)

1.1.8 Definition

Seien $\underline{X} = (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{A}$ eine Teilmenge von $\mathcal{T}$. Dann heißt $\mathcal{A}$

- eine *Subbasis* von $\mathcal{T}$ (oder von $\underline{X}$), wenn $\mathcal{T}$ die kleinste $\mathcal{A}$ umfassende Topologie auf X ist,

- eine *Basis* von $\mathcal{T}$ (oder von $\underline{X}$), wenn $\mathcal{T}$ die Menge aller Vereinigungen von Teilmengen von $\mathcal{A}$ ist, d.h.

$$\mathcal{T} = \{\bigcup \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\}.$$

1.1.9 Bemerkung

Offensichtlich ist jede Basis von $\mathcal{T}$ auch eine Subbasis von $\mathcal{T}$, denn mit den Bezeichnungen des Beweises von 1.1.6 gilt ja für jede Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$

$$\{\bigcup \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\} \subset \{\bigcup \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A}''\} = \mathcal{A}''' \subset \mathcal{T}.$$

Insbesondere ist $\mathcal{T}$ eine Basis von sich selbst. Im allgemeinen ist man jedoch daran interessiert, möglichst kleine Basen oder Subbasen einer gegebenen Topologie zu finden. Das folgende einfache Kriterium ist hierbei hilfreich.

1.1.10 Satz

Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{A}$ eine Teilmenge von $\mathcal{T}$. Dann gilt:

(1) *$\mathcal{A}$ ist genau dann eine Basis von $\mathcal{T}$, wenn zu jedem $B \in \mathcal{T}$ und jedem $x \in B$ ein $A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A \subset B$ existiert.*

(2) *$\mathcal{A}$ ist genau dann eine Subbasis von $\mathcal{T}$, wenn zu jedem $B \in \mathcal{T}$ mit $B \neq X$ und jedem $x \in B$ eine endliche Teilmenge $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ mit $x \in \bigcap \mathcal{B} \subset B$ existiert.*

Beweis: (1) Sei $\mathcal{T} = \{\bigcup \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\}$ und betrachte $x \in B \in \mathcal{T}$. Weil dann B von der Form $B = \bigcup \mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ ist, muß also ein $A \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ mit $x \in A$ existieren. Umgekehrt, falls es zu $B \in \mathcal{T}$ und jedem $x \in B$ ein $A_x \in \mathcal{A}$ mit $A_x \subset B$ gibt, dann gilt $B = \bigcup \{A_x \mid x \in B\}$ und somit $\mathcal{T} \subset \{\bigcup \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\}$. Da stets " $\supset$ " gilt (siehe 1.1.9), folgt, daß $\mathcal{A}$ Basis von $\mathcal{T}$ ist.
(2) Falls $\mathcal{A}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist, so ist $\mathcal{A}''$ nach der in 1.1.6 gegebenen Konstruktion eine Basis von $\mathcal{T}$. Zu gegebenem $B \in \mathcal{T}, B \neq X$, und $x \in B$ gibt es folglich nach (1) ein $A \in \mathcal{A}''$ mit $x \in A \subset B$. Weil insbesondere $\emptyset \neq A \neq X$ ist, muß A nach Definition von $\mathcal{A}''$ von der Form $A = \bigcap \mathcal{B}$ sein mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ endlich. Umgekehrt folgt aus dem angegebenen Kriterium sofort, daß zu jedem $B \in \mathcal{T}$ und $x \in B$ ein $A \in \mathcal{A}''$ mit $x \in A \subset B$ existiert (auch im Falle $B = X$!), und das bedeutet nach (1) gerade, daß $\mathcal{A}''$ eine Basis und somit $\mathcal{A}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist. □

1.1.11 Beispiel

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist die Menge $\{S(x, r) \mid x \in X \text{ und } r > 0\}$ aller offenen Kugeln eine Basis von $\mathcal{T}_d$. Es gilt sogar, daß $\{S(x, \frac{1}{n}) \mid x \in X \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$
L eine Basis von $\mathcal{T}_d$ ist. Verifizieren Sie diese Aussage bitte selbst.

1.1.12 Aufgabe

L Zeigen Sie für jede Menge X:

(1) $\{X\}$ ist eine Basis der indiskreten Topologie auf X.

(2) $\{\{x\} \mid x \in X\}$ ist eine Basis der diskreten Topologie auf X.

(3) $\{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ ist eine Subbasis der coendlichen Topologie auf X (vgl. 1.1.7), aber außer im Falle card $X = 0$ oder 2 keine Basis.

Nach Satz 1.1.6 ist jede Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}X$ Subbasis einer Topologie auf X, nämlich notwendigerweise der von ihr erzeugten Topologie auf X. Wie können wir entscheiden, ob $\mathcal{A}$ eine Basis einer geeigneten Topologie ist, ohne diese Topologie schon im voraus zu kennen? Hierauf gibt Antwort der

1.1.13 Satz *(Basischarakterisierung)*

Eine Teilmenge $\mathcal{A}$ von $\mathcal{P}X$ ist genau dann Basis einer geeigneten Topologie auf X, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(B1) *Zu jedem $x \in X$ existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A$.*

(B2) *Zu beliebigen Elementen B und C von $\mathcal{A}$ und beliebigem $x \in B \cap C$ existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A \subset B \cap C$.*

Beweis: $\mathcal{A}$ ist genau dann Basis einer Topologie auf X, wenn die Menge $\mathcal{T} := \{\bigcup \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\}$ eine Topologie auf X ist, d.h. die Bedingungen (T1)-(T3) erfüllt. Nun gilt (T3) aber stets für $\mathcal{T}$ (das zeigt man genauso wie im Beweis von 1.1.6), und auch $\emptyset \in \mathcal{T}$ gilt wegen $\emptyset = \bigcup \emptyset$ und $\emptyset \subset \mathcal{A}$ stets. Also ist $\mathcal{A}$ Basis einer Topologie auf X genau dann, wenn $X \in \mathcal{T}$ gilt und wenn $\mathcal{T}$ die Bedingung (T2) erfüllt. Unter Benutzung der Definition von $\mathcal{T}$ sieht man nun sofort, daß (B1) äquivalent zu $X \in \mathcal{T}$ ist und daß (B2) äquivalent zu (T2) ist (vgl. hierzu wieder den entsprechenden Beweis zu 1.1.6).

1.1.14 Bemerkung

Die "Größe" eines topologischen Raumes $\underline{X} = (X, \mathcal{T})$ kann in mannigfacher Weise gemessen werden. Ein naheliegendes Maß ist die *Kardinalzahl* card X von X. Da dieses Maß zwar etwas über die Trägermenge, jedoch nichts über die Topologie von X aussagt, erweist es sich von nur geringem Wert. Andere Maße erweisen sich, wie wir sehen werden, als erheblich brauchbarer. Das wichtigste ist folgendes:

1.1.15 Definition

Das *Gewicht* $\omega\underline{X}$ eines topologischen Raumes $\underline{X}$ ist die kleinste Kardinalzahl einer Basis von $\underline{X}$, also $\omega\underline{X} = \min\{\text{card}\,\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ Basis von } \underline{X}\}$. Der griechische Buchstabe ω = Omega soll an engl. *weight* = Gewicht erinnern. Ein topologischer Raum $\underline{X}$ erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, wenn er eine höchstens abzählbare Basis besitzt, d.h. wenn $\omega\underline{X} \leq \aleph_0$ gilt.

(Das *erste Abzählbarkeitsaxiom* werden wir später in 1.2.14 als eine "Lokalisierung" des *zweiten* kennenlernen. Es ist von geringerer Bedeutung.)

1.1.16 Beispiele

(1) Für $\underline{X}$ indiskret ist $\omega\underline{X} = 1$. Denn für jede Basis $\mathcal{A}$ von $\underline{X}$ folgt aus 1.1.10(1) $X \in \mathcal{A}$, d.h. $\{X\}$ ist die kleinste Basis von $\underline{X}$ (vgl. 1.1.12(1)).

(2) Für $\underline{X}$ diskret ist $\omega\underline{X} = \text{card}\ X$. Denn für jede Basis $\mathcal{B}$ von $\underline{X}$ und alle $x \in X$ folgt mit 1.1.10(1) $\{x\} \in \mathcal{A}$, d.h. $\{\{x\} \mid x \in X\}$ ist die kleinste Basis von $\underline{X}$ (vgl. 1.1.12(2)).

(3) Ist $\mathcal{T}$ die coendliche Topologie auf X, so gilt $\omega(X,\mathcal{T}) = \text{card}\ X$. Denn für endliches X ist $(X,\mathcal{T})$ diskret, und die Aussage folgt aus (2).
Für unendliches X hat man

$$\text{card}\ \mathcal{T} = \text{card}\ (\{E \subset X \mid E \text{ endlich}\} \cup \{X\}) = \text{card}\ X,$$

also $\omega(X,\mathcal{T}) \leq \text{card}\ X$ (weil $\mathcal{T}$ Basis von sich selbst ist).
Für eine beliebige Basis $\mathcal{A}$ von $\mathcal{T}$ und für jedes $x \in X$ existiert ein $A_x \in \mathcal{A}$ mit $\emptyset \neq A_x \subset X \setminus \{x\}$, also $x \in X \setminus A_x$ mit $X \setminus A_x$ endlich. Die Abbildung $f : X \longrightarrow \mathcal{A}$ mit $f(x) = A_x$ hat die Eigenschaft, daß für alle $A \in \mathcal{A}$ das Urbild $f^{-1}[A] = \{x \in X \mid A_x = A\}$ endlich ist (denn $\{x \in X \mid A_x = A\} \subset X \setminus A$). Weil $X = \bigcup\{f^{-1}[A] \mid A \in \mathcal{A}\}$ unendlich ist, ist auch $\mathcal{A}$ unendlich, und es folgt card $X \leq \text{card}\ \mathcal{A}$ (vgl. NM 5.5.16(2)). Damit ist card $X \leq \omega(X,\mathcal{T})$ gezeigt.
Beispiel (1) zeigt, daß topologische Räume, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, beliebig große Trägermengen haben können. Ein "hinreichend anständiger" topologischer Raum, der dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, kann hingegen nicht allzu groß sein. Darauf weisen bereits die folgenden drei Sätze für metrisierbare topologische Räume hin. Wiederholen Sie zunächst, daß eine Teilmenge D eines metrischen Raumes (X,d) *dicht* ist, falls zu jedem $x \in X$ und jedem $r > 0$ ein $y \in D$ mit $d(x,y) < r$ existiert (vgl. MR 3.2.1).

1.1.17 Satz

Sind (X,d) ein metrischer Raum und k eine Kardinalzahl, so sind äquivalent:

(1) $\omega(X,\mathcal{T}_d) \leq k$.

(2) (X,d) *besitzt eine dichte Teilmenge* D *mit* card $D \leq k$.

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2) Im Falle $\omega(X,\mathcal{T}_d) \leq k$ existiert eine Basis $\mathcal{A}$ von $(X,\mathcal{T}_d)$ mit card $\mathcal{A} \leq k$. Wählt man aus jedem nichtleeren Element A von $\mathcal{A}$ ein $y_A \in A$ aus, so gilt für $D := \{y_A \mid A \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}\}$ offenbar card $D \leq k$, und D ist dicht in (X,d). In der Tat ist für jedes $x \in X$ und $r > 0$ die Kugel $S(x,r)$ offen bzgl. d (vgl. MR 1.2.21), so daß nach 1.1.10(1) ein $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subset S(x,r)$ existiert und somit $d(x,y_A) < r$ gilt.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sei D eine dichte Teilmenge von (X,d) mit card $D \leq k$. Ist D endlich, so zeigt man wie in 1.1.3(3) leicht $X = D$, und $\mathcal{A} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ ist eine Basis von $(X,\mathcal{T}_d)$ mit card $\mathcal{A} \leq k$ (vgl. 1.1.12(2)). Ist D unendlich, so zeigt man ähnlich wie in 1.1.11, daß $\mathcal{A} = \{S(x,\frac{1}{n}) \mid x \in D \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von
L $(X,\mathcal{T}_d)$ mit card $\mathcal{A} \leq k \cdot \aleph_\circ = k$ ist. Führen Sie diesen Beweis bitte selbständig durch.

Für $k = \aleph_\circ$ ergibt sich aus 1.1.17:

1.1.18 Folgerung

Ist (X,d) ein metrischer Raum, so sind äquivalent:

(1) $(X,\mathcal{T}_d)$ *genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom.*

(2) (X,d) *ist separabel, d.h. es existiert eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge in* (X,d).

1.1.19 Folgerung

Genügt ein metrisierbarer topologischer Raum dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, so gilt card $X \leq c$, *mit* $c =$ card $\mathbb{R}$.

Wir verweisen auf den in MR 4.1.17 gegebenen Beweis, der den Begriff der Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen benutzt. □

Wir kehren nun zu allgemeinen topologischen Räumen zurück und beweisen eine notwendige Bedingung für das Zweite Abzählbarkeitsaxiom.

1.1.20 Satz

Genügt ein topologischer Raum $\underline{X}$ dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom, so existiert zu jeder Basis $\mathcal{A}$ von $\underline{X}$ eine höchstens abzählbare Basis $\mathcal{B}$ von $\underline{X}$ mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Beweis: Nach Voraussetzung wissen wir, daß es eine höchstens abzählbare Basis $\mathcal{C}$ von $\underline{X}$ gibt. Sei nun $\mathcal{A}$ eine beliebige Basis von $\underline{X}$. Dann ist auch die Menge $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ und somit auch die Menge $\mathcal{D} = \{(C_1, C_2) \mid C_1 \in \mathcal{C}$ und $C_2 \in \mathcal{C}$ und es gibt $A \in \mathcal{A}$ mit $C_1 \subset A \subset C_2)\}$ höchstens abzählbar. Wählt man für jedes $(C_1, C_2) \in \mathcal{D}$ ein Element $A(C_1, C_2) \in \mathcal{A}$ mit $C_1 \subset A(C_1, C_2) \subset C_2$ aus, so ist auch die Menge $\mathcal{B} := \{A(C_1, C_2) \mid (C_1, C_2) \in D\}$ eine höchstens abzählbare Teilmenge von $\mathcal{A}$. Mit 1.1.10 zeigt man nun, daß $\mathcal{B}$ eine Basis von $\underline{X}$ ist. Zunächst existiert zu jeder offenen Menge B und jedem $x \in B$ ein $C_2 \in \mathcal{C}$ mit $x \in C_2 \subset B$, weiter wegen der Offenheit von C_2 ein A in $\mathcal{A}$ mit $x \in A \subset C_2$, und schließlich ein $C_1 \in \mathcal{C}$ mit $x \in C_1 \subset A$. Somit gilt $(C_1, C_2) \in \mathcal{D}$ und wegen $C_1 \subset A(C_1, C_2)$ auch $x \in A(C_1, C_2) \subset B$. □

Der abschließende Satz dieses Abschnitts erläutert die Struktur der Menge aller Topologien auf einer vorgegebenen Menge X.

