

Prof. Dr. Franz Locher

Kurs 01370

Mathematische Systemtheorie

LESEPROBE

Fakultät für
**Mathematik und
Informatik**

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung und des Nachdrucks bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung der FernUniversität reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Inhaltsverzeichnis

0	Das Modellproblem: Audio	3
0.1	Töne, Klänge, Geräusche	3
0.2	Digitale Verarbeitung akustischer Signale	7
1	Fehler und Stabilität	12
1.1	Systeme	12
1.2	Sensitivitätsanalyse nichtlinearer Systeme	14
1.3	Zahlendarstellung	20
1.4	Gleitkomma-Arithmetik und numerische Stabilität	24
2	Polynome und rationale Funktionen	28
2.1	Polynome und Polynomauswertung	28
2.2	Spezielle Polynome	37
2.3	Rationale Funktionen	44
2.4	Interpolation mit algebraischen Polynomen	50
3	Präliminarien aus der Funktionentheorie	57
3.1	Komplexe Zahlen und komplexe Funktionen	57
3.2	Einige spezielle Abbildungen	61
3.3	Kurven und Kurvenintegrale	69
3.4	Holomorphie	74
3.5	Laurent-Reihen und Residuensatz	78
4	Diskrete LTI-Systeme und die z-Transformation	88
4.1	Diskrete LTI-Systeme	88
4.2	Die z -Transformation	99
4.3	Untersuchung diskreter LTI-Systeme mit Hilfe der z -Transformierten	116
4.4	Das Anfangswertproblem für lineare Differenzgleichungen	130
4.5	Lattice-Filter und Strukturzerlegungen von Allpässen	134
4.6	Amplituden- und Phasengang	146
4.7	Systeme mit speziellem Amplituden- oder Phasengang	157
5	Fourier-Reihen	167
5.1	Grundzüge der Fourier-Theorie (formaler Teil)	167
5.2	Approximation im Mittel durch das Fourier-Polynom	179
5.3	Darstellung von Funktionen durch ihre Fourier-Reihen (Fourier-Synthese)	184

5.4	Der Dirichlet-Kern und das Gibbsche Phänomen	192
6	Analoge LTI-Systeme und die Fourier-Transformation	204
6.1	Die Fourier-Transformation (formaler Teil)	204
6.2	B-Splines	215
6.3	Analoge LTI-Systeme	219
6.4	LTI-Systeme, die durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden	227
6.5	Lineare Systeme erster oder zweiter Ordnung	232
6.6	Strukturzerlegungen von LTI-Systemen mit rationaler Systemfunktion	242
7	Abtastung analoger Signale und ihre Rekonstruktion	247
7.1	Die ideale Abtastung analoger Signale	247
7.2	Das Abtasttheorem von Whittacker-Shannon-Kotelnikov	254
7.3	Abtastung bandbegrenzter analoger Signale und ihre Rekonstruktion	265
7.4	Quantisierung und Codierung	268
8	Mehrphasenrealisierungen diskreter LTI-Systeme	278
8.1	Up-Sampling und Down-Sampling	278
8.2	Die Mehrphasen-Zerlegung eines diskreten LTI-Systems	291
9	Wavelets	302
9.1	Trigonometrische Wavelets	302
9.2	Nochmals: B-Splines	308
9.3	Spline-Funktionen	322
9.4	Translate und die semidiskrete Faltung	326
9.5	Spline-Wavelets	338
9.6	Wavelet-Transformationen	350
	Index	355
	Symbolverzeichnis	362

0. Das Modellproblem: Audio

In vielen Bereichen der Naturwissenschaft und Technik spielt die Erzeugung, Verarbeitung, Speicherung oder Übertragung von Signalen eine zentrale Rolle. Wir nennen nur einige von vielen Beispielen:

- Telefon, Rundfunk, Fernsehen, Unterhaltungselektronik
- Medizindiagnostik (Ultraschalluntersuchung, Computer- und Kernspin-Tomographie, EKG, EEG)
- Geologie (Seismik, Erdbebenforschung, Lagerstättenexploration)
- Wettervorhersage mit Hilfe von Satellitenaufnahmen
- Radarüberwachung

Die genannten Beispiele spannen einen weiten Rahmen, sowohl was die Art der Signale (Frequenz, Intensität), als auch was die zugehörigen Datenmengen anbetrifft. Bei einer Theorie, die die genannten Phänomene beschreibt, kann man das Augenmerk auf grundlegende Gemeinsamkeiten richten. Dies ergibt dann eine einheitliche Sicht von verwandten Phänomenen. Trotzdem bleiben aber für das tiefere Verständnis eines bestimmten Anwendungsbeispiels noch viele Besonderheiten zu beachten, die eben dieses auszeichnen. Aus diesem Grund und auch weil man das mathematische Modell an Hand einer konkreten Anwendung auf den Prüfstand stellen muß, stellen wir im folgenden das Modell des digitalen Audio vor, wie es beim digitalen Telefon oder bei der digitalen Aufnahme, Verarbeitung und Übertragung von Musik (CD, digitale Rundfunksendungen) zum Einsatz kommt. Aus naheliegenden Gründen ist die Analyse des Audio-Modells sehr phänomenologisch, und auch manche der auftretenden Begriffe werden für denjenigen, der den folgenden Abschnitt zum ersten Mal liest, unbekannt sein. Aber wir meinen, daß durch eine erste (vielleicht nur grobe) Lektüre zu Beginn und vor allem aber durch häufiges Zurückblättern, wenn an späterer Stelle Systeme detailliert untersucht werden, ein tieferes, durch die Modellbildung getragenes Verständnis von Systemen, Signalen und ihrer Verarbeitung entwickelt werden kann. In diesem Sinne!

0.1 Töne, Klänge, Geräusche

Für ein Verständnis von Geräten, die akustische Signale (Sprache, Musik) aufnehmen, verarbeiten, übertragen oder wiedergeben (Telefon, Hifi-Anlage, ...), benötigt

man gewisse Kenntnisse aus der Akustik und der Physiologie der Tonerzeugung und Tonwahrnehmung. Akustische Vorgänge haben ihren Ursprung in Bewegungen von Luftteilchen, die das Sinnesorgan „Gehör“ aufnimmt, in elektrische Impulse umwandelt und an das Gehirn weiterleitet. Dabei findet eine „Verarbeitung“, d.h. eine Analyse nach Tonhöhe, Lautstärke, räumliche Trennung nach unterschiedlichen Tonquellen, Identifikation einer Tonquelle durch Vergleich mit bekannten und vom Gedächtnis gespeicherten Mustern, ... teilweise im Ohr und zum anderen Teil im Gehirn statt.

Am einfachsten zu beschreiben ist ein *Ton*, der aus einer periodischen Schwingung gleichbleibender *Frequenz* der Luftteilchen gegenüber einer Ruhelage (Schallwelle) besteht. Töne gleicher Frequenz können sich hinsichtlich ihrer *Amplitude* (Maximalausschlag) unterscheiden, die ein Maß für die *Lautstärke* ist. Für die Auslenkung $f(t)$ der Luftteilchen gegenüber der Ruhelage als Funktion der Zeit t gilt also (bei geeignetem gewähltem Koordinatensystem)

$$f(t) = a \sin(2\pi kt) , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Dabei ist $a > 0$ die Amplitude, und die Frequenz k gibt die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit an. Ist die Einheit der Zeitskala 1 sec., so erhält man k in der (Pseudo-) Einheit Hz (Hertz). Es ist allerdings eine mathematische Fiktion, wenn man einen realen Ton als periodischen Vorgang beschreibt, da jeder irgendwie erzeugte Ton nur eine endliche Dauer hat. Ein realer Ton ist also ein zeitlich begrenzter Ausschnitt aus einem periodischen Vorgang. Damit man einen realen Ton als solchen wahrnimmt, muß er mindestens aus mehreren „vollen Schwingungsbögen“ bestehen, d.h. die *Tondauer* muß wesentlich größer als die Periodenlänge sein (Abb. 0.1).

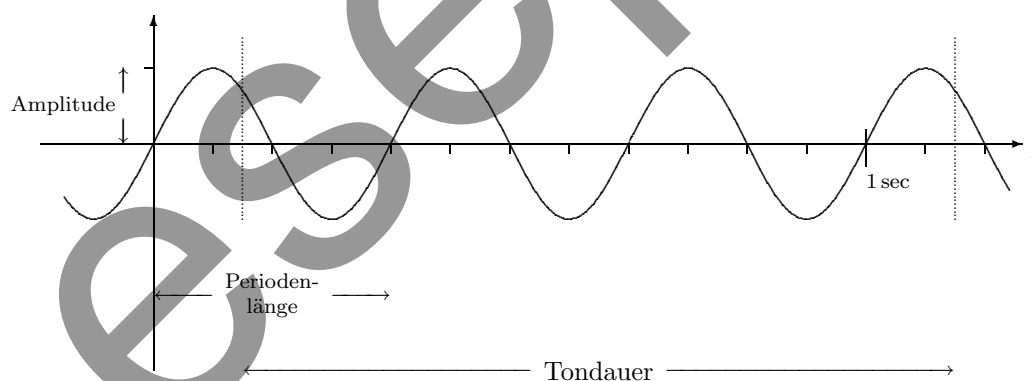


Abb. 0.1. Ton (Frequenz 3 Hz) und Tondauer (1 sec)

Sind mehrere Töne unterschiedlicher Amplituden a_i und Frequenzen k_i , $i = 1, 2, \dots$, überlagert, so spricht man von einem *Klang*, der also ebenfalls ein periodischer Vorgang ist und sich gemäß

$$f(t) = a_1 \sin(2\pi k_1 t) + a_2 \sin(2\pi k_2 t) + \dots$$

beschreiben läßt (Abb. 0.2). Klänge spielen in der Musik eine fundamentale Rolle: Einerseits besteht die polyphone Musik (mehrstimmiger Chor, Orchester) aus der