1.1.21 Satz

Ist X eine Menge, so bildet die Menge aller Topologien auf X bzgl. der Inklusion einen vollständigen Verband. Insbesondere gilt:

(1) *Die diskrete Topologie $\mathcal{P}X$ ist größtes Element.*

(2) *Die indiskrete Topologie $\{\emptyset, X\}$ ist kleinstes Element.*

(3) *Ist τ eine nichtleere Menge von Topologien auf X, so ist $\bigcap \tau$ das Infimum von τ.*

(4) *Ist τ eine Menge von Topologien auf X, so ist die von $\bigcup \tau$ erzeugte Topologie das Supremum von τ.*

Beweis: (1) und (2) sind offensichtlich. (3) folgt aus der leicht zu bestätigenden Tatsache, daß jede der Eigenschaften (T1) - (T3) stabil unter Durchschnittsbildung ist.
L Der Beweis von (4) unter Verwendung von 1.1.6 sei als Übungsaufgabe empfohlen. □

1.1.22 Beispiel

Der Verband aller Topologien auf $X = \{0, 1\}$ läßt sich als Graph (vgl. NM 4.1.7) folgendermaßen veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{P}X \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{X, \emptyset, \{0\}\} \arrow[dr, dash] & & \{X, \emptyset, \{1\}\} \arrow[dl, dash] \\
& \{X, \emptyset\} &
\end{tikzcd}$$

(vgl. 1.1.2(3)).

1.1.23 Aufgabe

L (für Studierende mit Ausdauer!)

(1) Bestimmen Sie alle 29 Topologien auf $X = \{0, 1, 2\}$.

(2) Bestimmen Sie für jede dieser Topologien ihr Gewicht.

(3) Zeichnen Sie den Graph aller Topologien auf $X = \{0, 1, 2\}$.

1.2 Punkte und Mengen in topologischen Räumen

Im folgenden sei $\underline{X} = (X, \mathcal{T})$ *stets ein topologischer Raum,*
$A, B, \ldots$ *seien Teilmengen von* X,
$x, y, \ldots$ *seien Elemente von* X.

Aus dem Grundbegriff "offene Menge" leiten wir eine Reihe fundamentaler Begriffe für Punkte und Mengen in topologischen Räumen ab. Wir beginnen mit der

1.2.1 Definition

A heißt *abgeschlossen in* $\underline{X}$, wenn $X \setminus A$ offen in $\underline{X}$ ist, d.h. wenn $X \setminus A \in \mathcal{T}$ gilt.

1.2.2 Beispiele

(1) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist A genau dann abgeschlossen in $(X, \mathcal{T}_d)$, wenn A abgeschlossen in (X, d) ist: vgl. MR 1.2.22.
(2) Für beliebiges $\underline{X}$ sind $\emptyset$ und X nicht nur offen, sondern auch abgeschlossen, denn es ist ja $\emptyset = X \setminus X$ und $X = X \setminus \emptyset$. $\underline{X}$ ist indiskret genau dann, wenn dieses die einzigen abgeschlossenen Mengen in $\underline{X}$ sind.
(3) $\underline{X}$ ist diskret genau dann, wenn jede Teilmenge abgeschlossen in $\underline{X}$ ist (wie man aus $A = X \setminus (X \setminus A)$ sofort schließt).
(4) Ist $\mathcal{T}$ die coendliche Topologie auf X (vgl. 1.1.7(2)), so ist A genau dann abgeschlossen in $\underline{X}$, wenn A endlich oder $A = X$ ist.

1.2.3 Satz (*Eigenschaften abgeschlossener Mengen*)

(1) *Die Menge* $\mathcal{A}$ *aller abgeschlossenen Mengen in* $\underline{X}$ *genügt folgenden Bedingungen:*
  (A1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ *und* $X \in \mathcal{A}$.
  (A2) *Aus* $A \in \mathcal{A}$ *und* $B \in \mathcal{A}$ *folgt* $A \cup B \in \mathcal{A}$.
  (A3) *Aus* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *folgt* $\bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{A}$.

(2) *Ist umgekehrt* $\mathcal{A}$ *eine Menge von Teilmengen von* X, *die den Bedingungen* (A1) - (A3) *genügt, so gibt es genau eine Topologie* $\mathcal{S}$ *auf* X *derart, daß* $\mathcal{A}$ *die Menge aller abgeschlossenen Mengen in* $(X, \mathcal{S})$ *ist.*

Beweis: (1) folgt unmittelbar aus den Rechenregeln $X \setminus X = \emptyset$, $X \setminus \emptyset = X$, $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ und $X \setminus \bigcap \mathcal{B} = \bigcup \{X \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$.
(2) Für eine Topologie $\mathcal{S}$ auf X mit $\mathcal{A} = \{A \mid (X \setminus A) \in \mathcal{S}\}$ muß notwendig $\mathcal{S} = \{S \mid (X \setminus S) \in \mathcal{A}\}$ gelten, d.h. $\mathcal{S}$ wird durch $\mathcal{A}$ eindeutig bestimmt. Zum

Nachweis der Existenz von $\mathcal{S}$ muß man jetzt nur noch zeigen, daß $\{S \mid (X \setminus S) \in \mathcal{A}\}$ tatsächlich eine Topologie ist. Das aber ergibt sich wie in (1) unter Anwendung der entsprechenden Rechenregeln. □

1.2.4 Bemerkungen

(1) Obiger Satz zeigt, daß die Menge aller abgeschlossenen Mengen in einem topologischen Raum $\underline{X}$ genau so viel Information enthält wie die Menge aller offenen Mengen in $\underline{X}$, d.h. wie die Topologie $\mathcal{T}$. Aus diesem Grunde hätte man topologische Räume statt durch Axiomatisierung des Begriffs *offene Menge* auch durch Axiomatisierung des Begriffs *abgeschlossene Menge* definieren können mit Hilfe der Gesetze (A1) - (A3). Die zugehörigen Theorien wären völlig gleichwertig.
Andere mögliche Grundbegriffe zum Aufbau der Theorie aller topologischen Räume sind die im folgenden definierten Begriffe: *innerer Punkt einer Menge, Umgebung eines Punktes* [so geschehen 1914 durch F. Hausdorff], *Berührpunkt einer Menge, offener Kern einer Menge, abgeschlossene Hülle einer Menge* [so geschehen 1922 durch K. Kuratowski], vgl. 1.0, Historische Anmerkungen.
(2) Gemäß (T2) sind offene Mengen stabil unter endlicher Durchschnittsbildung, und nach (A2) sind abgeschlossene Mengen stabil unter endlicher Vereinigungsbildung. Diese Eigenschaften gehen im allgemeinen schon dann verloren, wenn wir "endlich" durch "abzählbar unendlich" ersetzen, wie bereits das folgende einfache Beispiel in $\mathbb{R}$ zeigt:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, 1[\;= [0,1[\;= \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, 1-\frac{1}{n}].$$

Die Betrachtung von Durchschnitten (Vereinigungen) höchstens abzählbar vieler offener (abgeschlossener) Mengen erweist sich dennoch vielfach als nützlich und verdient deshalb die Einführung spezieller Namen.

1.2.5 Definition

A heißt *G_δ-Menge* in $\underline{X}$, falls A sich als Durchschnitt einer Folge offener Mengen in $\underline{X}$ darstellen läßt.
A heißt *F_σ-Menge* in $\underline{X}$, falls A sich als Vereinigung einer Folge abgeschlossener Mengen in $\underline{X}$ darstellen läßt.

1.2.6 Satz

(1) *A ist genau dann eine G_δ-Menge in $\underline{X}$, wenn $X \setminus A$ eine F_σ-Menge in $\underline{X}$ ist.*

(2) *Jede offene Menge in* $\underline{X}$ *ist* G_δ*-Menge in* $\underline{X}$, *jede abgeschlossene Menge in* $\underline{X}$ *ist* F_σ*-Menge in* $\underline{X}$.

(3) *Ist* $\underline{X}$ *metrisierbar, so ist jede abgeschlossene Menge in* $\underline{X}$ *eine* G_δ*-Menge in* $\underline{X}$ *und jede offene Menge in* $\underline{X}$ *eine* F_σ*-Menge in* $\underline{X}$.

Beweis: (1) folgt aus der Rechenregel $X \setminus \bigcup\limits_n A_n = \bigcap\limits_n (X \setminus A_n)$.
(2) folgt aus der Tatsache, daß jede Teilmenge A von X gleichzeitig Durchschnitt und Vereinigung der konstanten Folge $(A_n) = (A)$ ist.
(3) Sei $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Für jedes $A \neq \emptyset$ und jedes $t > 0$ ist dann die Menge

$$A_t = \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, A) < t\}$$

(mit $\operatorname{dist}(x, A) = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}$) offen in $\underline{X}$. (Beweisen Sie diese Aussage
L zur Übung bitte selbst.) Wenn A abgeschlossen ist, gilt nun

$$A = \emptyset \quad \text{oder} \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} \ ,$$

denn aus $x \in A_{\frac{1}{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\operatorname{dist}(x, A) = 0$ und somit $x \in A$ (vgl. MR 1.2.12). Also ist A Durchschnitt einer Folge von offenen Mengen $\underline{X}$ und somit eine G_δ-Menge.
Ist A offen in $\underline{X}$, so ist nach dem gerade Gezeigten die abgeschlossene Menge $X \setminus A$ eine G_δ-Menge in $\underline{X}$, und nach (1) ist dann $A = X \setminus (X \setminus A)$ eine F_σ-Menge in $\underline{X}$. □

1.2.7 Aufgabe

L

(1) Zeigen Sie: Ist jedes A_n $(n \in \mathbb{N})$ eine F_σ-Menge in $\underline{X}$, so sind auch $A_1 \cap A_2$ und $\bigcup A_n$ F_σ-Mengen in $\underline{X}$.

(2) Formulieren und beweisen Sie eine "duale" Aussage für G_δ-Mengen.

(3) Für jedes $x \in X$ sei die Menge $\{x\}$ abgeschlossen in $\underline{X}$. Zeigen Sie, daß in $\underline{X}$ jede abzählbare Teilmenge eine F_σ-Menge ist.

Der im Folgenden eingeführte Begriff der Umgebung ist wie die Begriffe "offen", "abgeschlossen" von fundamentaler Bedeutung.

1.2.8 Definition

(1) B heißt *Umgebung* von A in $\underline{X}$, falls eine offene Menge C in $\underline{X}$ mit $A \subset C \subset B$ existiert. Ist B Umgebung von $\{x\}$, so heißt B auch *Umgebung* von x.

(2) Eine Menge $\mathcal{U}$ von Umgebungen von A (bzw. x) heißt eine *Umgebungsbasis* von A (bzw. x) in $\underline{X}$, falls zu jeder Umgebung V von A (bzw. x) ein $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset V$ existiert.

1.2.9 Bemerkung

(1) Jede offene Menge $B \supset A$ ist eine Umgebung von A.
(2) Eine Menge $\mathcal{U}$ von Umgebungen von A ist schon dann Umgebungsbasis von A, falls zu jeder *offenen* Umgebung V von A ein $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset V$ existiert. Denn eine beliebige Umgebung V' von A enthält ja stets eine offene Menge V mit $A \subset V$, also eine offene Umgebung V von A, und jedes $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset V$ erfüllt auch $U \subset V'$.

1.2.10 Satz *(Eigenschaften von Umgebungen)*

(1) *X ist Umgebung jeder Teilmenge von X.*

(2) *Ist U Umgebung von A, so gilt $A \subset U$.*

(3) *Ist U Umgebung von A und gilt $B \subset A$ und $U \subset V$, so ist V Umgebung von B.*

(4) *Ist U Umgebung von A und ist V Umgebung von B, so ist $U \cap V$ Umgebung von $A \cap B$ und $U \cup V$ Umgebung von $A \cup B$.*

Beweis: (1) folgt aus der Tatsache, daß X offen in $\underline{X}$ ist, (4) aus der Tatsache, daß Vereinigung und Durchschnitt von je zwei offenen Mengen in $\underline{X}$ wieder offen in $\underline{X}$ sind, und (2) und (3) folgen unmittelbar aus der Definition. $\square$

Der folgende Satz zeigt die lokale Natur des Umgebungsbegriffs.

1.2.11 Satz

Äquivalent sind:

(1) *U ist Umgebung von A in $\underline{X}$.*

(2) *U ist Umgebung jedes Elementes von A in $\underline{X}$.*

Beweis: Die Implikation (1) $\Longrightarrow$ (2) folgt aus 1.2.10(3).
Zum Nachweis von (2) $\Rightarrow$ (1) wähle man zu jedem $x \in A$ eine offene Menge B_x in $\underline{X}$ mit $x \in B_x \subset U$. Dann ist $B := \bigcup\{B_x \mid x \in A\}$ nach (T3) eine offene Menge in $\underline{X}$ mit $A \subset B \subset U$. □

1.2.12 Folgerung

Äquivalent sind:

(1) *A ist offen in $\underline{X}$.*

(2) *A ist Umgebung von A in $\underline{X}$.*

(3) *A ist Umgebung jedes seiner Elemente in $\underline{X}$.*

Beweis: Die Äquivalenz der Bedingungen (2) und (3) folgt unmittelbar aus dem vorangegangenen Satz 1.2.11, wenn wir $U = A$ wählen. Die Äquivalenz der Bedingungen (1) und (2) folgt unmittelbar aus der Definition 1.2.8. □

1.2.13 Beispiele *(von Umgebungsbasen)*

(1) Die Menge aller A umfassenden offenen Mengen in $\underline{X}$ ist eine Umgebungsbasis von A in $\underline{X}$.
(2) Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\underline{X}$, so ist für jedes $x \in X$ die Menge $\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ eine Umgebungsbasis von x in $\underline{X}$.
(3) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist für jedes $x \in X$ die Menge $\{S(x, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x in $(X, \mathcal{T}_d)$.
(4) Ist $\mathcal{T}$ endlich, also insbesondere, wenn die Menge X endlich ist, so ist zu jedem $A \subset X$ die Menge $U_A = \bigcap\{B \in \mathcal{T} \mid A \subset B\}$ die kleinste A umfassende offene Menge in $\underline{X}$. Somit ist die einelementige Menge $\{U_A\}$ eine Umgebungsbasis von A in $\underline{X}$.

L Beweisen Sie diese Aussagen zur Übung bitte selbst.

Wie im Falle von Basen ist man oft daran interessiert, nicht zu große Umgebungsbasen zu finden.

1.2.14 Definition

$\underline{X}$ genügt dem *ersten Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Punkt in $\underline{X}$ eine höchstens abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

1.2.15 Satz

(1) *Jeder topologische Raum, der dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, erfüllt auch das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

(2) *Jeder metrisierbare topologische Raum genügt dem ersten Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis: (1) folgt aus 1.2.13(2) und (2) folgt aus 1.2.13(3). □

1.2.16 Beispiel

Ist die Menge X überabzählbar, so genügt der diskrete Raum $\underline{X} = (X, \mathcal{P}X)$ zwar dem ersten Abzählbarkeitsaxiom (da für jedes $x \in X$ die einelementige Menge $\{\{x\}\}$ eine Umgebungsbasis von x in $\underline{X}$ ist), aber nicht dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom (da jede Basis von $\underline{X}$ die überabzählbare Menge $\{\{x\} \mid x \in X\}$ umfassen muß). Verifizieren Sie diese Behauptungen bitte.

L

1.2.17 Definition

x heißt *innerer Punkt* von B, wenn B Umgebung von x ist. Die Menge aller inneren Punkte von B heißt *offener Kern* von B und wird mit $\operatorname{int}_{\underline{X}} B$ (oder, falls Verwechslungen ausgeschlossen sind, mit $\operatorname{int} B$) bezeichnet. "int" steht für engl. *interior* = Inneres.

Im Falle $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ sind diese Begriffe zu den entsprechenden Begriffen für metrische Räume äquivalent (vgl. MR 1.2). Für allgemeine topologische Räume zeigen wir zuerst, daß der Begriff des offenen Kerns zur Beschreibung offener Mengen benutzt werden kann (siehe auch 1.2.22).

1.2.18 Satz

(1) *U ist Umgebung von A in $\underline{X}$ genau dann, wenn jeder Punkt von A innerer Punkt von U ist.*

(2) *A ist offen in $\underline{X}$ genau dann, wenn $A = \operatorname{int}_{\underline{X}} A$ gilt.*

Beweis: (1) ist lediglich eine Neuformulierung von 1.2.11(1).
(2) Nach 1.2.12 ist A offen in $\underline{X}$ genau dann, wenn A Umgebung von A in $\underline{X}$ ist, d.h. nach (1), wenn $A \subset \operatorname{int}_{\underline{X}} A$ gilt. Da stets $\operatorname{int}_{\underline{X}} A \subset A$ gilt, ist die Aussage bewiesen. □

1.2.19 Satz

int A *ist die größte offene Teilmenge von* A *in* $\underline{X}$.

Beweis: Für jede offene Teilmenge B von A in $\underline{X}$ und jedes $x \in B$ ist A Umgebung von x, also gilt $B \subset \operatorname{int} A$. Es genügt somit zu zeigen, daß int A offen in $\underline{X}$ ist. Dazu wähle man zu jedem $a \in \operatorname{int} A$ eine offene Menge B_a in $\underline{X}$ mit $a \in B_a \subset A$. Dann gilt wie zuvor $B_a \subset \operatorname{int} A$, und daraus folgt $\operatorname{int} A = \bigcup\{B_a \mid a \in \operatorname{int} A\}$. Als Vereinigung offener Mengen ist int A somit selbst offen. □

1.2.20 Satz *(Eigenschaften des offenen Kerns)*

(1) $\operatorname{int} X = X$.

(2) $\operatorname{int} A \subset A$.

(3) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.

(4) $A \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$.

(5) $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$.

Beweis: Alle Eigenschaften folgen recht einfach aus 1.2.19, wie folgt.
(1) X ist offenbar die größte offene Teilmenge von X in $\underline{X}$ und muß daher mit int X übereinstimmen.
(2) Nach 1.2.19 ist int A insbesondere eine Teilmenge von A.
(3) Nach (T2) ist $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$ eine offene Teilmenge von $A \cap B$ in $\underline{X}$. Für jedes offene $C \subset A \cap B$ gilt wegen $C \subset A$ und $C \subset B$ auch $C \subset \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$, so daß $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$ die größte offene Teilmenge von $A \cap B$ in $\underline{X}$ ist.
(4) Im Falle $A \subset B$ ist int A eine offene Teilmenge von B, also Teilmenge der größten offenen Teilmenge von B.
(5) Als offene Menge ist int A größte offene Teilmenge von sich selbst, d.h. nach 1.2.19 $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$. □

1.2.21 Beispiele

(1) $\underline{X}$ ist indiskret genau dann, wenn $\operatorname{int} A = \emptyset$ für jede echte Teilmenge A von X gilt.

(2) $\underline{X}$ ist diskret genau dann, wenn $\operatorname{int} A = A$ für alle $A \subset X$ gilt.

(3) $\mathcal{T}$ ist die coendliche Topologie auf X genau dann, wenn gilt $\operatorname{int} A = A$ für $X \setminus A$ endlich und $\operatorname{int} A = \emptyset$ für $X \setminus A$ unendlich.

L Bestätigen Sie diese Aussagen bitte selbst.

1.2.22 Aufgabe

L Es sei $i : \mathcal{P}X \longrightarrow \mathcal{P}X$ eine Abbildung, die die Eigenschaften (1) - (5) von 1.2.20 (mit i anstelle von int) erfüllt. Man zeige, daß es genau eine Topologie $\mathcal{S}$ auf X gibt mit $\operatorname{int}_{(X,\mathcal{S})}A = i(A)$ für alle $A \subset X$.

1.2.23 Definition

Ein Punkt x heißt *Berührpunkt* einer Menge A in $\underline{X}$, wenn jede Umgebung U von x in $\underline{X}$ die Menge A trifft (d.h. $U \cap A \neq \emptyset$; es genügt hier, *offene* Umgebungen U zu betrachten, vgl. 1.2.9(2)). Die Menge aller Berührpunkte von A in $\underline{X}$ heißt *abgeschlossene Hülle* von A in $\underline{X}$ und wird mit $\operatorname{cl}_{\underline{X}}A$ (oder, falls Verwechslungen ausgeschlossen sind, mit $\operatorname{cl} A$) bezeichnet. "cl" steht für engl. *closure* = Hülle, Abschluß.

Im Falle $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ sind auch diese Begriffe äquivalent zu den entsprechenden Begriffen für metrische Räume (vgl. MR, 1.2). Für allgemeine topologische Räume wird jetzt zuerst gezeigt, daß sich die Operatoren cl und int "dual" zueinander verhalten.

1.2.24 Satz

A ist Umgebung von x in $\underline{X}$ genau dann, wenn x kein Berührpunkt von $X \setminus A$ in $\underline{X}$ ist.

Beweis: Daß x nicht Berührpunkt von $X \setminus A$ in $\underline{X}$ ist, bedeutet definitionsgemäß die Existenz einer offenen Menge U mit $x \in U$ und $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$, also $U \subset A$. Das aber gilt genau dann wenn A Umgebung von x in $\underline{X}$ ist. □

1.2.25 Folgerung

(1) $\operatorname{int} A = X \setminus \operatorname{cl}(X \setminus A)$, (2) $\operatorname{cl} A = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$.

Beweis: (1) ist eine Neuformulierung von 1.2.24, und (2) folgt, indem man (1) auf $X \setminus A$ anstelle von A anwendet.
Das gibt zunächst $\operatorname{int}(X \setminus A) = X \setminus \operatorname{cl}(X \setminus (X \setminus A)) = X \setminus \operatorname{cl} A$ und dann $\operatorname{cl} A = X \setminus (X \setminus \operatorname{cl} A) = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)$. □

1.2.26 Satz

Äquivalent sind:

(1) *A ist abgeschlossen in $\underline{X}$.*

(2) *A enthält jeden seiner Berührpunkte in $\underline{X}$.*
(3) $A = \mathrm{cl}\, A$.

Beweis: Weil stets $A \subset \mathrm{cl}\, A$ gilt, folgt (2) $\iff$ (3) unmittelbar aus der Definition 1.2.23. Ferner hat man wegen 1.2.18(2) und 1.2.25(2):

$$\begin{aligned} A \text{ abgeschlossen in } \underline{X} &\iff X \setminus A \text{ offen in } \underline{X} \\ &\iff X \setminus A = \operatorname{int}(X \setminus A) \\ &\iff A = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A) \\ &\iff A = \mathrm{cl}\, A. \end{aligned}$$ □

Analog schließt man aus 1.2.19:

1.2.27 Satz

$\mathrm{cl}\, A$ ist die kleinste A umfassende abgeschlossene Menge in $\underline{X}$.

Beweis: Da $\operatorname{int}(X \setminus A)$ nach 1.2.19 die größte offene Teilmenge von $X \setminus A$ in $\underline{X}$ ist, muß ihr Komplement $X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A) = \mathrm{cl}\, A$ nach 1.2.1 die kleinste A umfassende abgeschlossene Menge in $\underline{X}$ sein. □

1.2.28 Satz *(Eigenschaften der abgeschlossenen Hülle)*

(1) $\mathrm{cl}\, \emptyset = \emptyset$.
(2) $A \subset \mathrm{cl}\, A$.
(3) $\mathrm{cl}\,(A \cup B) = \mathrm{cl}\, A \cup \mathrm{cl}\, B$.
(4) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{cl}\, A \subset \mathrm{cl}\, B$.
(5) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\, A) = \mathrm{cl}\, A$.

Beweis: Diese Aussagen kann man aus den dualen Aussagen für int (siehe 1.2.20) mit Hilfe der Komplementregel 1.2.25 ableiten oder formal aus 1.2.27 folgern, genauso wie 1.2.20 mit Hilfe von 1.2.19 bewiesen wurde. (Führen Sie beide Beweise zur Übung selbst durch.) □

1.2.29 Aufgabe

L Formulieren Sie die zu 1.2.21 und 1.2.22 dualen Aussagen (mit “cl“ anstelle von “int“) und beweisen Sie sie.

1.2.30 Definitionen

(1) A heißt *dicht* in $\underline{X}$, wenn $X = \mathrm{cl}\, A$ gilt.

(2) Die *Dichte* $\delta\underline{X}$ von $\underline{X}$ ist die kleinste Kardinalzahl einer dichten Menge in $\underline{X}$, also $\delta\underline{X} = \min\{\mathrm{card}\ A \mid A \text{ dicht in } \underline{X}\}$.

(3) $\underline{X}$ heißt *separabel*, wenn eine höchstens abzählbare, dichte Menge in $\underline{X}$ existiert, d.h. wenn $\delta\underline{X} \leq \aleph_0$ gilt.

Falls $\underline{X}$ metrisierbar ist, sind diese Begriffe äquivalent zu den entsprechenden metrischen Begriffen (vgl. 1.1.16 - 1.1.18).

1.2.31 Satz

A ist genau dann dicht in $\underline{X}$, wenn A jede nichtleere, offene Menge B in $\underline{X}$ trifft (d.h. $A \cap B \neq \emptyset$).

Beweis: Ist A dicht und B offen in $\underline{X}$ mit $x \in B$, so ist x Berührpunkt von A und B Umgebung von x in $\underline{X}$. Hieraus folgt $A \cap B \neq \emptyset$ nach Definition 1.2.23 der Berührpunkte. Trifft umgekehrt jede nichtleere, offene Menge die Menge A, so trifft jede offene Umgebung und somit jede Umgebung jedes Punktes die Menge A. Also ist jeder Punkt in $\underline{X}$ Berührpunkt von A, d.h. A ist dicht in $\underline{X}$. □

1.2.32 Aufgaben

L Zeigen Sie:

(1) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind beide dicht in $\underline{\mathbb{R}}$.

(2) X ist die einzige dichte Menge des diskreten Raumes $(X, \mathcal{P}X)$. Hingegen ist jede nichtleere Teilmenge von X dicht im indiskreten Raum $(X, \{\emptyset, X\})$.

(3) A besitzt einen inneren Punkt genau dann, wenn A jede dichte Menge in $\underline{X}$ trifft.

(4) Der Punkt $x \in X$ habe die Eigenschaft, daß $\{x\}$ abgeschlossen, aber nicht offen in $\underline{X}$ ist. Dann ist für jede dichte Menge A in $\underline{X}$ auch $A \setminus \{x\}$ dicht in $\underline{X}$.

1.2.33 Satz

Die Dichte von $\underline{X}$ ist nur höchstens so groß wie das Gewicht von $\underline{X}$, d.h. $\delta\underline{X} \leq \omega\underline{X}$.

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $\underline{X}$ mit $\mathrm{card}\ \mathcal{B} = \omega\underline{X}$. Wählt man aus jedem nichtleeren Element B von $\mathcal{B}$ ein $x_B \in B$ aus, so ist die Menge $D = \{x_B \mid B \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}\}$ nach 1.2.31 dicht in $\underline{X}$. Denn zu jeder nichtleeren offenen Menge U in $\underline{X}$ gibt es eine nichtleere Menge $B \subset U$ in $\mathcal{B}$, also $x_B \in D \cap B \subset D \cap U \neq \emptyset$. Hieraus folgt $\delta\underline{X} \leq \text{ card } \mathcal{B} = \omega\underline{X}$. □

1.2.34 Folgerung

(1) *Jeder dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügende topologische Raum ist separabel.*

(2) *Ist $\underline{X}$ metrisierbar, so gilt $\delta\underline{X} = \omega\underline{X}$.*

Beweis: (1) folgt aus 1.2.33 und (2) aus 1.1.17, mit $k = \delta\underline{X}$. □

1.2.35 Beispiel

Es sei x_0 ein festes Element der nichtleeren Menge X. Dann ist $\mathcal{S} = \{A \subset X \mid A = \emptyset \text{ oder } x_0 \in A\}$ eine Topologie auf X, und nach 1.2.31 ist $\{x_0\}$ dicht in $(X, \mathcal{S})$, sogar die kleinste dichte Menge in $(X, \mathcal{S})$ (denn für jede andere dichte Menge muß wegen der Offenheit von $\{x_0\}$ schon $x_0 \in D$ gelten). Andererseits ist $\mathcal{B}_0 = \{\{x_0, x\} \mid x \in X\}$ offenbar eine Basis von $(X, \mathcal{S})$, sogar die kleinste Basis von $(X, \mathcal{S})$ (denn für jede andere Basis $\mathcal{B}$ und jedes $x \in X$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset \{x_0, x\}$, so daß wegen $x_0 \in B$ schon $\{x_0, x\} = B \in \mathcal{B}$ folgt). Damit ist also $\delta(X, \mathcal{S}) = 1$ und $\omega(X, \mathcal{S}) = \text{card } X$. Im allgemeinen ist also $\delta\underline{X} < \omega\underline{X}$. (In §4 werden wir natürlichere Beispiele von Räumen $\underline{X}$ mit dieser Eigenschaft kennenlernen.)