Überlagerung der Einzelstimmen, also aus Klängen (Akkorde). Zum anderen sind die von Menschen gesungenen oder mit Musikinstrumenten (Klavier, Geige, Orgel, ...) erzeugten Töne in Wirklichkeit Klänge, da dem erzeugten (und von der Partitur geforderten) Ton der Frequenz k sogenannte *Obertöne* mit Frequenzen $2k, 3k, \dots$, aber vergleichsweise kleinen Amplituden überlagert sind. Die durch die menschliche Anatomie oder die Bauart eines Musikinstruments bedingten Obertöne sind der Grund für die unterschiedliche *Klangfarbe* (Abb. 0.3). Diese ist die Ursache dafür, daß derselbe Ton auf dem Klavier anders als auf der Geige, auf der einen Orgel anders als auf der anderen Orgel klingt. Entzieht man der von einem Instrument erzeugten Musik durch Filterung die instrumentenspezifischen Obertöne, so klingt ein Klavier wie eine Trompete oder eine Geige. Mit Hilfe der Klangfarbe kann man also unterschiedliche Tonquellen identifizieren (auch Sänger oder Sprecher). Wie

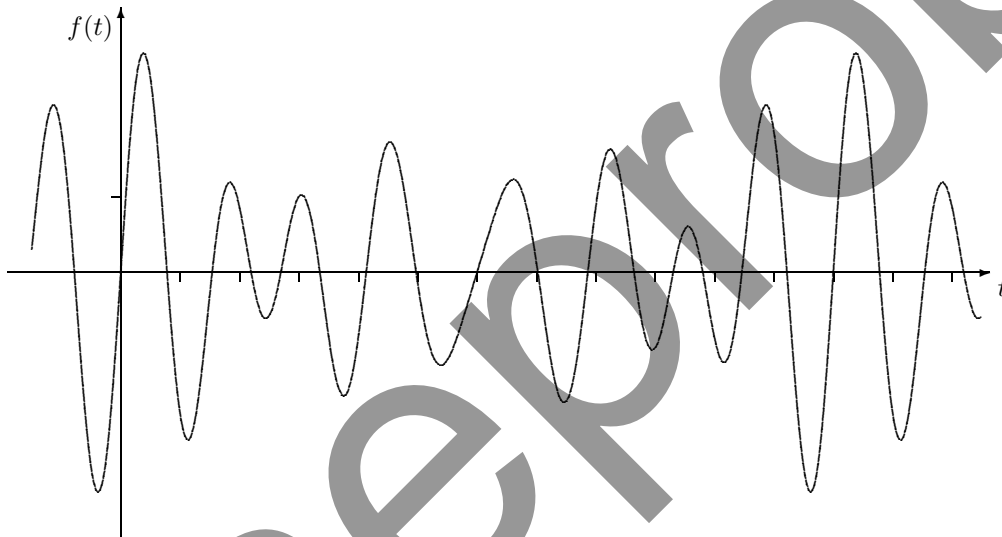


Abb. 0.2. Dreiklang c-f-g, $f(t) = \sin(2t) + \sin(\frac{8}{3}t) + \sin(3t)$

reale Töne sind auch reale Klänge eine mathematische Fiktion hinsichtlich der Periodizität. Ein realer Klang hat ebenfalls eine endliche Dauer und entsteht somit durch Ausblendung aus einem periodischen Vorgang. Eine wichtige Kenngröße eines Klangs ist seine *Grenzfrequenz* (*Bandbreite*), d.h. die maximale vorkommende Frequenz, da diese bei der *digitalen* Verarbeitung akustischer Signale (s.u.) eine fundamentale Rolle spielt.

Während Töne und Klänge periodische Vorgänge (oder real zumindest lange zeitliche Ausschnitte periodischer Vorgänge) sind, spricht man von einem *Geräusch*, wenn der akustische Vorgang keine erkennbare Periodizität aufweist. Während sich Musik und die Bildung der Vokale mit der menschlichen Stimme adäquat mit Hilfe von Tönen und Klängen beschreiben lassen, trifft dies für die Konsonanten und die typischen „Umweltgeräusche“ (Windgeräusche, Motorenlärm, ...) nicht zu. Bei einem Geräusch sind sehr viele Frequenzen mit teilweise extrem kurzen Tondauern überlagert (Abb. 0.4). Wichtig ist auch bei einem Geräusch die *Grenzfrequenz*

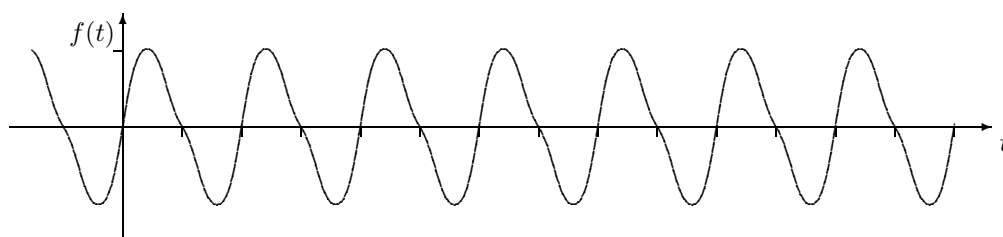


Abb. 0.3. Klangfarbe, $f(t) = \sin(2t) + \frac{1}{5} \sin(4t) + \frac{1}{25} \sin(8t)$

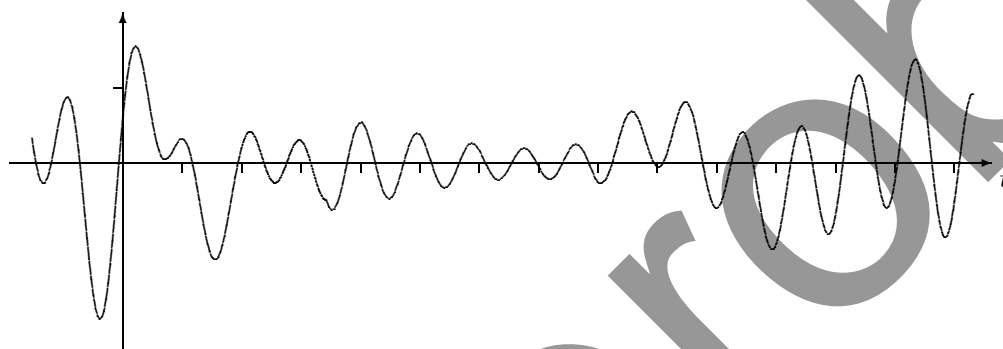


Abb. 0.4. Geräusch

(Bandbreite), die maximal in ihm enthalten sind, da sie die *Abtastrate* (*sampling rate*, s.u.) bestimmt.

Für eine adäquate Dimensionierung von Geräten zur Verarbeitung akustischer Signale ist auch von Interesse, über welchen Bereich die vorkommenden Frequenzen streuen. Das menschliche Gehör kann — abhängig vom Lebensalter — Frequenzen von 16 Hz bis maximal 20 kHz wahrnehmen. Die *Hörgrenzen* liegen also bei ca. 16 Hz und 20 kHz, sie unterscheiden sich um etwas mehr als 10 Oktaven. Der Frequenzbereich unterhalb von 16 Hz wird als *Infraschall*, derjenige oberhalb von 20 kHz als *Ultraschall* bezeichnet. Der letztere spielt in der Medizindiagnostik (Ultraschalluntersuchung) eine große Rolle.

Bei der *Erzeugung von Musik* mit Hilfe von Musikinstrumenten oder beim Gesang muß man zwischen den auf einem Musikinstrument oder beim Singen möglichen Grundtönen und den die Klangfarbe bestimmenden Obertönen unterscheiden. Der ungefähre *Tonumfang* bei den Grundtönen ist aus Abb. 0.5 ersichtlich. Man sieht, daß die Orgel den maximalen Tonumfang hat, der sich über 8 Oktaven erstreckt.

Beim Gesang wird die Melodie fast ausschließlich mit Hilfe der Vokale erzeugt (Ausnahme: Summen). Beim Sprechen — also auch beim Gesang — spielen aber auch die Konsonanten eine zentrale Rolle als Träger von Information. Um sie bilden zu können, sind (z.B. bei s, z, f, k) Frequenzen bis 10 kHz erforderlich. Aber die Sprache bleibt, wie man experimentell festgestellt hat, gut verständlich, wenn man — wie beim digitalen Telefon üblich — Frequenzen oberhalb von 3.4 kHz unterdrückt.

Tonquelle	Ungefährer Tonbereich	
	Bezeichnung	Frequenz in Hz
Männerstimme bei ruhigem Sprechen	$g^{-1} - g$	96 – 192
Frauenstimme bei ruhigem Sprechen	$g - g^1$	192 – 384
Singstimme im Chorgesang		
für Baß	$c^{-1} - e^1$	64 – 320
für Tenor	$c - a^1$	128 – 427
für Alt	$f - e^2$	171 – 640
für Sopran	$c^1 - a^2$	256 – 853
für Koloratursängerin	$- c^4$	- 2048
Klavier	$a^{-3} - a^4$	27 – 3413
Violine	$g - a^3$	192 – 1707
Orgel	$c^{-3} - c^5$	16 – 4096
Hörbereich	$c^{-3} - e^7$	16 – 20480

Abb. 0.5. Tonbereiche der menschlichen Stimme und einiger Musikinstrumente

Das Ausblenden hoher Frequenzen im Hörbereich hat also in der Musik und beim Telefonieren unterschiedliche Auswirkungen: In der Musik ändert sich die Klangfarbe der Singstimmen und der Musikinstrumente, also insgesamt der Charakter des Musikstücks. Beim Telefonieren kann dagegen die Sprachverständlichkeit leiden, wenn zu tiefe Frequenzen ausgeblendet werden.

Insgesamt hat man folgende Konsequenzen gezogen, die teilweise durch internationale Vereinbarungen, zum anderen durch Industriestandards nachgehalten werden:

- Beim Telefon dürfen Frequenzen erst oberhalb von 3.4 kHz, neuerdings teilweise auch erst oberhalb von 7 kHz, unterdrückt werden.
- Im Audiobereich sollen Frequenzen erst oberhalb von 15 kHz, meist erst oberhalb von 20 kHz, unterdrückt werden.

Beide Vorgaben bedingen unterschiedliche Mindestabtastraten, worauf wir an späterer Stelle zurückkommen werden.

0.2 Digitale Verarbeitung akustischer Signale

Ein akustisches Signal (Ton, Klang, Geräusch) entsteht durch die Bewegung von Luftteilchen (Schallwellen), ist also ein mechanisches Phänomen. Bei Geräten zur Verarbeitung von akustischen Signalen erfolgt zunächst eine Umwandlung der mechanischen Vorgänge in elektrische Impulse (Mikrofon), die intern in einem Audio-System verarbeitet und am Ausgang auch wieder zu mechanischen Vorgängen zurückverwandelt werden (Abb. 0.6).