1.2.36 Definition

Ein Punkt x heißt *Grenz-* oder *Randpunkt* von A in $\underline{X}$, wenn x Berührpunkt sowohl von A als auch von $X \setminus A$ ist. Die Menge aller Grenzpunkte von A in $\underline{X}$ heißt *Grenze* oder *Rand* von A in $\underline{X}$ und wird mit $\text{fr}_{\underline{X}} A$ (oder einfach $\text{fr } A$) bezeichnet. “fr“ steht für engl. *frontier* = Grenze.

1.2.37 Satz

(1) *A ist Umgebung von x genau dann, wenn x ein Punkt von A, aber nicht Grenzpunkt von A ist.*

(2) $\text{fr } A = \text{cl } A \cap \text{cl}\,(X \setminus A) = X \setminus (\text{int } A \cup \text{int}\,(X \setminus A))$.

(3) $\text{int } A = A \setminus \text{fr } A, \quad \text{cl } A = A \cup \text{fr } A, \quad \text{fr } A = \text{cl } A \setminus \text{int } A$.

Beweis: (1) Nach Definition ist x kein Grenzpunkt von A genau dann, wenn $x \in X \setminus \operatorname{cl} A$ oder $x \in X \setminus \operatorname{cl}(X \setminus A)$ gilt, d.h. nach 1.2.25 wenn $x \in \operatorname{int}(X \setminus A)$ oder $x \in \operatorname{int} A$ ist. Im Falle $x \in A$ ist $x \in \operatorname{int}(X \setminus A) \subset X \setminus A$ jedoch nicht möglich, und damit ergibt sich (1) sofort.
(2) $\operatorname{fr} A = \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl}(X \setminus A)$ gilt nach Definition 1.2.36, und nach 1.2.25 gilt $X \setminus (\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} X \setminus A) = (X \setminus \operatorname{int} A) \cap (X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)) = \operatorname{cl}(X \setminus A) \cap \operatorname{cl} A$.
(3) $\operatorname{int} A = A \setminus \operatorname{fr} A$ gilt nach (1). Wegen $A \subset \operatorname{cl} A$ ist nach (2)

$$\begin{aligned} \operatorname{cl} A &= \operatorname{cl} A \cap (A \cup (X \setminus A)) \\ &= (\operatorname{cl} A \cap A) \cup (\operatorname{cl} A \cap (X \setminus A)) \\ &\subset A \cup \operatorname{fr} A \subset \operatorname{cl} A, \end{aligned}$$

also $\operatorname{cl} A = A \cup \operatorname{fr} A$. Schließlich ist

$$\operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A = \operatorname{cl} A \cap (X \setminus \operatorname{int} A) = \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl}(X \setminus A) = \operatorname{fr} A. \qquad \square$$

1.2.38 Aufgabe

L Bestimmen Sie $\operatorname{fr}_{(X,\mathcal{S})} A$ für die Topologie $\mathcal{S}$ aus 1.2.35 und jede Teilmenge $A \subset X$.

1.3 Mengensysteme und Überdeckungen

Im folgenden sei $\underline{X} = (X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ seien Mengen von Teilmengen von X, also $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots \subset \mathcal{P}X$.

Bereits vor der Einführung des Begriffes der F_σ-Mengen haben wir (in 1.2.4) bemerkt, daß die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen in $\underline{X}$ nicht notwendig abgeschlossen in $\underline{X}$ ist. Unter gewissen Bedingungen kann man jedoch ein positives Resultat herleiten, wie wir jetzt zunächst zeigen wollen.

1.3.1 Definitionen

(1) $\mathcal{A}$ heißt *offen* (bzw. *abgeschlossen*) in $\underline{X}$, wenn jedes Element von $\mathcal{A}$ offen (bzw. abgeschlossen) in $\underline{X}$ ist.

(2) $\mathcal{A}$ heißt *lokal-diskret* (bzw. *lokal-endlich*) in $\underline{X}$, wenn jeder Punkt x in $\underline{X}$ eine Umgebung U besitzt, die höchstens ein Element (bzw. endlich viele Elemente) von $\mathcal{A}$ trifft, d.h. $U \cap A \neq \emptyset$ nur für höchstens ein (bzw. endlich viele) $A \in \mathcal{A}$.

1.3.2 Satz

Ist $\mathcal{A}$ lokal-endlich in $\underline{X}$, so gilt:

(1) $\{\mathrm{cl}\, A \mid A \in \mathcal{A}\}$ *ist lokal-endlich in* $\underline{X}$.

(2) $\mathrm{cl}\,(\bigcup \mathcal{A}) = \bigcup \{\mathrm{cl}\, A \mid A \in \mathcal{A}\}$.

Beweis: (1) Sei $x \in X$ und B eine offene Umgebung von x in $\underline{X}$, die nur endlich viele Elemente von $\mathcal{A}$ trifft. Da B eine Menge A genau dann trifft, wenn sie cl A trifft, kann B nur endlich viele Elemente von $\{\mathrm{cl}\, A \mid A \in \mathcal{A}\}$ treffen.
(2) Die Inklusion $\bigcup \{\mathrm{cl}\, A \mid A \in \mathcal{A}\} \subset \mathrm{cl}\,(\bigcup \mathcal{A})$ gilt für jedes $\mathcal{A}$. Sei umgekehrt x ein Berührpunkt von $\bigcup \mathcal{A}$ und sei B eine Umgebung von x, die nur endlich viele Elemente $A_1, \ldots, A_n$ von $\mathcal{A}$ trifft. Zum Nachweis von $x \in \mathrm{cl}\,(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ sei U Umgebung von x; wegen $x \in \mathrm{cl}\,(\bigcup \mathcal{A})$ folgt

$$\emptyset \neq U \cap B \cap (\bigcup \mathcal{A}) = U \cap B \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \subset U \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n).$$

Mit 1.2.28(3) ergibt sich nun

$$x \in \mathrm{cl}\,(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathrm{cl}\, A_1 \cup \cdots \cup \mathrm{cl}\, A_n \subset \bigcup \{\mathrm{cl}\, A \mid A \in \mathcal{A}\}. \qquad \square$$

1.3.3 Satz

Ist $\mathcal{A}$ lokal-endlich und abgeschlossen in $\underline{X}$, so ist auch $\bigcup\mathcal{A}$ abgeschlossen in $\underline{X}$.

Beweis: Nach 1.3.2 gilt $\mathrm{cl}\,(\bigcup\mathcal{A}) = \bigcup\{\mathrm{cl}\,A \mid A \in \mathcal{A}\} = \bigcup\mathcal{A}$. Nach 1.2.26 ist $\bigcup\mathcal{A}$ somit abgeschlossen in $\underline{X}$. □

1.3.4 Beispiele

(1) $\{[n, n+1] \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist lokal-endlich und abgeschlossen in $\mathbb{R}$, denn für jedes x trifft die Umgebung $]x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}[$ höchstens zwei Intervalle des Typs $[n, n+1]$. Hingegen sind $\{[\frac{1}{n}, 1] \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\{[0, \frac{1}{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$ beide zwar abgeschlossen, aber nicht lokal-endlich, denn es gibt keine Umgebung von 0, die nur endlich viele Elemente der beiden Mengensysteme trifft. (Das letzte Beispiel zeigt übrigens, daß man aus der Abgeschlossenheit von $\bigcup\mathcal{A}$ nicht lokale Endlichkeit für ein abgeschlossenes System $\mathcal{A}$ in $\underline{X}$ schließen kann.)
(2) $\mathcal{T}$ sei die coendliche Topologie auf X. Dann ist das abgeschlossene System $\{\{x\} \mid x \in X\}$ lokal endlich genau dann, wenn X endlich ist. Beweisen Sie diese
L Aussage bitte selbst.

1.3.5 Definitionen

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ *Überdeckungen* von X (d.h. $\bigcup\mathcal{A} = \bigcup\mathcal{B} = X$).

(1) $\mathcal{A}$ heißt *Verfeinerung* von $\mathcal{B}$ (in Zeichen $\mathcal{A} < \mathcal{B}$), wenn zu jedem $A \in \mathcal{A}$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $A \subset B$ existiert.

(2) Für $B \subset X$ sei $\mathrm{St}\,(B, \mathcal{A}) = \bigcup\{C \in \mathcal{A} \mid C \cap B \neq \emptyset\}$ (lies: *Stern von B bzgl. $\mathcal{A}$*).

(3) $\mathcal{A}$ heißt *Sternverfeinerung* von $\mathcal{B}$ (in Zeichen $\mathcal{A} \lll\!\ast\, \mathcal{B}$), wenn $\{\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) \mid A \in \mathcal{A}\}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{B}$ ist, also $\{\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) \mid A \in \mathcal{A}\} < \mathcal{B}$.

(4) $\mathcal{A}$ heißt *schwache Sternverfeinerung* von $\mathcal{B}$ (in Zeichen $\mathcal{A} <\ast\, \mathcal{B}$), wenn $\{\mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{A}) \mid x \in X\}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{B}$ ist, also $\{\mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{A}) \mid x \in X\} < \mathcal{B}$.

1.3.6 Bemerkung

Für Überdeckungen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ von X gilt stets:

(1) Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, so ist $\mathcal{A} < \mathcal{B}$. Insbesondere ist $\mathcal{A} < \mathcal{A}$.

(2) Aus $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} < \mathcal{C}$ folgt $\mathcal{A} < \mathcal{C}$.

(3) Für alle $B \subset C \subset X$ gilt $\mathrm{St}(B, \mathcal{A}) \subset \mathrm{St}(C, \mathcal{A})$.

(4) Für alle $A \in \mathcal{A}$ und $x \in A$ gilt:

$$A \subset \mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{A}) \subset \mathrm{St}(A, \mathcal{A}).$$

Somit gilt stets $\mathcal{A} < \{\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) \mid A \in \mathcal{A}\}$ und im Falle $X \neq \emptyset$ auch $\mathcal{A} < \{\mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{A}) \mid x \in X\}$.

(5) Im Falle $X \in \mathcal{B}$ gilt $\mathcal{A} \lll\!* \mathcal{B}$.

Diese Aussagen folgen unmittelbar aus der Definition 1.3.5.

1.3.7 Satz

Ist $X \neq \emptyset$, so gilt:
(1) $\mathcal{A} \lll\!* \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \lessdot\!* \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} < \mathcal{B}$.
(2) $(\mathcal{A} \lessdot\!* \mathcal{B}$ *und* $\mathcal{B} \lessdot\!* \mathcal{C}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \lll\!* \mathcal{C}$.

Beweis: (1) Sei $\mathcal{A} \lll\!* \mathcal{B}$ und sei $x \in X$. Weil $\mathcal{A}$ Überdeckung von X ist, existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A$ und dann ein $B \in \mathcal{B}$ mit $\mathrm{St}\ (A, \mathcal{A}) \subset B$. Wegen $x \in A$ folgt hieraus mit 1.3.6(3) $\mathrm{St}\ (\{x\}, \mathcal{A}) \subset B$. Somit gilt $\mathcal{A} \lessdot\!* \mathcal{B}$.
Sei jetzt $\mathcal{A} \lessdot\!* \mathcal{B}$ und $A \in \mathcal{A}$. Gilt $A = \emptyset$, so gilt $A \subset B$ für jedes $B \in \mathcal{B}$, und wegen $X \neq \emptyset$ gibt es auch ein B in der Überdeckung $\mathcal{B}$ von X. Gilt $A \neq \emptyset$, so existiert ein $x \in A$ und nach Voraussetzung ein $B \in \mathcal{B}$ mit $\mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{A}) \subset B$. Wegen $A \subset \mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{A})$ (vgl. 1.3.6(4)) folgt hieraus $A \subset B$. Somit gilt $\mathcal{A} < \mathcal{B}$.
(2) Sei $\mathcal{A} \lessdot\!* \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \lessdot\!* \mathcal{C}$ und $A \in \mathcal{A}$. Gilt $A = \emptyset$, so gilt $\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) = \emptyset$ und somit $\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) \subset C$ für jedes $C \in \mathcal{C}$, und wegen $X \neq \emptyset$ existiert auch ein $C \in \mathcal{C}$. Gilt $A \neq \emptyset$, so existiert ein $x \in A$ und nach Voraussetzung ein $B \in \mathcal{B}$ mit $\mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{A}) \subset B$. Ferner existiert ein $C \in \mathcal{C}$ mit $\mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{B}) \subset C$. Zum Nachweis von $\mathcal{A} \lll\!* \mathcal{C}$ genügt es nun zu zeigen, daß $\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) \subset C$ gilt. Sei also $y \in \mathrm{St}(A, \mathcal{A})$. Dann existiert nach Definition des Sterns ein $A' \in \mathcal{A}$ mit $y \in A'$ und $A' \cap A \neq \emptyset$. Somit existiert ein $z \in A' \cap A$ und dann ein $B' \in \mathcal{B}$ mit $\mathrm{St}(\{z\}, \mathcal{A}) \subset B'$. Wegen $A' \cup A \subset \mathrm{St}(\{z\}, \mathcal{A})$ folgt hieraus sowohl $y \in B'$ als auch $x \in B'$. Letzteres impliziert $B' \subset \mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{B})$. Somit gilt $y \in B' \subset \mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{B}) \subset C$, womit $\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) \subset C$ bewiesen ist. □

1.3.8 Beispiele

(1) Jede Überdeckung ist Verfeinerung von sich selbst.
(2) Die offene Überdeckung $\{]-n, n[\ \mid n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{R}$ ist eine schwache Sternverfeinerung einer Überdeckung $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}$ genau dann, wenn $\mathbb{R} \in \mathcal{B}$ gilt.