Ein Audio-System kann *analog* arbeiten wie das menschliche System „Gehör – Sprache“ oder alle älteren technischen Audio-Systeme (vor ca. 1980). Dabei werden die elektrischen Impulse durch Schaltungen geschleust, die mit Hilfe von Widerständen, Spulen und Kondensatoren physikalische Gesetze realisieren. Die modernen

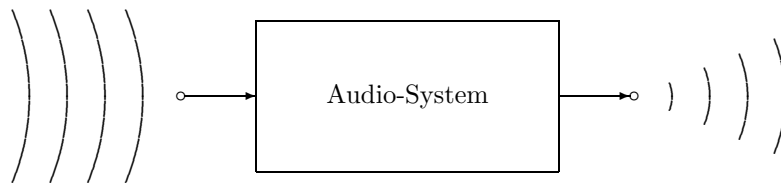


Abb. 0.6. Audio-System

technischen Audio-Systeme sind dagegen durch das Prinzip der *Digitalisierung* geprägt. Dies bedeutet, daß die im Mikrophon gebildeten elektrischen Impulse, die sich wie die ihnen zu Grunde liegenden akustischen Vorgänge als periodische (Töne, Klänge) oder als nichtperiodische Vorgänge (Geräusche) beschreiben lassen, *abgetastet* und *codiert* werden (Abb. 0.7).

Die erste Stufe eines digitalen Audio-Systems besteht also in der *Analog-Digital-Umwandlung*, die im Prinzip wie folgt abläuft: Das analoge elektrische Signal wird mit einer bestimmten *Abtastfrequenz* (*Abtastrate*, sampling rate) abgetastet, d.h. der Momentanwert des Signals zum Abtastzeitpunkt ermittelt, und anschließend auf eine bestimmte Bit-Anzahl codiert, d.h. der (reelle) Abtastwert wird durch eine (rationale) Zahl mit fester Stellenlänge im Binärsystem ersetzt.

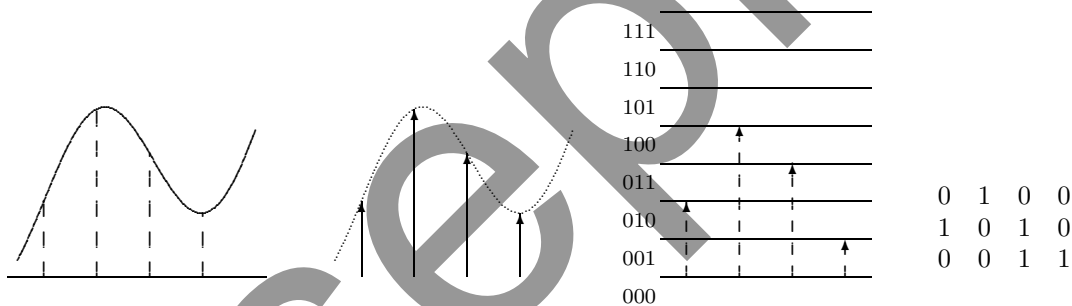


Abb. 0.7. Abtastung und Codierung

Bausteine, die die Abtastung und Codierung realisieren, bezeichnet man als *A/D-Wandler* (Analog-Digital-Wandler). Sie arbeiten nach dem Prinzip 'Sample and Hold', d.h. das Signal wird abgetastet und der Momentanwert für eine Abtastperiode festgehalten und während dieser Zeitspanne durch Vergleich mit einer *Quantisierungskennlinie* codiert. Beim digitalen Telefon (ISDN-Netz) ist eine Abtastfrequenz von 8 kHz und eine Wortlänge von 8 bit üblich, während bei der digitalen Verarbeitung von Musik je nach Problemstellung Abtastraten von 32 kHz bzw. 44.1 kHz bzw. 48 kHz und eine Wortlänge von 16 bit der heutige Standard sind. Dies bedeutet, daß Telefonleitungen eine Übertragung von $8 \times 8 \text{ kbit/sec} = 64 \text{ kbit/sec}$ ermöglichen müssen, während im Musikbereich Übertragungsraten von $32 \times 16 \text{ kbit/sec} = 512 \text{ kbit/sec}$ bis zu $48 \times 16 \text{ kbit/sec} = 768 \text{ kbit/sec}$ gesichert sein müssen.

Wenn wie im Bereich der digitalen Verarbeitung von Musik unterschiedliche Abtastraten ($32 \text{ kHz} \leftrightarrow 44.1 \text{ kHz} \leftrightarrow 48 \text{ kHz}$) möglich sind, sind gegebenenfalls Bau-

steine erforderlich, die eine *Abtastratenänderung*, also den Übergang zu einer höheren oder niedrigeren Abtastrate ermöglichen. Unterschiedliche Abtastraten ergeben sich auch bei der Übertragung von Signalen, wenn wie z.B. beim ISDN-Netz, das hierarchisch gestuft ist, über einen Übertragungskanal der höheren Hierarchiestufe gleichzeitig mehrere Signale der niedrigeren übertragen werden. So werden auf der zweiten Stufe 30 Telefonleitungen und 2 Steuerleitungen mit einer Übertragungsrate von je 64 kbit/sec zu einer Leitung mit der Übertragungsrate $32 \times 64 \text{ kbit/sec} = 2.048 \text{ Mbit/sec}$ „zusammengefaßt“. Dieses sogenannte Multiplexing und der Umkehrprozeß des Demultiplexing wird ebenfalls mit einer Erhöhung bzw. Erniedrigung der Abtastrate realisiert.

Die Aussage des berühmten Abtasttheorems (sampling theorem) von Whittaker-Shannon-Kotelnikov ist, daß die durch Abtastung gewonnene Folge der Abtastwerte das analoge Signal repräsentiert, wenn dieses *bandbegrenzt* ist und die Abtastrate die sogenannte *Nyquist-Rate* nicht unterschreitet, die man aus der Grenzfrequenz errechnen kann. Damit man also nach der Abtastung tatsächlich noch das ursprüngliche Signal, allerdings in einer anderen Darstellung, vorliegen hat, muß somit die Bandbegrenzung entsprechend der gewählten Abtastrate gewährleistet sein. Aus diesem Grund wird als erster Baustein, also noch vor dem A/D-Wandler, ein analoges *Tiefpaßfilter* (*Anti-Aliasing-Filter*) geschaltet, das die Bandbegrenzung sichert, also alle niedrigen Frequenzen ungehindert passieren läßt und alle höheren Frequenzen eliminiert (*idealer Tiefpaß*) oder zumindest mit vorgegebenen Toleranzgrenzen realisiert (*reale Tiefpaß-Approximation*). Beim digitalen Telefon sollen Frequenzen unterhalb von 3.4 kHz möglichst ungehindert passieren, während Frequenzen oberhalb von 4 kHz möglichst eliminiert werden sollen. Im schmalen Übergangsbereich 3.4 kHz ... 4 kHz soll die Dämpfung immer stärker werden. Bei der digitalen Verarbeitung von Musik soll der Tiefpaß Frequenzen oberhalb 15 kHz bei einer Abtastrate von 32 kHz oder oberhalb von 20 kHz bei den Abtastraten von 44.1 kHz bzw. 48 kHz eliminieren. Bausteine, die Tiefpaß-Approximationen mit vorgeschriebenen Toleranzen ergeben, lassen sich in Analog-Bauweise mit Hilfe von RC-Gliedern bzw. RCL-Gliedern realisieren. Der Eingang eines Audio-Systems hat aus den dargelegten Gründen somit die Form gemäß Abb. 0.8.

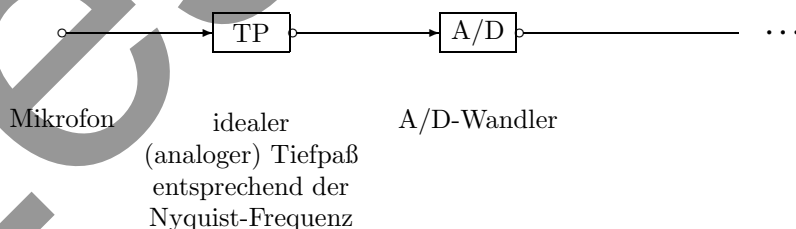


Abb. 0.8. Eingang eines digitalen Audio-Systems

Da ein Bauteil, das einen idealen (analogen) Tiefpaß mit den gewünschten Toleranzen approximiert, bei hohen Qualitätsansprüchen im Musikbereich teuer sein kann, hat man nach einer kostengünstigeren Alternative gesucht. Diese besteht im sogenannten *Oversampling*. Wie der Name besagt, wählt man beim A/D-Wandler

die Abtastrate als ein Vielfaches (Faktor 2 oder auch 4) der zur Elimination von Ultraschall-Anteilen erforderlichen Abtastrate von 44.1 kHz oder 48 kHz. Dies erlaubt es, den analogen Eingangs-Tiefpaß sehr kostengünstig zu entwickeln. Im Anschluß an den A/D-Wandler soll aber die Abtastrate wieder auf die Standard-Abtastrate von 44.1 kHz bzw. 48 kHz gesenkt werden. Dies wird dadurch möglich, daß man hinter den A/D-Wandler einen *digitalen* Tiefpaß schaltet, der die noch vorhandenen Frequenzen oberhalb von 44.1 kHz bzw. 48 kHz eliminiert. Anschließend wird das Oversampling durch einen *Down-Sampler* kompensiert, der die Abtastrate auf 44.1 kHz bzw. 48 kHz „herunterfährt“. Man erhält so die folgende Alternative zur Abb. 0.8, die insgesamt kostengünstiger ist, da sie mit 3 billigen Bauteilen statt einem teuren Bauteil arbeitet.

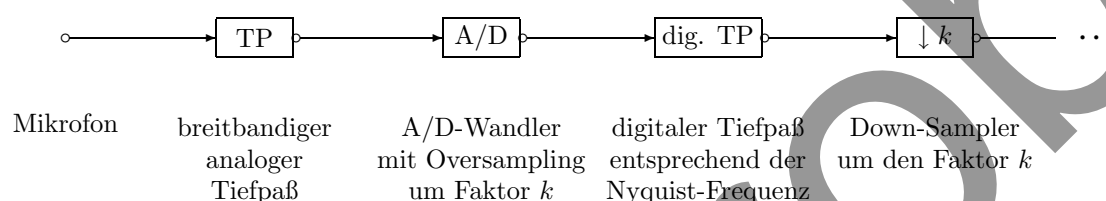


Abb. 0.9. Eingang eines digitalen Audio-Systems mit Oversampling

Der Kernteil eines Audio-Systems arbeitet *digital*. Dies bedeutet, daß man es jetzt statt mit einer kontinuierlichen Funktion „nur“ mit einer Zahlenfolge zu tun hat. Diese kann man *numerisch* bearbeiten. Dies impliziert, daß man die Bearbeitung von digitalisierten Signalen mit Hilfe von Chips (speziellen arithmetischen Rechenwerken in Mikroprozessortechnik, Sound-Karten) vornehmen kann.

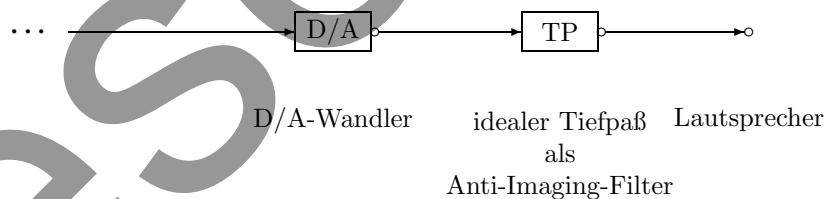


Abb. 0.10. Ausgang eines digitalen Audio-Systems

Am Ausgang des digitalen Kerns eines Audio-Systems, also noch vor dem Lautsprecher, werden entsprechende Komponenten wie am Eingang, allerdings in umgekehrter Reihenfolge und komplementärer Wirkungsweise quasi „spiegelbildlich“ eingebaut. Insgesamt soll die D/A-Wandlung, also die Umwandlung der digitalisierten Signale entsprechend der Shannon-Whittacker-Kotelnikovschen Interpolationsformel in ein (analoges) elektrisches Signal realisiert werden. Im einfachsten Fall besteht die Ausgangsstufe aus einem *D/A-Wandler* (*Rekonstruktionsfilter*) und einem nachgeschalteten analogen Tiefpaß, einem sogenannten *Anti-Imaging-Filter* (Abb. 0.10). Die Funktion dieses Filters besteht in der Elimination der Mehrfachbilder (Images)

im Frequenzbereich, die bei der D/A-Wandlung entstehen können. Wie auf der Eingangseite kann es aber aus Kostengründen angebracht sein, mit Over-Sampling zu arbeiten. Dazu fügt man einen Up-Sampler und ein Interpolationsfilter ein. Der D/A-Wandler muß nun der höheren Abtastfrequenz angepaßt sein. Der Hauptvorteil besteht aber darin, daß der abschließende analoge Tiefpaß nun einen breiten Übergangsbereich haben darf (Abb. 0.11).

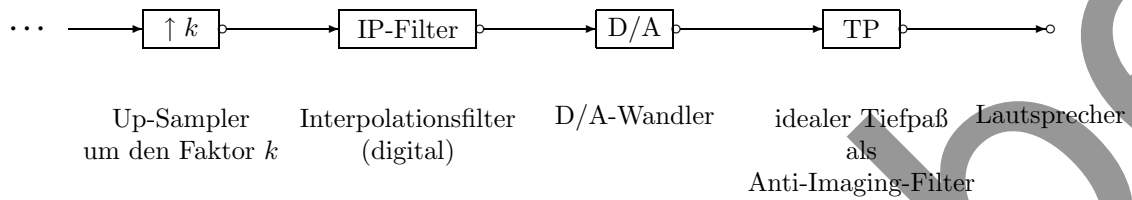


Abb. 0.11. Ausgang eines digitalen Audio-Systems mit Oversampling

Die Seiten 12 bis 87 sind in dieser Vorschau nicht verfügbar

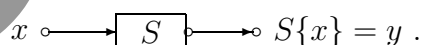
4. Diskrete LTI-Systeme und die z-Transformation

4.1 Diskrete LTI-Systeme

Bei der digitalen Signalverarbeitung spielen die sogenannten *diskreten LTI-Systeme* (linear time invariant) eine fundamentale Rolle. Diese sind von folgendem Typ: Zu einem festen Zeittakt $\tau > 0$ wird im Zeitpunkt $t_n = n\tau$, $n \in \mathbb{Z}$, das Signal $x[n]$ auf das System S gegeben, worauf dieses mit dem Signal $y[n]$ „antwortet“. In konkreten Anwendungen kann τ über weite Bereiche streuen. So liegt τ beim menschlichen Nervensystem im Bereich von Millisekunden, während in der Elektronik Nanosekundentakte üblich sind. Auch was man unter einem Signal zu verstehen hat, ist problemabhängig (elektrische, optische, akustische Signale). Wir betrachten ein mathematisches Modell und verstehen unter einem Signal eine reelle Zahl, obwohl ohne Probleme auch komplexe Zahlen oder allgemeiner Vektoren fester Länge von reellen oder komplexen Zahlen als Signale angesehen werden können.



Faßt man die Eingangssignale $x[n]$ und die Ausgangssignale $y[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, jeweils zu einer beidseitig unendlichen Folge $x = (x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$, $y = (y[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ zusammen, so produziert also S aus x die Folge $y = S\{x\}$:



Dabei charakterisieren zwei spezifische Eigenschaften ein diskretes LTI-System:

- *Linearität*, d.h. zu linear gekoppelten Eingangsfolgen gehören entsprechend gekoppelte Ausgangsfolgen. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und zwei Folgen u, v gilt

$$S\{au + bv\} = aS\{u\} + bS\{v\} .$$

- *Zeitinvarianz (Verschiebungsinvarianz, Translationsinvarianz)*, d.h. zu einem um einen Zeittakt verschobenen Eingangssignal gehört das entsprechend um einen Zeittakt verschobene Ausgangssignal.

Mathematisch läßt sich die Verschiebungsinvarianz mit Hilfe des *Shift-Operators* T beschreiben, der einer Folge $x = (x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ die Folge $Tx := (x[n - 1])_{n \in \mathbb{Z}}$ zuordnet. (Bei einer technischen Realisierung von T als Verzögerungsglied läuft es darauf

hinaus, daß das Signal zum Zeitpunkt nT einen Zeittakt lang gespeichert wird.) S ist zeitinvariant, wenn für beliebige Signale x mit $y = S\{x\}$ die Beziehung

$$S\{Tx\} = TS\{x\} \iff S\{(x[n-1])_{n \in \mathbf{Z}}\} = (y[n-1])_{n \in \mathbf{Z}}$$

gilt. Man kann diesen Sachverhalt kurz so formulieren: „ S und T sind vertauschbar“.

Wir wenden uns nun dem Problem zu, wie man ein diskretes LTI-System S charakterisieren kann. Dazu führt man den sogenannten δ -Impuls (*shock*) ein; dies ist die spezielle Folge δ mit

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Shift von δ erhält man die Folgen δ_k mit

$$\delta_k[n] := \delta[n-k] = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Man kann die Folge δ_k als eine „beidseitig unendliche“ Verallgemeinerung des k -ten kanonischen Einheitsvektors $e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_k, 0, \dots, 0)^T$ im \mathbb{R}^n ansehen.) Mit

Hilfe des Shift-Operators T gilt

$$\delta_k = T\delta_{k-1} = T^2\delta_{k-2} = \dots = T^k\delta_0 = T^k\delta;$$

dabei bewirkt T^k einen k -fachen Shift, d.h. es gilt für eine beliebige Folge x

$$T^k(x[n])_{n \in \mathbf{Z}} = (x[n-k])_{n \in \mathbf{Z}}.$$

Eine Folge $x = (x[n])_{n \in \mathbf{Z}}$ können wir in der Form

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T^k \delta$$

schreiben. Dabei ergeben sich keine Konvergenzprobleme bei dieser unendlichen Reihe, weil für jedes $n \in \mathbf{Z}$ höchstens ein Summand von Null verschieden ist:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta_k[n] = x[n], \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Wegen der Linearität von S erhält man nun

$$S\{x\} = S\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T^k \delta \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] S\{T^k \delta\}.$$

Die Zeitinvarianz bedeutet, wie wir oben gesehen haben, daß

$$S\{T\delta\} = TS\{\delta\}$$

gilt. Dann gilt aber auch

$$S\{T^k\delta\} = TS\{T^{k-1}\delta\} = \dots = T^k S\{\delta\}.$$

Von besonderer Bedeutung ist die sogenannte *Impulsantwort* (*shock response*) des Systems S , also die Ausgangsfolge $h := S\{\delta\}$, die zum δ -Impuls gehört. Denn für eine beliebige Folge x folgt so

$$S\{x\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] S\{T^k\delta\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T^k S\{\delta\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T^k h.$$

Wegen $T^k h = (h[n-k])_{n \in \mathbb{Z}}$ erhält man

$$S\{x\} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \right)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Mit Hilfe einer Summationsänderung $\kappa := n - k$ folgt auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] h[k].$$

Man sieht also, daß die Impulsantwort das System charakterisiert und sich mit ihrer Hilfe zu jeder Eingangsfolge x die zugehörige Ausgangsfolge berechnen läßt. Wir halten fest:

4.1.1 Satz

Die Impulsantwort $h := S\{\delta\}$ charakterisiert das diskrete LTI-System S . Die zur Eingangsfolge $x = (x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ gehörende Ausgangsfolge erhält man durch

$$S\{x\} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \right)_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{bzw.} \quad S\{x\} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \right)_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Die Ausgangsfolge $S\{x\}$ wird aus der Eingangsfolge x und der Impulsantwort h auf eine spezielle Weise gebildet, die man als (*diskrete*) *Faltung* bezeichnet. Wir werden noch weitere Faltungsbegriffe kennenlernen, so daß es manchmal notwendig sein wird, den Zusatz „diskret“ ausdrücklich zu erwähnen. Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, um welche Art der Faltung es sich handelt, werden wir nur von „Faltung“, „Faltungsprodukt“ etc. sprechen.