(3) In einem metrisierbaren Raum $\underline{X} = (X, \mathcal{T}_d)$ ist für jedes $r > 0$ $\mathcal{A}_r = \{S(x,r) \mid x \in X\}$ eine offene Überdeckung von $\underline{X}$. Es gilt $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}r} <\!* \mathcal{A}_r$ und $\mathcal{A}_{\frac{1}{3}r} \ll\!* \mathcal{A}_r$, aber i.a. *nicht* $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}r} \ll\!* \mathcal{A}_r$.

L Verifizieren Sie diese Behauptungen bitte.

Beispiel (3) zeigt insbesondere, daß die offene Überdeckung $\mathcal{A}_r$ eine offene Sternverfeinerung besitzt. Dieses läßt sich verallgemeinern:

1.3.9 Satz (A.H. Stone)

In einem metrisierbaren topologischen Raum existiert zu jeder offenen Überdeckung eine offene Sternverfeinerung.

Beweis: Seien (X,d) ein metrischer Raum, $\mathcal{T}_d$ die induzierte Topologie auf X und $\mathcal{A}$ eine offene Überdeckung von $\underline{X} = (X, \mathcal{T}_d)$. Für $X = \emptyset$ ist $\mathcal{A} = \emptyset$ oder $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$, und in beiden Fällen ist $\mathcal{A}$ Sternverfeinerung von sich selbst. Sei also $X \neq \emptyset$. Dann genügt es nach 1.3.7(2) zu zeigen, daß $\mathcal{A}$ eine offene schwache Sternverfeinerung besitzt. Denn hat man dieses gezeigt, wähle man zu $\mathcal{A}$ eine offene schwache Sternverfeinerung $\mathcal{B}$ und zu $\mathcal{B}$ eine offene schwache Sternverfeinerung $\mathcal{C}$; $\mathcal{C}$ ist dann eine offene Sternverfeinerung von $\mathcal{A}$. Weil $\mathcal{A}$ eine offene Überdeckung von $\underline{X}$ ist, kann man für jedes $x \in X$ ein $A_x \in \mathcal{A}$ und eine reelle Zahl r_x mit $0 < r_x < 1$ und $S(x, r_x) \subset A_x$ wählen. Setzt man $B_x = S(x, \frac{1}{4} r_x)$, so ist $\mathcal{B} = \{B_x \mid x \in X\}$ offenbar eine offene Überdeckung von $\underline{X}$. Es genügt jetzt also zu zeigen, daß $\mathcal{B}$ eine schwache Sternverfeinerung von $\mathcal{A}$ ist. Sei also $x \in X$, und es sei $C = \{y \in X \mid x \in B_y\}$. Wegen $x \in B_x$ ist $C \neq \emptyset$. Setzt man $r = \sup\{r_y \mid y \in C\}$, so ist dann $r > 0$, und es existiert ein $z \in C$ mit $\frac{3}{4} r < r_z$. Wir behaupten, daß $\mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{B}) \subset A_z$ gilt. Sei also $a \in \mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{B})$. Dann existiert $y \in X$ mit $a \in B_y$ und $x \in B_y$, also $y \in C$. Jetzt folgt $d(a,z) \leq d(a,y) + d(y,x) + d(x,z) < \frac{1}{4} r_y + \frac{1}{4} r_y + \frac{1}{4} r_z \leq \frac{3}{4} r < r_z$ und somit $a \in S(z, r_z) \subset A_z$. Also gilt $\mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{B}) \subset A_z$.
$\square$

1.3.10 Aufgaben

L Prüfen Sie, ob die folgenden Behauptungen richtig sind:

(1) Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Überdeckungen von X. Dann gilt:

$$(\mathcal{A} < \mathcal{B} \text{ und } \mathcal{A} < \mathcal{C} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} < \{B \cap C \mid B \in \mathcal{B} \text{ und } C \in \mathcal{C}\}.$$

(2) $\mathcal{A}$ wird genau dann von einer offenen Überdeckung in $\underline{X}$ verfeinert, wenn $\mathcal{B} = \{\mathrm{int}_{\underline{X}} A \mid A \in \mathcal{A}\}$ eine Überdeckung von X ist.

(3) In einem endlichen topologischen Raum existiert zu jeder offenen Überdeckung eine offene Sternverfeinerung.

1.4 Beispiele von topologischen Räumen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige spezielle topologische Räume, auf die später oft zurückgegriffen wird. Das erste Beispiel ist bereits mehrfach erwähnt worden.

1.4.1 Beispiel *(Coendliche Topologie)*

Jede Menge X kann mit der coendlichen Topologie $\mathcal{T}_e = \{A \subset X \mid X \setminus A$ endlich$\} \cup \{\emptyset\}$ versehen werden. Für endliches X ist $\underline{X} = (X, \mathcal{T}_e)$ diskret. Für unendliches X gilt $\omega\underline{X} = \operatorname{card} X$ (siehe 1.1.16(3)), während $\delta\underline{X} = \aleph_0$ stets abzählbar ist. Letzteres folgt aus der Tatsache, daß jede endliche Teilmenge von X abgeschlossen ist und somit nicht dicht in $\underline{X}$ ist (so daß also $\delta\underline{X} \geq \aleph_0$ folgt), daß aber jede unendliche Teilmenge von X dicht in $\underline{X}$ ist, weil sie jede nichtleere offene Menge treffen muß. Weil X eine abzählbar unendliche Teilmenge enthält, folgt $\delta\underline{X} \leq \aleph_0$.

1.4.2 Beispiel *(Coabzählbare Topologie)*

Jede Menge X kann mit der coabzählbaren Topologie $\mathcal{T}_a = \{A \subset X \mid X \setminus A$ ist höchstens abzählbar$\} \cup \{\emptyset\}$ versehen werden. Für höchstens abzählbares X ist $\underline{X} = (X, \mathcal{T}_a)$ diskret. Für überabzählbares X gilt

$$\delta\underline{X} = \aleph_1 \quad \text{und} \quad \omega\underline{X} = \operatorname{card} X.$$

Alle diese Aussagen bestätigt man ganz analog zu den entsprechenden Aussagen für die coendliche Topologie. Führen Sie diese Beweise zur Übung selbständig aus.

1.4.3 Beispiel *(Sorgenfrey-Gerade)*

Die Menge $\mathcal{B} = \{[r, s[\mid r \in \mathbb{R} \text{ und } s \in \mathbb{R}\}$ ist nach 1.1.13 Basis einer Topologie $\mathcal{T}_s$ auf $\mathbb{R}$. Der topologische Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ wird nach seinem Konstrukteur Sorgenfrey-Gerade genannt und mit $\underline{\mathbb{R}}_s$ bezeichnet. Dieser Raum ist sorgfältig von der euklidischen Geraden $\underline{\mathbb{R}}$ zu unterscheiden, denn die Topologie $\mathcal{T}_s$ ist echt feiner
L als $\mathcal{T}_{d_E}$, d.h. $\mathcal{T}_{d_E} \subset \mathcal{T}_s$, aber $\mathcal{T}_{d_E} \neq \mathcal{T}_s$. (Überzeugen Sie sich hiervon bitte selbst!) Offenbar ist $\mathbb{Q}$ dicht in $\underline{\mathbb{R}}_s$, während eine endliche Menge sicherlich nicht dicht in $\underline{\mathbb{R}}_s$ ist. Somit gilt $\delta\underline{\mathbb{R}}_s = \aleph_0 = \delta\underline{\mathbb{R}}$. Hingegen ist $\omega\underline{\mathbb{R}}_s = \operatorname{card}\mathbb{R} = c$. In der Tat, wegen $\operatorname{card}\mathcal{B} = c$ gilt $\omega\underline{\mathbb{R}}_s \leq c$. Für jede andere Basis $\mathcal{A}$ von $\underline{\mathbb{R}}_s$ kann man zu jedem $x \in \mathbb{R}$ wegen

$$[x, \rightarrow [:= \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq x\} = \bigcup\{[x, x+n[\mid n \in \mathbb{N}\} \ \in \mathcal{T}_s$$

ein $A_x \in \mathcal{A}$ mit $x \in A_x \subset [x, \to [$ wählen. Die Abbildung $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}$, $x \mapsto A_x$, ist wegen $x = \min A_x$ injektiv, also $c \leq \operatorname{card} \mathcal{A}$. Damit ist $\omega \underline{\mathbb{R}}_s = c$ bewiesen. Als Folgerung ergibt sich mit 1.2.34(2):

Die Sorgenfrey-Gerade ist nicht metrisierbar.

Wir bemerken ferner, daß $\underline{\mathbb{R}}_s$ dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt, da $\{[x, \frac{1}{n}[\mid n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Umgebungsbasis von x ist. Weil $\underline{\mathbb{R}}_s$ eine abzählbare dichte Teilmenge enthält, sehen wir insbesondere, daß die Äquivalenzaussage des Satzes 1.1.17 für nichtmetrisierbare Räume im allgemeinen falsch ist.

1.4.4 Beispiel *(D-zerstreute Gerade)*

Es sei $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{d_E}$ die kanonische Topologie auf $\mathbb{R}$, und D sei eine dichte Teilmenge von $\underline{\mathbb{R}}$. Dann ist $\mathcal{T} \cup \mathcal{P}D$ nach 1.1.13 Basis einer Topologie $\mathcal{T}_D$ auf $\mathbb{R}$. (Bestätigen

L Sie das bitte selbst). Der topologische Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_D)$ heißt *D-zerstreute Gerade* und wird mit $\underline{\mathbb{R}}_D$ bezeichnet. Wie im Falle der Sorgenfrey-Geraden ist die Topologie $\mathcal{T}_D$ echt feiner als $\mathcal{T}$. (Definitionsgemäß gilt $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_D$, und für jedes $d \in D$ ist $\{d\} \in \mathcal{T}_D$, aber $\{d\} \notin \mathcal{T}$.) Im übrigen verhält sich $\underline{\mathbb{R}}_D$ jedoch sehr unterschiedlich von $\underline{\mathbb{R}}_s$. So ist

$$\delta \underline{\mathbb{R}}_D = \omega \underline{\mathbb{R}}_D = \operatorname{card} D.$$

Die Aussage über die Dichte folgt, weil D die kleinste dichte Menge in $\underline{\mathbb{R}}_D$ ist. (Offenbar ist D dicht in $\underline{\mathbb{R}}_D$, denn jede nichtleere Menge in der Basis $\mathcal{T} \cup \mathcal{P}D$ und damit jede nichtleere $\mathcal{T}_D$-offene Menge trifft D. Andererseits gilt für jede dichte Menge E in $\mathbb{R}_D$ schon $D \subset E$, denn E trifft die offenen Mengen $\{d\}$, $d \in D$.) Nach Satz 1.2.33 folgt nun $\omega \underline{\mathbb{R}}_D \geq \delta \underline{\mathbb{R}}_D = \operatorname{card} D$. Für "$\leq$" genügt es, eine Basis von $\underline{\mathbb{R}}_D$ der Kardinalität card D zu finden. Man sieht aber unmittelbar, daß

$$\mathcal{A} = \{]a, b[\mid a \in D \text{ und } b \in D\} \cup \{\{a\} \mid a \in D\}$$

eine Basis von $\underline{\mathbb{R}}_D$ ist, weil jedes Element von $\mathcal{T} \cup \mathcal{P}D$ Vereinigung von Elementen in $\mathcal{A}$ ist.

Leider kann man aus $\delta \underline{\mathbb{R}}_D = \omega \underline{\mathbb{R}}_D = \operatorname{card} D$ weder auf Metrisierbarkeit noch auf Nichtmetrisierbarkeit von $\underline{\mathbb{R}}_D$ schließen. In der Tat hängt die Frage der Metrisierbarkeit von der Auswahl von D ab, wie Sie jetzt selbst zeigen sollen.

1.4.5 Aufgabe

L (1) Zeigen Sie, daß $\underline{\mathbb{R}}_{\mathbb{Q}}$ metrisierbar ist.

(Tip: Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijektiv und (r_n) eine Folge positiver reeller Zahlen, so

daß $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n$ konvergiert. Setze $d(x,x) = 0$ und $d(x,y) = \sum\limits_{n\in D(x,y)} r_n$ für $x \neq y$, mit $D(x,y) = \{n \in \mathbb{N} \mid \min\{x,y\} \leq f(n) \leq \max\{x,y\}\}$).
(2) Zeigen Sie, daß $\underline{\mathbb{R}}_{\mathbb{P}}$ nicht metrisierbar ist mit $\mathbb{P} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. [Tip: Angenommen, d sei eine Metrik auf $\mathbb{R}$, die $\mathcal{T}_{\mathbb{P}}$ induziert. Für $x \in \mathbb{P}$ sei $r(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}\setminus\{x\}) > 0$. Sei $A_n = \{x \in \mathbb{P} \mid r(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Nach dem Baireschen Kategoriensatz sind nicht alle A_n nirgends dicht in $\underline{\mathbb{R}}$. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.]

1.4.6 Beispiele *(Ordnungstopologien)*

Sei $(X,\leq)$ eine linear geordnete Menge (NM 4.1.8). Für jedes $x \in X$ sei: $]x,\rightarrow[\ = \{y \in X \mid x < y\}$ und $]\leftarrow,x[\ = \{y \in X \mid y < x\}$. Die Menge $\mathcal{S}_o = \{]\leftarrow,x[\mid x \in X\}$ ist Subbasis einer Topologie $\mathcal{T}_o$ auf X, welche die bzgl. $\leq$ *obere Topologie* genannt wird. Die Menge $\mathcal{S}_u = \{]x,\rightarrow[\mid x \in X\}$ ist Subbasis einer Topologie $\mathcal{T}_u$ auf X, welche die bzgl. $\leq$ *untere Topologie* genannt wird. Die Menge $\mathcal{S}_o \cup \mathcal{S}_u$ ist Subbasis einer Topologie $\mathcal{T}(\leq)$ auf X, welche die durch $\leq$ induzierte *Ordnungstopologie* genannt wird. Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt *ordnungsfähig*, falls eine lineare Ordnung $\leq$ auf X mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\leq)$ existiert.