4.1.2 Definition

Für zwei (beidseitig unendliche) Folgen $a = (a[n])_{n \in \mathbb{Z}}$, $b = (b[m])_{m \in \mathbb{Z}}$ bezeichnet man die Folge $c = (c[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ mit

$$c[k] := \sum_{m=-\infty}^{\infty} a[m] b[k-m], \quad k \in \mathbb{Z},$$

als das (*diskrete*) *Faltungsprodukt* von a und b , sofern die Reihen für $c[k]$, $k \in \mathbb{Z}$, sämtlich konvergieren. Man schreibt symbolisch $c = a * b$.

Man sieht, daß das Faltungsprodukt $*$ kommutativ und assoziativ ist:

$$a * b = b * a, \quad a * (b * c) = (a * b) * c.$$

Weiterhin hat die δ -Folge die Bedeutung eines Einselements: $\delta * a = a$. Man sieht auch leicht ein, daß eine Verzögerung T mit der Faltung $*$ vertauscht werden darf:
Aus

$$h * (Tx) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n - k] x[k - 1] \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

folgt mit $l = k - 1$ durch eine Indexverschiebung bei der Summation

$$h * (Tx) = \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h[n - (l + 1)] x[l] \right)_{n \in \mathbb{Z}} = \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h[n - 1 - l] x[l] \right)_{n \in \mathbb{Z}} = T(h * x).$$

4.1.3 Beispiel

Ein einfaches LTI-System erhält man durch einen *Integrator*, also einen Algorithmus, der eine Näherung für die Stammfunktion F einer gegebenen Funktion f liefert. Für eine stetige und absolut integrable Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die also $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ existiert, entwickeln wir einen Algorithmus, um

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

numerisch zu bestimmen. Ist F ,

$$F(t) := \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau,$$

die Stammfunktion von f mit $F(-\infty) = 0$, so folgt mit Hilfe der Trapez-Regel

$$F(n) - F(n - 1) = \int_{n-1}^n f(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2} \{f(n - 1) + f(n)\}.$$

Näherungen $y(n)$ an die Werte $F(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, erhält man also, indem man die Rekursion

$$y(n) - y(n - 1) = \frac{1}{2} \{f(n - 1) + f(n)\} \quad \in \mathbb{Z},$$

$$y(-\infty) := 0,$$

auswertet. Durch Addition von aufeinanderfolgenden Gleichungen kann man diese Rekursion leicht auflösen. Man erhält so

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2} f(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Man kann unser Vorgehen so deuten: Ausgehend von der Folge $(f(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ haben wir eine neue Folge $(y(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ rekursiv durch

$$y(n) = y(n - 1) + \frac{1}{2} \{f(n - 1) + f(n)\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

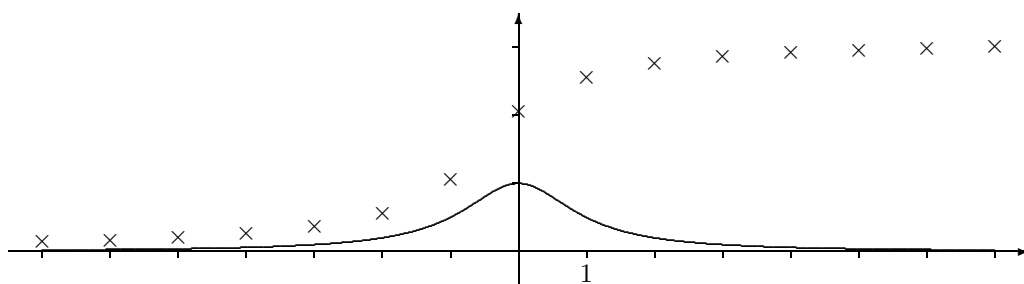


Abb. 4.1. Diskreter Integrator

bzw. explizit durch

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2}f(n)$$

bestimmt.

Für die spezielle Eingangsfolge δ (Impuls, shock)

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, \\ 0, & \text{falls } n \neq 0, \end{cases}$$

erhält man die Ausgangsfolge h (Impulsantwort, shock response) mit

$$h(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } n = 0, \\ 1, & \text{falls } n > 0. \end{cases}$$

Dann läßt sich aber die explizite Form für die Ausgangsfolge in der Gestalt

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) h(n - k)$$

oder auch als

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) f(n - k)$$

schreiben. □

Neben dem Faltungsprodukt $a * b$ von zwei Folgen a und b kann man auch das elementweise Produkt (*Hadamard-Produkt*) $a \cdot b$ definieren.

4.1.4 Definition

Für zwei (beidseitig unendliche) Folgen $a = (a[n])_{n \in \mathbb{Z}}$, $b = (b[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ bezeichnet man die Folge $c = (c[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ mit

$$c[n] := a[n] b[n], \quad n \in \mathbb{Z},$$

als das (*elementweise*) *Produkt* (*Hadamard-Produkt*) von a und b . Man schreibt symbolisch $c = a \cdot b$ oder auch kürzer $c = ab$.

4.1.5 Bemerkung

In der Literatur wird auch das Skalarprodukt

$$\langle a, b \rangle := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] b[n]$$

der beiden Folgen a und b manchmal mit ab bezeichnet. Man beachte, daß das Skalarprodukt zwei Folgen eine komplexe Zahl zuordnet, während durch das Faltungsprodukt und das Hadamard-Produkt wieder eine Folge entsteht. \square

Neben dem δ -Impuls haben auch der *Einheitssprung* (*unit step*) u ,

$$u[n] = \begin{cases} 0, & \text{falls } n < 0, \\ 1, & \text{falls } n \geq 0, \end{cases}$$

und die *Sprungantwort* (*unit step response*) $v := S\{u\}$ für die Beschreibung eines diskreten LTI-Systems S Bedeutung. Wegen

$$v = S\{u\} = h * u \iff v[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k], \quad n \in \mathbb{Z},$$

erhält man die Sprungantwort aus der Impulsantwort durch Summation. (Impulsantwort und Sprungantwort kann man als diskrete Analoga zur Verteilungsfunktion f und zur Dichte F einer Verteilung ansehen: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.) Der Verlauf der Sprungantwort charakterisiert das *Trägheitsverhalten* eines Systems. Denn je breiter der Übergangsbereich (punktierter Bereich in Abb. 4.2) ist, um so langsamer folgt das System auf den Sprung des Einheitssprungs bei $n = 0$.

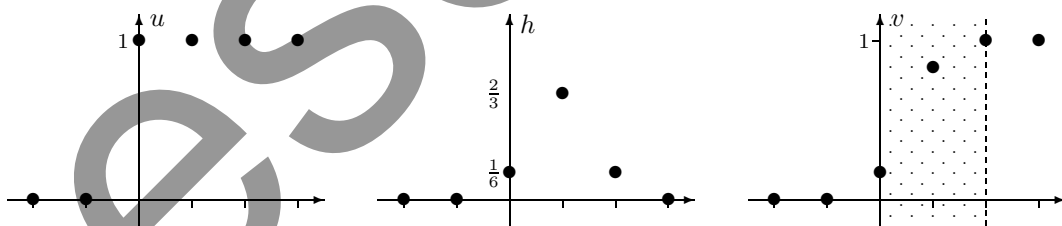


Abb. 4.2. Einheitssprung u , Impulsantwort h mit $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{6}, & n = 0, 2, \\ \frac{2}{3}, & n = 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ und Sprungantwort v

Da die Impulsantwort $h = S\{\delta\}$ das System S charakterisiert, müssen sich spezielle Eigenschaften von S bei h widerspiegeln. Eine erste Einteilung der diskreten LTI-Systeme nimmt man vor, indem man sie danach unterscheidet, ob die Impulsantwort von endlicher oder unendlicher Dauer ist.

4.1.6 Definition

Sind bei einem diskreten LTI-System S nur endlich viele Glieder $h[k]$ der Impulsantwort von 0 verschieden, d.h.

$$h[k] = 0 \quad \text{für} \quad |k| > N ,$$

so bezeichnet man es als *System mit einer Impulsantwort endlicher Dauer* (**FIR-System** von **Finite-duration Impulse Response System**), andernfalls als ein *System mit einer Impulsantwort unendlicher Dauer* (**IIR-System** von **Infinite-duration Impulse Response System**).

Der im Beispiel 4.1.3 betrachtete Integrator ist ein IIR-System.

Eine Eigenschaft, die bei einer technischen Modellierung eines Systems in Form einer digitalen Schaltung unabdingbar ist, ist die *Kausalität* oder (*technische*) *Realisierbarkeit* eines Systems. Verarbeitet ein System zeitlich getaktete Signale und kommen bei der Modellierung physikalische Gesetze zur Anwendung, so unterliegt es dem Kausalitätsgesetz.

Die *Kausalität* von S besagt, daß keine Wirkung vor ihrer Ursache existieren kann. Dies bedeutet, daß das Folgenglied $y[n]$ nur von den Folgengliedern $x[k]$, $k \leq n$, abhängig sein darf. Wegen

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k]$$

impliziert dies

$$h[n-k] = 0 \quad \text{für} \quad k > n \quad \text{bzw.} \quad h[k] = 0 \quad \text{für} \quad k < 0 .$$

4.1.7 Definition

Ein diskretes LTI-System S heißt *kausal*, wenn für seine Impulsantwort $h = S\{\delta\}$

$$h[k] = 0 \quad \text{für} \quad k < 0$$

gilt.

Der im Beispiel 4.1.3 betrachtete Integrator ist also kausal.

Offensichtlich gilt für die Impulsantwort eines kausalen FIR-Systems

$$h[k] = 0 , \quad \text{falls} \quad k < 0 \quad \text{und} \quad k > N .$$

Ist das System kausal, so folgt aus $h[k] = 0$ für $k < 0$ auch $v[k] = 0$ für $k < 0$. Hat die Impulsantwort nur endlich viele von Null verschiedene Glieder $h[k]$, so wird die Sprungantwort schließlich konstant. Durch sie wird also beschrieben, wie das System von einem stationären Zustand in einen anderen übergeht. Dabei ist der Übergangsbereich (vgl. Abb. 4.2) von besonderem Interesse.

4.1.8 Bemerkung

Während die Kausalität eines Systems bei der technischen Realisierung und bei der Echtzeitverarbeitung von Signalen unabdingbar ist, spielt sie keine Rolle, wenn man aufgezeichnete (gespeicherte) Daten bearbeiten will, da dann die Abfolge der Daten nur von einem *Ort* (nämlich, *wo* das Datum $x[n]$ gespeichert ist) und nicht von der Zeit abhängt. Das System kann dann problemlos auf alle Daten $x[n]$ zugreifen. Man muß also beispielsweise unterscheiden, ob man die Tonqualität in einem Wiedergabegerät verbessern will oder ob es darum geht, eine historische („verrauschte“) Schallplattenaufnahme „nachzubearbeiten“. Das eine Problem unterliegt dem Kausalitätsgesetz, das andere nicht. Kausale Systeme dienen zur Echtzeitverarbeitung von Signalen; nichtkausale Systeme kommen bei der Nachbehandlung gespeicherter Daten (Bildbearbeitung, Zeitreihenanalyse in der Ökonomie und den Sozialwissenschaften) zur Anwendung. \square

Eine weitere wichtige Eigenschaft eines Systems S ist die *Stabilität*, genauer die sogenannte *bibo-Stabilität* (**b**ounded **i**nput **b**ounded **o**utput).

4.1.9 Definition

Ein diskretes LTI-System S heißt (*bibo*-) *stabil*, wenn zu jeder beschränkten Eingangsfolge $x = (x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ eine beschränkte Ausgangsfolge $y = (y[n])_{n \in \mathbb{Z}} = S\{x\}$ gehört:

$$\text{Aus } |x[n]| \leq M \text{ für } n \in \mathbb{Z} \text{ folgt } |y[n]| \leq m \text{ für } n \in \mathbb{Z} .$$

Ein *bibo*-stabiles System gerät also für kontrollierte Eingangssignale nicht außer Kontrolle.

4.1.10 Bemerkung

Man kann diskrete LTI-Systeme auch folgendermaßen deuten: In Verallgemeinerung des \mathbb{R}^k bilden die beidseitig unendlichen Folgen $(x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$, $x[n] \in \mathbb{R}$, einen unendlich-dimensionalen Vektorraum V über \mathbb{R} , wenn man die Addition und Skalarmultiplikation komponentenweise erklärt, d.h. für $u, v \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ setzt man

$$\alpha u + \beta v := (\alpha u[n] + \beta v[n])_{n \in \mathbb{Z}} .$$

Eine Basis von V bilden z.B. die Shifts δ_k , $k \in \mathbb{Z}$, des δ -Impulses. Ein diskretes LTI-System S entspricht einer speziellen linearen Abbildung von V nach V , die wir mit einer unendlichen Matrix $H = (a_{nk})_{n,k \in \mathbb{Z}}$ beschreiben können. Wegen

$$S\{x\} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k] x[k] \right)_{n \in \mathbb{Z}} = Hx = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{nk} x[k] \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

gilt

$$a_{nk} = h[n-k] , \quad n, k \in \mathbb{Z} ,$$

d.h. die unendliche Matrix

$$H = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & h[-1] & h[-2] & h[-3] & \dots \\ \dots & h[0] & h[-1] & h[-2] & \dots \\ \dots & h[1] & h[0] & h[-1] & \dots \\ \dots & h[2] & h[1] & h[0] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

hat dieselben Einträge längs jeder Schrägzeile. Man bezeichnet eine solche Matrix als *Toeplitz-Matrix*, und die Untersuchung eines diskreten LTI-Systems ist damit auf das Studium einer Matrix dieses Typs zurückgeführt. \square

Stabile Systeme kann man vollständig charakterisieren.

4.1.11 Satz

Ein diskretes LTI-System S ist genau dann bibo-stabil, wenn die zugehörige Impulsantwort $h = S\{\delta\}$ absolut summierbar ist, d.h. wenn $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$ gilt.

Beweis. (1) Es gelte $M := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$. Dann folgt für eine beschränkte Eingangsfolge x für die Ausgangsfolge $y := S\{x\}$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung für jedes $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] h[k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n-k]| |h[k]| \\ &\leq \max_{k \in \mathbb{Z}} |x[k]| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \max_{k \in \mathbb{Z}} |x[k]| M . \end{aligned}$$

Also bleiben die Komponenten von y beschränkt.

(2) Jetzt sei S als bibo-stabil vorausgesetzt. Für einen indirekten Beweis nehmen wir an, daß $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$ nicht endlich ist. Dann folgt für die spezielle Eingangsfolge \tilde{x} mit $\tilde{x}[k] := \text{sign}(h[-k])$, $k \in \mathbb{Z}$, und $n = 0$

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[-k] h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sign}(h[k]) h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty .$$

Also ist S nicht bibo-stabil, da die beschränkte Folge \tilde{x} eine Ausgangsfolge mit mindestens einem unbeschränkten Glied erzeugt. \square

Bei technischen Anwendungen von diskreten LTI-Systemen ist die Größe

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[k])^2} , \quad \text{falls diese Reihe konvergiert,}$$

in der Regel proportional zur *Energie*, die in dem Signal $x = (x[k])_{k \in \mathbf{Z}}$ enthalten ist. Man bezeichnet dann x als *Signal endlicher Energie*. (Dies ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der euklidischen Länge $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ eines n -komponentigen Vektors $x \in \mathbb{R}^n$. Man bezeichnet deshalb $\|x\|_2$ auch als *euklidische Norm* des Signals x .) Man kann fragen, wann ein System S die Energie der Signale invariant läßt, d.h. wann $\|x\|_2 = \|S\{x\}\|_2$ gilt.

4.1.12 Definition

Ein diskretes LTI-System S bezeichnet man als *Allpaß*, falls für jedes Signal x endlicher Energie mit $y = S\{x\}$

$$\|x\|_2 = \|S\{x\}\|_2 \quad \left(\Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[k])^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (y[k])^2 \right)$$

gilt.

4.1.13 Bemerkung

Man kann auch ein System, für das

$$\|x\|_2 = A \|S\{x\}\|_2 \quad \text{mit} \quad A > 0$$

gilt, als Allpaß bezeichnen. Dies ist aber eine unwesentliche Verallgemeinerung, da man bei realen Anwendungen, wenn die „Energien“ $\|x\|_2$ und $\|S\{x\}\|_2$ dimensionsbehaftete Größen sind, durch Änderung des Maßstabs stets $A = 1$ erreichen kann. \square

Um Allpaß-Systeme zu charakterisieren, lassen wir uns vom endlich-dimensionalen Analogon leiten. Im \mathbb{R}^n gilt für Vektoren x und n -spaltige Matrizen A

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}, \quad \|Ax\|_2 = \sqrt{x^T A^T A x}.$$

Aus $A^T A = E$ (Einheitsmatrix) folgt also $\|x\|_2 = \|Ax\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$; man kann auch die Umkehrung zeigen. In Bemerkung 4.1.10 haben wir die Impulsantwort $h = S\{\delta\}$ zur Definition der Toeplitz-Matrix $H = (h[n-k])_{k,n \in \mathbf{Z}}$ verwendet. Wegen

$$S\{x\} = Hx = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k] x[k] \right)_{n \in \mathbf{Z}}$$

bleibt dann entsprechend zum Endlich-dimensionalen die Energie konstant, falls $H^T H = E$ (unendliche Einheitsmatrix) gilt. (Man bezeichnet H als orthogonale Matrix, da die Spalten von H orthogonal zueinander sind.) Dies bedeutet

$$(H^T H)_{i,k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-i] h[n-k] = \delta[i-k].$$

Setzt man $n - i =: m$, $\lambda := k - i$, so folgt

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] h[m + (i - k)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] h[m - \lambda].$$

Führt man nun die „gespiegelte“ Folge h^- ,

$$h^-[n] := h[-n], \quad n \in \mathbb{Z},$$

ein, so erhält man

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] h[m - \lambda] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] h^-[\lambda - m], \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Insgesamt ergibt sich wegen $\delta[-\lambda] = \delta[\lambda]$ eine neue Charakterisierung von Allpässen.

4.1.14 Satz

Ein diskretes LTI-System S ist genau dann ein Allpaß, wenn für die Impulsantwort $h = S\{\delta\}$

$$h * h^- = \delta \iff \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] h^-[\lambda - m] \right)_{\lambda \in \mathbb{Z}} = \delta$$

gilt.

4.1.15 Beispiel

Es gelte

$$h[m] = \begin{cases} 0, & m < 0, \\ -\frac{1}{2}, & m = 0, \\ 3 \cdot 2^{-(m+1)}, & m = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad h^-[m] = \begin{cases} 0, & m > 0, \\ -\frac{1}{2}, & m = 0, \\ 3 \cdot 2^{m-1}, & m = -1, -2, \dots. \end{cases}$$

Dann folgt wegen $h[m] = 0$ für $m < 0$

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] h^-[\lambda - m] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] h[m - \lambda] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} h[m] h[m - \lambda] = \sum_{m=\max(0,\lambda)}^{\infty} h[m] h[m - \lambda]. \end{aligned}$$

(1) Für $\lambda > 0$ folgt also

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] h^-[\lambda - m] &= \sum_{m=\lambda}^{\infty} h[m] h[m - \lambda] \\ &= h[\lambda] h[0] + \sum_{m=\lambda+1}^{\infty} h[m] h[m - \lambda] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \cdot 2^{-(\lambda+1)} \left(-\frac{1}{2}\right) + \sum_{m=\lambda+1}^{\infty} 3 \cdot 2^{-(m+1)} \cdot 3 \cdot 2^{-(m-\lambda+1)} \\
&= -3 \cdot 2^{-(\lambda+2)} + \sum_{m=1}^{\infty} 3 \cdot 2^{-(m+\lambda+1)} \cdot 3 \cdot 2^{-(m+1)} \\
&= 3 \cdot 2^{-(\lambda+2)} \left\{ -1 + \sum_{m=1}^{\infty} 3 \cdot 2^{-2m} \right\} \\
&= 3 \cdot 2^{-(\lambda+2)} \left\{ -1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \right\} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(2) Für $\lambda < 0$ folgt entsprechend

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] h^{-}[m-\lambda] &= \sum_{m=0}^{\infty} h[m] h[m-\lambda] \\
&= \sum_{m=-\lambda}^{\infty} h[m+\lambda] h[m].
\end{aligned}$$

Setzt man $\lambda' := -\lambda > 0$, so folgt

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] h^{-}[m-\lambda] = \sum_{m=\lambda'}^{\infty} h[m-\lambda'] h[m] = 0,$$

wie bereits in (1) gezeigt wurde.