Spezialfälle:
(1) Sei $\leq$ die natürliche Ordnung auf $\mathbb{R}$. Die zugehörige Ordnungstopologie $\mathcal{T}(\leq)$ ist identisch mit der kanonischen (d.h. durch die natürliche Metrik induzierten)
L Topologie auf $\mathbb{R}$. (Bestätigen Sie dieses bitte selbst.) Der topologische Raum $\underline{\mathbb{R}}$ ist also sowohl metrisierbar als auch ordnungsfähig. Den topologischen Raum $(\mathbb{R},\mathcal{T}_o)$ bezeichnen wir mit $\underline{\mathbb{R}}_o$, den topologischen Raum $(\mathbb{R},\mathcal{T}_u)$ mit $\underline{\mathbb{R}}_u$. Analog sind für $\mathbb{I} = [0,1]$ die Räume $\underline{\mathbb{I}}_o$ und $\underline{\mathbb{I}}_u$ definiert.
(2) Ordnet man die Menge $X = \mathbb{R}\times\{0,1\}$ durch $(r,n) \leq (s,m) \iff [(r < s)$ oder $(r = s$ und $n \leq m)]$, so ist der Raum $\underline{X} = (X,\mathcal{T}(\leq))$ separabel, denn $\mathbb{Q}\times\{0\}$ ist dicht in $\underline{X}$, da jedes Element der Subbasis $\mathcal{S}_o \cup \mathcal{S}_u$ und somit jedes nichtleere Element von $\mathcal{T}(\leq)$ die Menge $\mathbb{Q}\times\{0\}$ trifft. Hingegen ist $\omega\underline{X} = c$: Einerseits ist die Menge

$$\mathcal{B} = \{]x,y[\mid x \in X \text{ und } y \in X\}$$

mit $]x,y[=]x,\rightarrow[\ \cap\ ]\leftarrow,y[$ eine Basis von $\underline{X}$ mit $\operatorname{card}\mathcal{B} = c$, so daß $\omega\underline{X} \leq c$ gilt. Andererseits gibt es zu gegebener Basis $\mathcal{A}$ von $\underline{X}$ und jedem $r \in \mathbb{R}$ ein $A_r \in \mathcal{A}$ mit $(r,1) \in A_r \subset\ ](r,0),\rightarrow[$. Die Abbildung $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}, r \mapsto A_r$, ist wegen $(r,1) = \min A_r$ injektiv, so daß $c \leq \operatorname{card}\mathcal{A}$ und schließlich $c \leq \omega\underline{X}$ folgt.
Mit 1.2.34(2) folgert man nun, daß der ordnungsfähige Raum $\underline{X}$ nicht metrisierbar ist.

(3) (*Dieses Beispiel setzt Kenntnisse aus der Ordinalzahltheorie voraus.*).
Sei α eine Ordnungszahl, sei $W(\alpha)$ die Menge aller Ordnungszahlen β mit $\beta < \alpha$ und sei $\leq$ die natürliche Ordnung auf $W(\alpha)$. Den topologischen Raum $(W(\alpha), \mathcal{T}(\leq))$ bezeichnen wir mit $\underline{W(\alpha)}$. Ist α endlich, so ist $\underline{W(\alpha)}$ diskret. Wie wir später sehen werden, ist $\underline{W(\alpha)}$ genau dann metrisierbar, wenn α abzählbar ist. Besonders interessant ist der Raum $\underline{W(\omega_1)}$, wobei ω_1 die kleinste überabzählbare Ordnungszahl ist. Er verhält sich "lokal" höchst anständig, ist aber "global" recht unangenehm. Zwar genügt $\underline{W(\omega_1)}$ dem ersten Abzählbarkeitsaxiom und es gilt $\delta\underline{W(\omega_1)} = \omega\underline{W(\omega_1)} = \aleph_1$, wie man leicht bestätigt.
Aber es gilt:
$\underline{W(\omega_1)}$ *ist nicht metrisierbar.*

Der Beweis dieser Aussage ist schwieriger als die entsprechende Aussage in den zuvor behandelten Beispielen. Er beruht auf einer Anwendung des Satzes 1.3.9, wonach es genügt zu zeigen, daß die offene Überdeckung $\mathcal{A} = \{] \leftarrow, \alpha[\mid \alpha < \omega_1\}$ keine offene Sternverfeinerung in $\underline{W(\omega_1)}$ besitzt. Der Beweis dieser Hilfsaussage macht Gebrauch von der merkwürdigen Tatsache, daß jede abzählbare Teilmenge von $W(\omega_1)$ ein Supremum in $(W(\omega_1), \leq)$ besitzt. Sei nun $\mathcal{B}$ eine beliebige offene Überdeckung von $\underline{W(\omega_1)}$. Dann existiert zu jedem $\alpha \in W(\omega_1)$ mit $\alpha > 0$ ein $\alpha' \in W(\omega_1)$ mit $\alpha' < \alpha$ und ein B_α in $\mathcal{B}$ mit $]\alpha', \alpha] \subset B_\alpha$. Wir wollen zunächst zeigen, daß ein γ derart in $W(\omega_1)$ existiert, daß zu jedem $\alpha \in W(\omega_1)$ ein $\beta \in W(\omega_1)$ mit $\alpha < \beta$ und $\beta' < \gamma$ existiert. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es zu jedem $\alpha \in W(\omega_1)$ ein $\alpha^* \in W(\omega_1)$ derart, daß aus $\alpha^* < \beta$ stets $\alpha \leq \beta'$ folgte. Somit könnten wir per Induktion eine Folge $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \cdots$ in $W(\omega_1)$ derart konstruieren, daß aus $\alpha_{n+1} < \beta$ stets $\alpha_n \leq \beta'$ folgte. Die abzählbare Menge $\{\alpha_n \mid n \geq 0\}$ hätte ein Supremum β in $W(\omega_1)$. Wegen $\alpha_{n+1} < \beta$ würde $\alpha_n \leq \beta'$ für jedes n und somit $\beta = \mathrm{Sup}\{\alpha_n \mid n \geq 0\} \leq \beta'$ folgen, was der Ungleichung $\beta' < \beta$ widerspräche. Somit existiert ein $\gamma \in W(\omega_1)$ derart, daß zu jedem $\alpha \in W(\omega_1)$ ein $\beta \in W(\omega_1)$ mit $\alpha < \beta$ und $\beta' < \gamma$ existiert. Gilt insbesondere $\gamma < \alpha$, so gilt $\beta' < \gamma < \alpha < \beta$, woraus $[\gamma, \alpha] \subset]\beta', \beta[\subset B_\beta$ folgt. Also gilt $\mathrm{St}(\{\gamma\}, B) \supset\ ]\gamma, \rightarrow[$. Da kein Element von $\mathcal{A}$ eine Menge der Form $]\gamma, \rightarrow[$ umfaßt, ist $\{\mathrm{St}(\{\alpha\}, \mathcal{B}) \mid \alpha \in W(\omega_1)\}$ keine Verfeinerung von $\mathcal{A}$. Somit kann $\mathcal{B}$ nicht offene schwache Sternverfeinerung von $\mathcal{A}$ sein, also erst recht keine offene Sternverfeinerung.
Damit ist die Nichtmetrisierbarkeit von $\underline{W(\omega_1)}$ bewiesen.

Lösungshinweise zu § 1

1.1.2 (3) Jede der Mengen $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ ist eine Topologie auf $X = \{0,1\}$. Eine beliebige Topologie $\mathcal{T}$ auf X erfüllt (T1) und somit $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$. Gilt $\{0\} \in \mathcal{T}$, so ist $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$ oder $\mathcal{T} = \mathcal{T}_3$. Andernfalls folgt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$ oder $\mathcal{T} = \mathcal{T}_2$.

1.1.3 (1) (T1) $\emptyset$ ist trivialerweise offen bzgl. d, und wegen $S(x,1) \subset X$ für alle $x \in X$ ist auch X offen bzgl. d.
(T2) Sind A und B offen bzgl. d und $x \in A \cap B$, so gibt es $r, s > 0$ mit $S(x,r) \subset A$ und $S(x,s) \subset B$, und es folgt

$$S(x,\ \min\{r,s\}) \subset S(x,r) \cap S(x,s) \subset A \cap B.$$

(T3) zu $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_d$ und $x \in \bigcup \mathcal{A}$ gibt es $A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A$ und dann ein $r > 0$ mit $S(x,r) \subset A$. Wegen $A \subset \bigcup \mathcal{A}$ ist $\bigcup \mathcal{A}$ also offen bzgl. d.

1.1.7 (1) Es ergibt sich sukzessive

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \{\emptyset,\ \{a,b\},\ \{b,c\},\ X\}, \\ \mathcal{A}'' &= \{\emptyset,\ \{b\},\ \{a,b\},\ \{b,c\},\ X\}, \\ \mathcal{A}''' &= \{\emptyset,\ \{b\},\ \{a,b\},\ \{b,c\},\ \{a,b,c\},\ X\}, \end{aligned}$$

womit $\mathcal{A}'''$ nach 1.1.6 die von $\mathcal{A}$ erzeugte Topologie auf X ist.

(2) Wegen

$$\bigcap_{i=1}^{n} X \setminus \{x_1\} = X \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$$

ergibt sich in der Bezeichnungsweise von 1.1.6

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'' &= \{X \setminus E \,|\, E \subset X \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\} \\ &= \{A \subset X \,|\, X \setminus A \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}. \end{aligned}$$

Für jedes $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}''$ gilt

$$X \setminus \cup\mathcal{B} = \begin{cases} \bigcap\{X \setminus A \,|\, A \in \mathcal{B}\} & \text{für } \mathcal{B} \neq \emptyset, \\ X & \text{für } \mathcal{B} = \emptyset\ , \end{cases}$$

also $\bigcup \mathcal{B} \in A''$. Somit ist $\mathcal{A}''' = \mathcal{A}''$ die von $\mathcal{A}$ erzeugte Topologie auf X.

1.1.11 Man muß zunächst verifizieren, daß die Kugeln $S(x,r)$ wirklich offen bzgl. d sind (vgl. MR 1.2.21; zu jedem $y \in S(x,r)$ wähle man $s = r - d(x,y)$ und zeige dann $S(y,s) \subset S(x,r)$). Zu jeder bzgl. d offenen Menge B und jedem $x \in B$ gibt es definitionsgemäß ein $r > 0$ mit $x \in S(x,r) \subset B$. Mit $n \geq \frac{1}{r}$ folgt dann $x \in S(x, \frac{1}{n}) \subset S(x,r) \subset B$, so daß die Aussage aus 1.1.10 (1) folgt.

1.1.12 (1) $\{\bigcup \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subset \{X\}\} = \{\bigcup \emptyset,\ \bigcup\{X\}\} = \{\emptyset, X\}$.
(2) Für jedes $A \subset X$ gilt $A = \bigcup\{\{x\} \mid x \in A\}$.
(3) $\mathcal{A} = \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$ ist nach 1.1.7 eine Subbasis der coendlichen Topologie. Für $X = \emptyset$ ist $\mathcal{A} = \emptyset$, welches eine Basis der einzigen Topologie $\{\emptyset\}$ auf X ist. Ist $X = \{a\}$ einpunktig, so ist $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$ keine Basis der einzigen Topologie auf X, weil sich X nicht als Vereinigung einer Teilmenge von $\mathcal{A}$ darstellen läßt. Für zweipunktiges $X = \{a,b\}$ ergibt sich $\mathcal{A} = \{\{a\},\ \{b\}\}$, welches nach (2) eine Basis der diskreten (= coendlichen) Topologie auf X ist. Gibt es drei verschiedene Punkte a,b,c in X, so enthält die in der coendlichen Topologie offene Menge $X \setminus \{a,b\}$ den Punkt c, aber es gibt kein $x \in X$ mit $X \setminus \{x\} \subset X \setminus \{a,b\}$. Mithin ist das Basiskriterium 1.1.10(1) verletzt.

1.1.17 (2) Sei $z \in U \in \mathcal{T}_d$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $S(z, \frac{1}{n}) \subset U$. Da D dicht und $S(z, \frac{1}{2n})$ offen ist, ist $S(z, \frac{1}{2n}) \cap D \neq \emptyset$, d.h. es gibt ein $x \in D$ mit $d(z,x) < \frac{1}{2n}$. Dann ist $S(x, \frac{1}{2n}) \in \mathcal{A}$ und $S(x, \frac{1}{2n}) \subset S(z, \frac{1}{n}) \subset U$, da für jedes $y \in S(x, \frac{1}{2n})$ gilt $d(z,y) \leq d(z,x) + d(x,y) \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$.

1.1.21 (4) Nach 1.1.6 ist die von $\mathcal{A} = \bigcup \tau$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}_0$ die kleinste $\mathcal{A}$ umfassende Topologie auf X. Für jedes $\mathcal{T} \in \tau$ gilt wegen $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_0$ also $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0$. Ferner, jedwede Topologie $\mathcal{S}$ auf X mit $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ für alle $\mathcal{T} \in \tau$ erfüllt $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ und folglich $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{S}$ wegen der Minimalitätseigenschaft von $\mathcal{T}_0$.

1.1.23 (1), (2) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}, \mathcal{A}_1 = \{X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_1$, $\omega(X, \mathcal{T}_1) = 1$.

$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{0\}\}, \mathcal{A}_2 = \{\{0\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_2$, $\omega(X, \mathcal{T}_2) = 2$.

$\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{1\}\}, \mathcal{A}_3 = \{\{1\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_3$, $\omega(X, \mathcal{T}_3) = 2$.

$\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, X, \{2\}\}, \mathcal{A}_4 = \{\{2\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_4$, $\omega(X, \mathcal{T}_4) = 2$.

$\mathcal{T}_5 = \{\emptyset, X, \{1,2\}\}, \mathcal{A}_5 = \{\{1,2\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_5$, $\omega(X, \mathcal{T}_5) = 2$.

$\mathcal{T}_6 = \{\emptyset, X, \{0,2\}\}, \mathcal{A}_6 = \{\{0,2\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_6$, $\omega(X, \mathcal{T}_6) = 2$.

$\mathcal{T}_7 = \{\emptyset, X, \{0,1\}\}, \mathcal{A}_7 = \{\{0,1\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_7$, $\omega(X, \mathcal{T}_7) = 2$.

$\mathcal{T}_8 = \{\emptyset, X, \{0\}, \{0,1\}\}, \mathcal{A}_8 = \{\{0\}, \{0,1\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_8$, $\omega(X, \mathcal{T}_8) = 3$.

$\mathcal{T}_9 = \{\emptyset, X, \{0\}, \{0,2\}\}, \mathcal{A}_9 = \{\{0\}, \{0,2\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_9$, $\omega(X, \mathcal{T}_9) = 3$.