(3) Für $\lambda = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] h^{-}[m] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (h[m])^2 = \frac{1}{4} + 9 \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-2(m+1)} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \cdot \frac{4}{3} = 1.
\end{aligned}$$

Also ist h die Impulsantwort eines Allpasses. □

4.2 Die z-Transformation

Zur Untersuchung von strukturellen Eigenschaften diskreter LTI-Systeme wird die *z-Transformation* benutzt, der folgende Idee zu Grunde liegt: Eine Funktion f , die in einem Ring

$$R_{\alpha\beta} := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < |z| < \beta\}$$

($\alpha = 0$ oder $\beta = \infty$ zugelassen) der komplexen Ebene holomorph ist, läßt sich dort in eine *Laurent-Reihe* entwickeln, d.h. es gilt eine Reihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] z^{-n}, \quad z \in R_{\alpha\beta}.$$

Dabei ist die Folge $a := (a[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ der Laurent-Koeffizienten durch die Funktion f eindeutig bestimmt. Es ist ohne Belang, daß wir hier der üblichen Konvention folgen

und nach negativen Potenzen von z summieren. Setzt man nämlich $\alpha[n] := a[-n]$ und $m := -n$, so erhält man eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha[-n] z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha[m] z^m$$

des Typs, wie sie in der Funktionentheorie üblicherweise behandelt wird. Man kann also strukturelle Eigenschaften der Folge a bei entsprechenden Eigenschaften von f wiederfinden und umgekehrt. Der Ansatz mit negativen Potenzen von z hat seinen Ursprung darin, daß mit $z := \exp(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, die Laurent-Reihe in eine Fourier-Reihe

$$g(\omega) := f(\exp(j\omega)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \exp(-jn\omega)$$

übergeht, die man als Approximation mit Hilfe der Mittelpunkt-Regel an das Fourier-Integral

$$(\mathcal{F}f)(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

ansehen kann. Darauf kommen wir an späterer Stelle zurück.

Betrachtet man nun das Produkt $h := fg$ von zwei Laurent-Reihen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] z^{-n}, \quad g(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b[m] z^{-m},$$

die beide in demselben Ring $R_{\alpha\beta}$ konvergieren, so erhält man die Laurent-Reihe von h ,

$$h(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c[k] z^{-k}, \quad z \in R_{\alpha\beta},$$

durch gliedweises Ausmultiplizieren und Umordnen. Dies ergibt

$$h(z) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] z^{-n} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} b[m] z^{-m} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a[n] b[m] z^{-(n+m)}.$$

Setzt man $k := n + m$, so folgt

$$h(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a[k-m] b[m] \right) z^{-k}, \quad z \in R_{\alpha\beta},$$

und man erhält

$$c[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a[k-m] b[m], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Durch die Substitution $l := k - m$ folgt auch

$$c[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a[l] b[k-l].$$

Nach Definition der Faltung gilt also

$$c = (c[k])_{k \in \mathbb{Z}} = a * b = b * a .$$

Die Folge der Laurent-Koeffizienten $c = (c[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ des Produkts $h = fg$ ist also gerade das Faltungsprodukt $c = a * b$ der Folgen der Laurent-Koeffizienten a und b von f und g .

Der eindeutige Zusammenhang zwischen dem Produkt von zwei Laurent-Reihen und dem Faltungsprodukt ihrer Koeffizientenfolgen ist fundamental für die Untersuchung von diskreten LTI-Systemen, da man meist das punktweise Produkt zweier Funktionen leichter handhaben kann als das Faltungsprodukt von zwei Folgen. Wir halten fest:

4.2.1 Satz

Die Funktionen f und g seien beide in dem Ring $R_{\alpha\beta} = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < |z| < \beta\}$ holomorph. Dann ist auch das Produkt h mit $h(z) = f(z)g(z)$ in $R_{\alpha\beta}$ holomorph, und für die Laurent-Reihen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] z^{-n}, \quad g(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b[m] z^{-m}, \quad h(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c[k] z^{-k}, \quad z \in R_{\alpha\beta},$$

gilt $c = a * b$, d.h. komponentenweise

$$c[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a[m] b[k-m] \quad \text{bzw.} \quad c[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a[k-m] b[m], \quad k \in \mathbb{Z} .$$

4.2.2 Beispiel

Wir betrachten $f(z) = \frac{1}{2} \left(\exp(z) + \exp\left(\frac{1}{z}\right) \right)$, $g(z) = \frac{z-2}{2z-1}$. Dann erhält man mit Hilfe der exp-Reihe

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(n)!} \right), \quad 0 < |z| < \infty ,$$

und mit Hilfe der geometrischen Reihe für $\frac{1}{2z-1} = \frac{1}{2z} \left(1 - \frac{1}{2z} \right)^{-1}$

$$g(z) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^{-n}, \quad |z| > \frac{1}{2} .$$

Für das Produkt $h = fg$ folgt dann

$$h(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c[k] z^{-k}, \quad \frac{1}{2} < |z| < \infty ,$$

wobei für die Folge $c = (c[k])_{k \in \mathbb{Z}}$ gilt

$$c = a * b$$

mit

$$a[n] = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0, \\ \frac{1}{2(|n|)!} & , \quad n \neq 0, \end{cases} \quad b[m] = \begin{cases} 0 & , \quad m < 0, \\ \frac{1}{2} & , \quad m = 0, \\ -\frac{3}{2} 2^{-m} & , \quad m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

□

Man sieht an diesem Beispiel den Vorteil der z -Transformation, da man das Produkt $h(z) = f(z)g(z)$ in expliziter Form angeben kann, während dies für das Faltungsprodukt $c = a * b$ der Folgen der Laurent-Koeffizienten nicht auf einfache Weise möglich ist.

Nach einem Satz von Hadamard kennt man den Zusammenhang zwischen der Abnahmegeschwindigkeit der Koeffizienten der Laurent-Reihe und den Radien α und β des Konvergenzrings $R_{\alpha\beta}$: Man zerlegt dazu die Laurent-Reihe in ihren *linksseitigen* (*aufsteigenden*) und ihren *rechtsseitigen* (*absteigenden*) Teil gemäß $f = f_\ell + f_r$, wobei

$$f_\ell(z) := \sum_{n=-\infty}^0 a[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a[-n] z^n, \quad f_r(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a[n] z^{-n}.$$

Mit Hilfe des Quotientenkriteriums für Potenzreihen macht man sich leicht klar, daß die Reihe für f_ℓ für alle z mit $|z| < r_2$, $\frac{1}{r_2} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a[-n]|}$ und die Reihe für f_r für alle z mit $|z| > r_1$, $r_1 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a[n]|}$ konvergiert. Wenn umgekehrt eine Folge $a = (a[n])_{n \in \mathbf{Z}}$ gegeben ist, für die die Größen

$$r_2 := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a[-n]|}} < \infty, \quad r_1 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a[n]|} < \infty$$

der Ungleichung $r_1 < r_2$ genügen, so erhält man durch die Festsetzung

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] z^{-n}$$

eine im Ring $R_{r_1 r_2}$ holomorphe Funktion. In diesem Sinn entsprechen sich gewisse Folgen und Laurent-Reihen eindeutig.

Zu einer *linksseitigen* Folge a mit $a[n] = 0$ für $n > 0$ gehört die Laurent-Reihe

$$f_\ell(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a[-n] z^n,$$

also eine Taylor-Reihe mit dem Entwicklungspunkt $z = 0$. Folglich konvergiert die mit einer linksseitigen Folge gebildete Laurent-Reihe für $|z| < r_2$.

Analog gehört zu einer *rechtsseitigen* Folge a mit $a[n] = 0$ für $n < 0$ die Laurent-Reihe

$$f_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a[n] z^{-n},$$

also eine Taylor-Reihe mit dem Entwicklungspunkt $z = \infty$. Folglich konvergiert die mit einer rechtsseitigen Folge gebildete Laurent-Reihe für $|z| > r_1$.

4.2.3 Satz

(1) Zu jeder Folge $a = (a[n])_{n \in \mathbf{Z}}$ mit

$$r_1 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a[n]|} < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{|a[n]|}} =: r_2$$

gibt es genau eine im Ring $R_{r_1 r_2} := \{z \in \mathbf{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$ holomorphe Funktion f derart, daß die Folge a gerade die Folge der Laurent-Koeffizienten von f ist, d.h. es gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] z^{-n}, \quad r_1 < |z| < r_2.$$

(2) Ist die Folge a linksseitig, d.h. mit $a[n] = 0$ für $n > 0$, so konvergiert die zugehörige Laurent-Reihe für $|z| < r_2$.

(3) Ist die Folge a rechtsseitig, d.h. mit $a[n] = 0$ für $n < 0$, so konvergiert die zugehörige Laurent-Reihe für $|z| > r_1$.

Dieser Satz erlaubt es, für gewisse Folgen $a = (a[n])_{n \in \mathbf{Z}}$ wahlweise zur entsprechenden, durch die Laurent-Reihe definierten Funktion f überzugehen und umgekehrt. Man beachte, daß die Angabe des Konvergenzrings $R_{r_1 r_2}$ zwingend ist, um die Zuordnung zwischen einer Folge und einer zur Laurent-Reihe gehörenden Funktion f eindeutig zu machen. Dies zeigt auch das folgende Beispiel.

4.2.4 Beispiel

Die Funktion f , $f(z) = \frac{-3}{(z-2)(1-2z)}$, hat Pole bei $z_1 = \frac{1}{2}$ und $z_2 = 2$. Folglich existieren Laurent-Entwicklungen für die Ringe $R_{0 \frac{1}{2}}$, $R_{\frac{1}{2} 2}$, $R_{2 \infty}$. Man erhält diese durch Partialbruchentwicklung

$$f(z) = \frac{-3}{(z-2)(1-2z)} = \frac{2}{1-2z} + \frac{1}{z-2}$$

und anschließende Reihenentwicklung mit Hilfe der geometrischen Reihe. Es gilt

$$\frac{2}{1-2z} = \begin{cases} 2 \frac{1}{1-2z} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n, & |z| < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{-n}, & \frac{1}{2} < |z|, \end{cases}$$

$$\frac{1}{z-2} = \begin{cases} \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n}, & 2 < |z|, \\ -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n, & |z| < 2. \end{cases}$$

Durch geeignete Kombination dieser Entwicklungen erhält man die Laurent-Entwicklungen von f für $|z| < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < |z| < 2$, $2 < |z|$.