$\mathcal{T}_{10} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{0,1\}\}, \mathcal{A}_{10} = \{\{1\}, \{0,1\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_{10}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{10}) = 3$.

$\mathcal{T}_{11} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1,2\}\}, \mathcal{A}_{11} = \{\{1\}, \{1,2\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_{11}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{11}) = 3$.

$\mathcal{T}_{12} = \{\emptyset, X, \{2\}, \{0,2\}\}, \mathcal{A}_{12} = \{\{2\}, \{0,2\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_{12}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{12}) = 3$.

$\mathcal{T}_{13} = \{\emptyset, X, \{2\}, \{1,2\}\}, \mathcal{A}_{13} = \{\{2\}, \{1,2\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_{13}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{13}) = 3$.

$\mathcal{T}_{14} = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1,2\}\}, \mathcal{A}_{14} = \{\{0\}, \{1,2\}\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_{14}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{14}) = 2$.

$\mathcal{T}_{15} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{0,2\}\}, \mathcal{A}_{15} = \{\{1\}, \{0,2\}\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_{15}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{15}) = 2$.

$\mathcal{T}_{16} = \{\emptyset, X, \{2\}, \{0,1\}\}, \mathcal{A}_{16} = \{\{2\}, \{0,1\}\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_{16}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{16}) = 2$.

$\mathcal{T}_{17} = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \mathcal{A}_{17} = \{\{0\}, \{1\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_{17}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{17}) = 3$.

$\mathcal{T}_{18} = \{\emptyset, X, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}\}, \mathcal{A}_{18} = \{\{0\}, \{2\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_{18}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{18}) = 3$.

$\mathcal{T}_{19} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}, \mathcal{A}_{19} = \{\{1\}, \{2\}, X\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_{19}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{19}) = 3$.

$\mathcal{T}_{20} = \{\emptyset, X, \{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}\}, \mathcal{A}_{20} = \{\{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_{20}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{20}) = 3$.

$\mathcal{T}_{21} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}\}, \mathcal{A}_{21} = \{\{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}\}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_{21}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{21}) = 3$.

$\mathcal{T}_{22} = \{\emptyset, X, \{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}\}$, $\mathcal{A}_{22} = \{\{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}\}$ ist Basis von $\mathcal{T}_{22}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{22}) = 3$.

$\mathcal{T}_{23} = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,2\}\}$, $\mathcal{A}_{23} = \{\{0\}, \{1\}, \{0,2\}\}$ ist Basis von $\mathcal{T}_{23}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{23}) = 3$.

$\mathcal{T}_{24} = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{1,2\}\}$, $\mathcal{A}_{24} = \{\{0\}, \{1\}, \{1,2\}\}$ ist Basis von $\mathcal{T}_{24}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{24}) = 3$.

$\mathcal{T}_{25} = \{\emptyset, X, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}, \{0,1\}\}$, $\mathcal{A}_{25} = \{\{0\}, \{2\}, \{0,1\}\}$ ist Basis von $\mathcal{T}_{25}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{25}) = 3$.

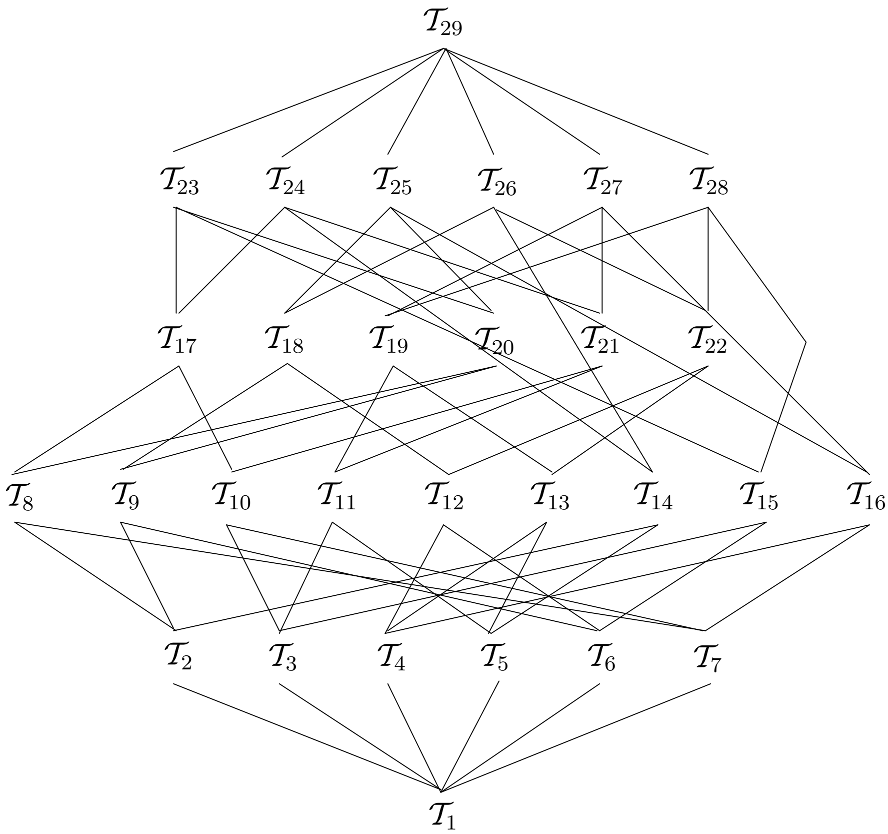
$\mathcal{T}_{26} = \{\emptyset, X, \{0\}, \{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}\}$, $\mathcal{A}_{26} = \{\{0\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ ist Basis von $\mathcal{T}_{26}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{26}) = 3$.

$\mathcal{T}_{27} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{0,1\}\}$, $\mathcal{A}_{27} = \{\{1\}, \{2\}, \{0,1\}\}$ ist Basis von $\mathcal{T}_{27}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{27}) = 3$.

$\mathcal{T}_{28} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{0,2\}\}$, $\mathcal{A}_{28} = \{\{1\}, \{2\}, \{0,2\}\}$ ist Basis von $\mathcal{T}_{28}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{28}) = 3$.

$\mathcal{T}_{29} = \mathcal{P}X$, $\mathcal{A}_{29} = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ ist Basis von $\mathcal{T}_{29}$, $\omega(X, \mathcal{T}_{29}) = 3$.

1.1.23 (3)



1.2.6 Für A abgeschlossen in $\underline{X}$, $t > 0$ und für jedes $x \in A_t$ ist $r := t - \operatorname{dist}(x, A) > 0$. Wir behaupten, daß $S(x, r) \subset A_t$ gilt. Jedes $y \in S(x, r)$ erfüllt $d(x, y) + \operatorname{dist}(x, A) < t$, so daß es genügt, $\operatorname{dist}(y, A) \leq d(x, y) + \operatorname{dist}(x, A)$ zu zeigen. Nun ist aber für alle $z \in A$

$$\operatorname{dist}(y, A) - d(x, y) \;\leq\; d(y, z) - d(x, y) \;\leq\; d(x, z),$$

also $\operatorname{dist}(y, A) - d(x, y) \;\leq\; \operatorname{dist}(x, A)$.

1.2.7 (1) Jedes A_n ist von der Form $A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{n,i}$ mit abgeschlossenen Mengen $A_{n,i}$ $(i \in \mathbb{N})$. Es ist dann

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} (A_{1,i} \cap A_{2,j}), \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &= \bigcup_{(n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} A_{n,i} \quad , \end{aligned}$$

so daß beide Mengen Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen und somit F_σ-Mengen sind.

(2) Die Behauptung ist, daß mit A_n $(n \in \mathbb{N})$ auch $A_1 \cup A_2$ und $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ G_δ-Mengen in $\underline{X}$ sind. Nach 1.2.6 (1) ist $X \setminus A_n$ eine F_σ-Menge für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit nach (1) auch

$$\begin{aligned} (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_1) &= X \setminus (A_1 \cup A_2), \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) &= X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n . \end{aligned}$$

Abermalige Anwendung von 1.2.6 (1) zeigt, daß $A_1 \cup A_2$ und $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ G_δ-Mengen in $\underline{X}$ sind.

(3) folgt unmittelbar aus $A = \bigcup\limits_{x \in A} \{x\}$, wenn A abzählbar und jedes $\{x\}$ abgeschlossen in $\underline{X}$ ist.

1.2.13 (1) Jede offene Menge B mit $A \subset B$ ist Umgebung von A (vgl. 1.2.9(1)). Zu jeder Umgebung V von A existiert definitionsgemäß eine offene Menge $U \supset A$ mit $U \subset V$.

(2) Zu jeder offenen Umgebung V von x gibt es nach 1.1.10 (1) ein $U \in \mathcal{B}$ mit

$x \in U \subset V$, also $U \in \mathcal{B}(x)$. Dieses zeigt nach 1.2.9(2) die Behauptung.
(3) wird wie 1.1.11 gezeigt.
(4) Wegen der Endlichkeit von $\mathcal{T}$ ist die Menge U_A nach (T2) offen und deshalb eine Umgebung von A. Zu jeder Umgebung V von A gibt es eine offene Menge B mit $A \subset B \subset V$ und somit $U_A \subset B$.

1.2.16 Für jedes A mit $x \in A$ gilt $\{x\} \subset A$; also ist $\{\{x\}\}$ eine Umgebungsbasis von x in $(X, \mathcal{P}X) = \underline{X}$. Ist $\mathcal{A}$ eine Basis von $\underline{X}$, so gibt es für jedes $x \in X$ wegen der Offenheit von $\{x\}$ ein $A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A \subset \{x\}$, so daß also $\{x\} = A \in \mathcal{A}$ ist. Mithin ist $\{\{x\} \mid x \in X\} \subset \mathcal{A}$ und somit $\mathcal{A}$ überabzählbar.

1.2.21 Wegen (A offen $\iff$ $A = \operatorname{int} A$) (siehe 1.2.18) folgen (1) und (2) unmittelbar aus 1.1.2 (1), (2).
(3) Ist $\mathcal{T}$ die coendliche Topologie, so ist im Falle $X \setminus A$ endlich die Menge A offen, also $\operatorname{int} A = A$. Im Falle $X \setminus A$ unendlich ist auch $X \setminus B$ unendlich für jede Teilmenge $B \subset A$, d.h. $\emptyset$ ist die einzige (und damit größte) offene Teilmenge von A, also $\operatorname{int} A = \emptyset$. Gilt umgekehrt die angegebene Bedingung für int, so folgt (A offen $\iff$ $\operatorname{int} A = A$ $\iff$ $X \setminus A$ endlich oder $A = \emptyset$), d.h. $\mathcal{T}$ ist die coendliche Topologie auf X.

1.2.22 Für eine Topologie $\mathcal{S}$ auf X mit $\operatorname{int}_{(X,\mathcal{S})} A = i(A)$ für alle $A \subset X$ gilt notwendig

$$A \in \mathcal{S} \iff \operatorname{int}_{(X,\mathcal{S})} A = A \iff A = i(A),$$

d.h. die Eindeutigkeitsaussage für $\mathcal{S}$ ist offensichtlich. Zum Existenznachweis definiert man $\mathcal{S}$ also durch ($A \in \mathcal{S} :\iff A = i(A)$) und muß nun zunächst (T1) - (T3) verifizieren: X und $\emptyset$ gehören wegen der Eigenschaften (1) und (2) zu $\mathcal{S}$. (T2) folgt aus (3). Wegen (4) gilt für $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ und alle $A \in \mathcal{A}$

$$A = i(A) \subset i(\bigcup \mathcal{A}) ,$$

also $\bigcup \mathcal{A} \subset i(\bigcup \mathcal{A})$ und somit $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{S}$ wegen (2).
Es ist nun noch $\operatorname{int}_{X,\mathcal{S})} A = i(A)$ für alle $A \subset X$ zu zeigen. Nach (5) ist aber $i(A) \in \mathcal{S}$, so daß nach (2) $i(A)$ eine offene Teilmenge von A ist und somit sogar eine Teilmenge der größten offenen Teilmenge von A, d.h. $i(A) \subset \operatorname{int}_{(X,\mathcal{S})}(A)$. Andererseits gilt $\operatorname{int}_{(X,\mathcal{S})} A \in \mathcal{S}$, so daß wegen (2)

$$\operatorname{int}_{(X,\mathcal{S})} A = i(\operatorname{int}_{(X,\mathcal{S})} A) \subset i(A)$$

gilt.

1.2.29 $\underline{X}$ ist indiskret genau dann, wenn $\mathrm{cl}\, A = X$ für jede nichtleere Teilmenge A von X gilt. $\underline{X}$ ist diskret genau dann, wenn $\mathrm{cl}\, A = A$ für alle A gilt. $\mathcal{T}$ ist die coendliche Topologie auf X genau dann, wenn $\mathrm{cl}\, A = A$ für A endlich und $\mathrm{cl}\, A = X$ für A unendlich gilt. Diese Aussage bestätigt man entweder analog zu 1.2.21 oder folgert sie aus 1.2.21 mit Hilfe der Komplementregel 1.2.25.
Die zu 1.2.22 duale Aussage ist:

Es sei $c : \mathcal{P}X \longrightarrow \mathcal{P}X$ *eine Abbildung, die die Eigenschaften* (1)-(5) *von* 1.2.28 (*mit* c *anstelle von* cl) *erfüllt. Dann existiert genau eine Topologie* $\mathcal{S}$ *auf* X *mit* $\mathrm{cl}_{(X,\mathcal{S})} A = c(A)$ *für alle* $A \subset X$.

Der Beweis wird völlig analog zu 1.2.22 geführt.

1.2.32 (1) Es ist aus der Analysis bekannt, daß jedes Intervall $]a, b[$ mit $a < b$ sowohl rationale als auch irrationale Punkte enthält. Jede nichtleere offene Menge U in $\underline{\mathbb{R}}$ enthält aber ein solches Intervall, so daß $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \neq U \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ gilt. Damit folgt die Behauptung aus 1.2.31.
(2) X ist stets dicht in $\underline{X}$. Ist $\underline{X}$ diskret, so kann eine echte Teilmenge A von X nicht dicht sein, weil sie nicht die nichtleere offene Menge $X \setminus A$ trifft. Ist $\underline{X}$ indiskret, so trifft jede nichtleere Teilmenge D von X die einzige nichtleere offene Menge von $\underline{X}$, nämlich X.

$$
\begin{aligned}
(3)\quad \mathrm{int}\, A \neq \emptyset \quad &\iff \quad \mathrm{cl}\,(X \setminus A) \neq X \quad (\text{nach } 1.2.25)\\
&\iff \quad X \setminus A \text{ ist nicht dicht in } \underline{X}\\
&\iff \quad \text{keine Teilmenge von } X \setminus A \text{ ist dicht in } \underline{X}\\
&\iff \quad D \not\subset X \setminus A \text{ für jedes } D \text{ dicht in } \underline{X}\\
&\iff \quad D \cap A \neq \emptyset \text{ für jedes } D \text{ dicht in } \underline{X}.
\end{aligned}
$$

(4) Wir müssen zeigen, daß jede nichtleere offene Menge U in $\underline{X}$ die Menge $A \setminus \{x\}$ trifft. Weil $\{x\}$ abgeschlossen, ist $X \setminus \{x\}$ und somit $U \setminus \{x\} = U \cap (X \setminus \{x\})$ offen. Ferner ist $U \setminus \{x\}$ nicht leer, weil wegen $\{x\}$ nicht offen $U \neq \{x\}$ ist. Somit ist wegen A dicht $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, also $(A \setminus \{x\}) \cap U \neq \emptyset$.

1.2.38 Nach Definition von $\mathcal{S}$ ist $A \subset X$ abgeschlossen genau dann, wenn $A = X$ oder $x_0 \notin A$ ist. Für die kleinste A enthaltende abgeschlossene Menge ergibt sich somit

$$
\mathrm{cl}\, A = \begin{cases} X, & \text{falls } x_0 \in A,\\ A, & \text{falls } x_0 \notin A. \end{cases}
$$

Daraus folgt mit 1.2.37(2)

$$\operatorname{fr} A = \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl}(X \setminus A) = \begin{cases} X \cap (X \setminus A) = X \setminus A & \text{für } x_0 \in A, \\ A \cap X = A & \text{für } x_0 \notin A. \end{cases}$$

1.3.4 (2) Für X endlich ist auch $\{\{x\} \mid x \in X\}$ endlich, also insbesondere lokal endlich. Für X unendlich hat dagegen *jeder* Punkt $x_0 \in X$ die Eigenschaft, daß es *keine* Umgebung U von x_0 gibt, so daß $U \cap \{x\} \neq \emptyset$ nur für endlich viele $x \in X$ gilt. Ein solches U müßte nämlich dann selbst endlich sein. Aber in der coendlichen Topologie ist für unendliches X auch jede Umgebung eines Punktes unendlich.

1.3.8 (1) In Definition 1.3.5(1) wähle man $B := A$.
(2) Für $\mathcal{A} = \{\,]-n, n[\mid n \in \mathbb{N}\}$ und eine beliebige Überdeckung $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}$ gelte $\mathcal{A} <\!* \mathcal{B}$. Nun ist für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{St}(\{x\}, \mathcal{A}) = \bigcup \{\,]-n, n[\mid n > |x|\} = \mathbb{R}.$$

Folglich existiert $B \in \mathcal{B}$ mit $\mathbb{R} = \operatorname{St}(\{0\}, \mathcal{A}) \subset B$, also $\mathbb{R} = B \in \mathcal{B}$.
Die Umkehrung der Aussage gilt trivialerweise.
(3) Für jedes $x \in X$ ist

$$\operatorname{St}(\{x\}, \mathcal{A}_{\frac{1}{2}r}) = \bigcup \{S(y, \tfrac{1}{2}r) \mid y \in X,\ d(x,y) < \tfrac{1}{2}r\} \subset S(x,r),$$

wie sich sofort aus der Dreiecksungleichung ergibt. Somit gilt $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}r} <\!* \mathcal{A}_r$. Ebenso gilt für jedes $x \in X$

$$\begin{aligned} \operatorname{St}(S(x, \tfrac{1}{3}r), \mathcal{A}_{\frac{1}{3}r}) &= \bigcup \{S(y, \tfrac{1}{3}r) \mid y \in X,\ S(y, \tfrac{1}{3}r) \cap S(x, \tfrac{1}{3}r) \neq \emptyset\} \\ &\subset S(x,r) \end{aligned}$$

und somit $\mathcal{A}_{\frac{1}{3}r} \lll\!* \mathcal{A}_r$. Hingegen ist für $\underline{X} = \underline{\mathbb{R}}$ mit der euklidischen Metrik

$$\operatorname{St}(S(x, \tfrac{1}{2}r), \mathcal{A}_{\frac{1}{2}r}) =]x - \tfrac{3}{2}r,\ x + \tfrac{3}{2}r\,[$$

ein Intervall der Länge $3r$, das somit nicht Teilmenge eines Intervalls $S(z,r) =]z - r, z + r[$ sein kann. Also ist $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}r}$ nicht Sternverfeinerung von $\mathcal{A}_r$.

1.3.10 (1) *Richtig:* Sei $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} < \mathcal{C}$. Zu jedem $A \in \mathcal{A}$ existiert ein $B \in \mathcal{B}$ und ein $C \in \mathcal{C}$ mit $A \subset B$ und $A \subset C$. Hieraus folgt $A \subset B \cap C$ und somit

$\mathcal{A} < \mathcal{D} = \{B \cap C \mid B \in \mathcal{B} \text{ und } C \in \mathcal{C}\}$. Die Umkehrung ist wegen $\mathcal{D} < \mathcal{B}$ und $\mathcal{D} < \mathcal{C}$ und 1.3.6(2) klar.
(2) *Richtig:* Ist $\mathcal{B} = \{\mathrm{int}_{\underline{X}} A \mid A \in \mathcal{A}\}$ eine Überdeckung von X, so ist $\mathcal{B}$ eine offene Verfeinerung von $\mathcal{A}$. Ist umgekehrt $\mathcal{C}$ eine offene Verfeinerung von $\mathcal{A}$, so existiert zu jedem $x \in X$ ein $C \in \mathcal{C}$ mit $x \in C$ und ein $A \in \mathcal{A}$ mit $C \subset A$, woraus $x \in \mathrm{int}_{\underline{X}} A$ folgt. Also ist $\mathcal{B}$ Überdeckung von X.
(3) *Falsch:* Denn in dem topologischen Raum $\underline{X} = \{\{0,1,2\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\})$ existiert zu der offenen Überdeckung $\mathcal{A} = \{\{0,1\}, \{0,2\}\}$ keine offene Sternverfeinerung, denn für jede offene Überdeckung $\mathcal{B}$ von X gilt: $X = \mathrm{St}(\{0\}, \mathcal{B}))$, aber $X \notin \mathcal{A}$.

1.4.2 $\mathcal{T}_a$ ist eine Topologie, weil die Vereinigung zweier höchstens abzählbarer Mengen nur höchstens abzählbar ist und weil Teilmengen abzählbarer Mengen höchstens abzählbar sind. Aus dem Letztgenannten folgt auch, daß $\mathcal{T}_a$ diskret ist für X höchstens abzählbar. $\delta\underline{X} = \aleph_1$ beweist man völlig analog zu dem in 1.4.1 gegebenen Beweis (ersetze "endlich" durch "höchstens abzählbar"). Ebenso geht man zum Nachweis von $\omega\underline{X} = \mathrm{card}\, X$ analog zu 1.1.16(3) vor.

1.4.3 Jede offene Kugel $S(x,r)$ ist offen in $\mathcal{T}_s$, denn es gilt

$$S(x,r) = \bigcup\{[x - r + \tfrac{1}{n},\ x + r[\mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Somit folgt $\mathcal{T}_{d_E} \subset \mathcal{T}_s$. Andererseits ist keines der Elemente der Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{T}_s$ offen bzgl. $\mathcal{T}_{d_E}$.

1.4.4 Die Bedingung (B1) von 1.1.13 ist trivial. (B2): Seien $B, C \in \mathcal{T} \cup \mathcal{P}D$ und $x \in B \cap C$. Gilt $B, C \in \mathcal{T}$, so ist auch $B \cap C \in \mathcal{T}$. Andernfalls ist $B \cap C \subset D$. In jedem Fall hat man also $B \cap C \in \mathcal{T} \cup \mathcal{P}D$.

1.4.5 (1) Wir wollen zeigen, daß die angegebene Abbildung d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ liefert mit $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}(\mathbb{Q})$. Zum Nachweis der Metrikeigenschaften betrachte man die Mengen

$$D(x,y) := \{n \in \mathbb{N} \mid \min\{x,y\} \leq f(n) \leq \max\{x,y\}\}$$

für $x \neq y$ und $D(x,y) = \emptyset$ für $x = y$ und überzeuge sich davon, daß $(D(x,y) = \emptyset \iff x = y)$, $D(x,y) = D(y,x)$ und $D(x,y) \subset D(x,z) \cup D(z,y)$ für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ gilt. Wegen $d(x,y) = \sum\limits_{n \in D(x,y)} r_n$ ist dann alles gezeigt. Zum Nachweis von $\mathcal{T}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{T}_d$ genügt es zu zeigen, daß die Elemente der Basis $\mathcal{A}$ von 1.4.4 offen bzgl. d sind. Für $a, b \in \mathbb{Q}$ hat man $k, m \in \mathbb{N}$ mit $a = f(k)$, $b = f(m)$. Dann ist für jedes $x \in \,]a, b[$ und für $\epsilon := \min\{r_k, r_m\}$ schon $S(x, \epsilon) \subset \,]a, b[$. Denn gäbe es ein $y \in S(x, \epsilon)$ mit $y \leq a = f(k)$ oder $y \geq b = f(m)$, so wäre $k \in D(x, y)$ oder $m \in D(x, y)$, also $d(x, y) \geq r_k$ oder $d(x, y) \geq r_m$, und somit $d(x, y) \geq \epsilon$. Also ist $]a, b[$ offen bzgl. d. Andererseits ist auch $\{a\}$ offen bzgl. d, denn für $\epsilon = r_k$ ist $S(a, \epsilon) = \{a\}$, weil für jedes $y \in S(a, \epsilon), y \neq a$ schon $d(a, y) \geq r_k = \epsilon$ gelten müßte.

Für $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}(\mathbb{Q})$ genügt es, die Kugeln $S(x, \epsilon)$ als offen bzgl. $\mathcal{T}(\mathbb{Q})$ zu erkennen. Im Falle $x \in \mathbb{Q}$, also $x = f(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, kann dabei $\epsilon \leq r_n$ angenommen werden, und es ist dann $S(x, \epsilon) = \{x\}$. Im Falle $x \notin \mathbb{Q}$ zeigen wir, daß

$$S(x, \epsilon) = (S(x, \epsilon) \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup\{\,]a, b[\; \mid a, b \in S(x, \epsilon)\}$$

gilt und die rechte Seite ist offenbar offen bzgl. $\mathcal{T}(\mathbb{Q})$.

“$\supset$“ : Für $y \in \,]a, b[$ mit $a, b \in S(x, \epsilon)$ gilt $y = x$ oder $y \in \,]a, x[$ oder $y \in \,]x, b[$, also $d(x, y) \leq d(x, a) < \epsilon$ oder $d(x, y) \leq d(x, b) < \epsilon$, d.h. $y \in S(x, \epsilon)$.

“$\subset$“ : Sei $y \in S(x, \epsilon)$. Wir können $y \notin \mathbb{Q}$ annehmen, und weiterhin $y \leq x$ (der Fall $y \geq x$ verläuft symmetrisch). Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum r_n$ und wegen $y \notin \mathbb{Q}$ gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, $a < y$, mit $d(a, y) < \epsilon - d(x, y)$, also $d(a, x) \leq d(a, y) + d(x, y) < \epsilon$. Ebenso gibt es wegen $x \notin \mathbb{Q}$ ein $b \in \mathbb{R}$, $x < b$, mit $d(x, b) < \epsilon$. Somit folgt $y \in \,]a, b[$ mit $a, b \in S(x, \epsilon)$.

(2) Für jedes $x \in \mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist $\{x\}$ offen in $\mathcal{T}(\mathbb{P})$. Falls eine Metrik d auf $\mathbb{R}$ gäbe, die $\mathcal{T}(\mathbb{P})$ induziert, so gäbe es ein $\epsilon_x > 0$ mit $S(x, \epsilon_x) = \{x\}$, also

$$r(x) = \mathrm{dist}(x, \mathbb{R} \setminus \{x\}) \geq \epsilon_x > 0.$$

Mit $A_n := \{x \in \mathbb{P} \mid r(x) \geq \frac{1}{n}\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{R} = \bigcup\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \bigcup\{\{r\} \mid r \in \mathbb{Q}\}.$$

Nach dem Baireschen Kategoriensatz (vgl. MR 3.4.3) und weil jedes $\{r\}$ nirgends dicht in $\underline{\mathbb{R}}$ ist, können nicht alle A_n nirgends dicht in $\underline{\mathbb{R}}$ sein. Es existiert also ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{int}_{\underline{\mathbb{R}}}\mathrm{cl}_{\underline{\mathbb{R}}} A_{n_0} \neq \emptyset$.

Die Menge $\mathrm{cl}_{\underline{\mathbb{R}}} A_{n_0}$ enthält also ein nichtleeres offenes Intervall und somit einen rationalen Punkt r_0. Es gibt deshalb eine Folge (s_n) in A_{n_0}, die in $\underline{\mathbb{R}}$ gegen r_0 konvergiert, und somit $(d(r_0, s_n)) \longrightarrow 0$.

Das aber ist wegen

$$d(s_n, s_m) \leq d(r_0, s_n) + d(r_0, s_m)$$

unmöglich, weil für verschiedene $s_n, s_m \in A_{n_0}$ stets $d(s_n, s_m) \geq \frac{1}{n_0}$ gilt.

1.4.6 Nach 1.1.11 ist $\{S(x,r)\,|\,x \in X \text{ und } r > 0\}$ eine Basis von $\mathcal{T}_{d_E}$.

$\mathcal{T}(\leq) \subset \mathcal{T}_{d_E}$, da jedes Element der Subbasis $\mathcal{S}_o \cup \mathcal{S}_u$ von $\mathcal{T}(\leq)$ in $\mathcal{T}_{d_E}$ liegt: $]x, \rightarrow[\; = \bigcup\limits_{r>0} S(x+r, r)$, $]\leftarrow, x[\; = \bigcup\limits_{r>0} S(x-r, r)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{T}_{d_E} \subset \mathcal{T}(\leq)$, da jedes Element der o.g. Basis von $\mathcal{T}_{d_E}$ in $\mathcal{T}(\leq)$ liegt: $S(x,r) = \;]x-r, \rightarrow[\; \cap \;]\leftarrow, x+r[$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $r > 0$.