(a) $|z| < \frac{1}{2}$: Hier folgt

$$f(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} [2^{n+1} - 2^{-(n+1)}] z^n = \sum_{n=-\infty}^0 [2^{-n+1} - 2^{n+1}] z^{-n} .$$

Also ist die Folge a mit

$$a[n] = \begin{cases} 2^{-n+1} - 2^{n+1} & , \quad n \leq 0 \\ 0 & , \quad n > 0 \end{cases}$$

die Folge der Laurent-Koeffizienten von f in der Kreisscheibe $K_{\frac{1}{2}} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{1}{2}\}$ (vgl. Satz 4.2.3 (2)).

(b) $\frac{1}{2} < |z| < 2$: Hier folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{-n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n = - \left[\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{-(n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} z^n \right] \\ &= - \left[\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n-1)} z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^0 2^{n-1} z^{-n} \right] \end{aligned}$$

Also ist die Folge a mit

$$a[n] = \begin{cases} -2^{n-1} & , \quad n \leq 0 , \\ -2^{-(n-1)} & , \quad n \geq 1 , \end{cases}$$

die Folge der Laurent-Koeffizienten von f im Ring (vgl. Satz 4.2.3 (1))

$$R_{\frac{1}{2}2} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < 2 \right\} .$$

(c) $2 < |z|$: Hier folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{-n} + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [-2^{-n} + 2^n] z^{-(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} [2^{n-1} - 2^{-(n-1)}] z^{-n} . \end{aligned}$$

Also ist die Folge a mit

$$a[n] = \begin{cases} 0 & , \quad n \leq 0 , \\ 2^{n-1} - 2^{-n+1} & , \quad n \geq 1 , \end{cases}$$

die Folge der Laurent-Koeffizienten von f für $|z| > 2$ (vgl. Satz 4.2.3 (3)). □

Für $r_1 = r_2 =: r$ entartet der Ring $R_{r_1 r_2}$ zur Kreislinie $R_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$, und die zugehörige Reihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] z^{-n} , \quad |z| = r ,$$

stellt keine holomorphe Funktion mehr dar, wohl aber u.U. eine auf der Kreislinie R_r stetige Funktion. Dies ist der Fall, wenn die Folge a absolut summierbar ist,

d.h. wenn $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a[n]| < \infty$ gilt. In diesem Fall ist nicht die Funktionentheorie, sondern die Theorie der Fourier-Reihen das adäquate Hilfsmittel. Setzt man nämlich $z := r \exp(-jt)$, so erhält man

$$f(r \exp(-jt)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] r^{-n} \exp(jnt) ,$$

also eine Fourier-Reihe mit den Koeffizienten $a[n] r^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Darauf kommen wir an späterer Stelle zurück.

4.2.5 Definition

Für eine Folge $a = (a[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ bezeichnet man die Reihe $\mathcal{Z}\{a\}$,

$$\mathcal{Z}\{a\}(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] z^{-n} ,$$

als die z -Transformierte von a . Die z -Transformierte heißt *linksseitig*, falls $a[n] = 0$ für $n > 0$, und *rechtsseitig*, falls $a[n] = 0$ für $n < 0$ gilt.

Es ist üblich, Folgen mit kleinen lateinischen Buchstaben und die zugehörigen z -Transformierten mit dem entsprechenden Großbuchstaben zu bezeichnen, also $X(z) = \mathcal{Z}\{x\}(z)$, $H(z) = \mathcal{Z}\{h\}(z)$, ...

Die Bedeutung der z -Transformierten liegt darin, daß man in vielen relevanten Fällen die Reihe $\mathcal{Z}\{a\}$ „geschlossen“ aufsummieren kann, d.h. man kennt einen analytischen Ausdruck für die Summe. In anderen Fällen ist es leichter, $\mathcal{Z}\{a\}$ als a selbst zu erhalten. Ein weiterer Vorteil ist, wie wir schon im Satz 4.2.1 festgestellt haben, der *Faltungssatz*

$$\mathcal{Z}\{a * b\} = \mathcal{Z}\{a\} \mathcal{Z}\{b\} .$$

Wir halten die wichtigsten Eigenschaften der z -Transformation fest.

4.2.6 Satz

Für eine Folge $a = (a[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ und die zugehörige z -Transformierte $\mathcal{Z}\{a\}$,

$$\mathcal{Z}\{a\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] z^{-n} ,$$

gelten folgende Konvergenzsätze:

(1) Setzt man $r_1 := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a[n]|}$, $\frac{1}{r_2} := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a[-n]|}$ und gilt $r_1 < r_2$, so konvergiert $\mathcal{Z}\{a\}$ im Ring $R_{r_1 r_2} := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.

(2) Für eine linksseitige z -Transformierte, also mit $a[n] = 0$ für $n > 0$, konvergiert $\mathcal{Z}\{a\}$ für $|z| < r_2$, während sie für eine rechtsseitige z -Transformierte, also mit $a[n] = 0$ für $n < 0$, für $|z| > r_1$ konvergiert.

(3) Gilt $r_1 < 1 < r_2$, so umfaßt der Konvergenzbereich den Einheitskreis. Dies ist für eine linksseitige (rechtsseitige) z-Transformierte dann der Fall, wenn $r_1 < 1$ ($r_2 > 1$) gilt.

(4) Gilt $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a[n]| < \infty$, so liegt der Einheitskreis im Konvergenzbereich.

(5) Wenn die z-Transformierten $Z\{a\}$, $Z\{b\}$ die Konvergenzbereiche

$$R_a := \{z \in \mathbb{C} \mid \tau_1 < |z| < \tau_2\}, \quad R_b := \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 < |z| < \rho_2\}$$

haben und dabei $r_1 := \max(\tau_1, \rho_1) < \min(\tau_2, \rho_2) =: r_2$ gilt, so hat das Faltungsprodukt $a * b$ die z-Transformierte $Z\{a * b\} = Z\{a\}Z\{b\}$ mit dem Konvergenzbereich $R_{a*b} = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$.

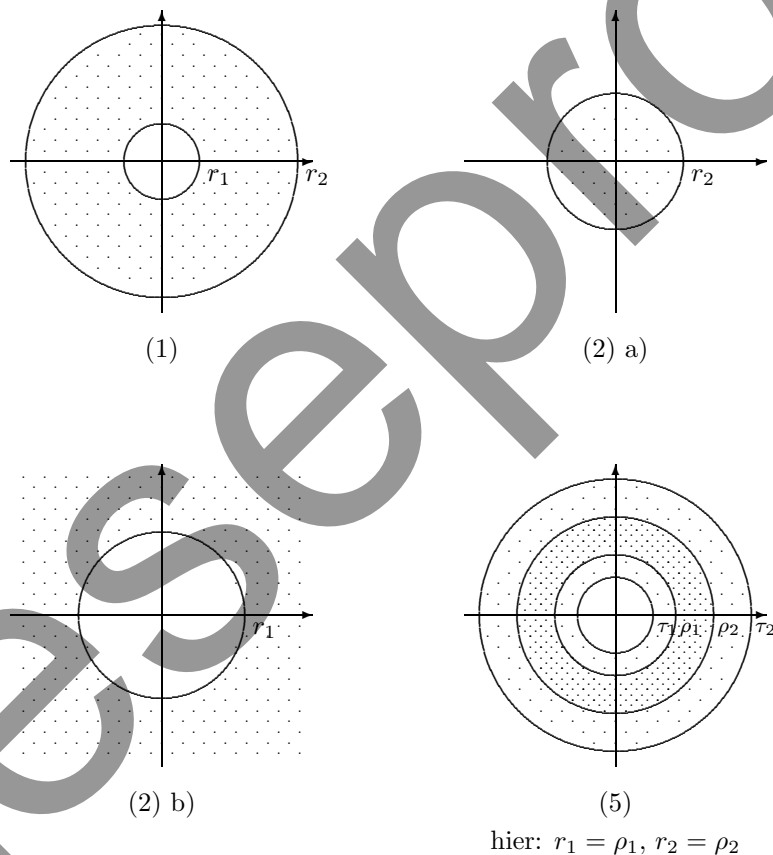


Abb. 4.3. Konvergenzbereiche bei der z-Transformation

Für eine Folge a , für die der Einheitskreis zum Konvergenzbereich gehört, kann man speziell $z = \exp(-j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, setzen und erhält dann

$$Z\{a\}(z) = Z\{a\}(\exp(-j\omega)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] (\exp(-j\omega))^{-n}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \exp(jn\omega) \\
&=: \mathcal{F}_p^{-1}(a)(\omega) .
\end{aligned}$$

Man erhält so die sogenannte *periodische Fourier-Transformierte* der Folge a , d.h. die mit den Folgengliedern $a[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, gebildete Fourier-Reihe. Während die z -Transformierte als Laurent-Reihe für in einem Ring holomorphe Funktionen gebildet werden kann, ist die Fourier-Transformation für allgemeinere Funktionenklassen durchführbar. Darauf kommen wir an späterer Stelle zurück.

Mit Hilfe der z -Transformation kann man auch das Faltungsprodukt invertieren oder allgemeiner Faltungsgleichungen lösen. Eine Folge b heißt *Faltungsinverse* zur Folge a , falls

$$b * a = \delta \quad (\delta: \delta\text{-Impuls})$$

gilt. Man schreibt $b = a^{-1}$. Durch z -Transformation folgt

$$\mathcal{Z}\{b\}(z) \mathcal{Z}\{a\}(z) = \mathcal{Z}\{\delta\}(z) = 1$$

oder

$$\mathcal{Z}\{b\}(z) = \frac{1}{\mathcal{Z}\{a\}(z)} .$$

Man erhält also die Faltungsinverse von a dadurch, daß man die Funktion $\frac{1}{\mathcal{Z}\{a\}(z)}$ in eine Laurent-Reihe entwickelt, wobei man allerdings Sorgfalt hinsichtlich der Konvergenzbereiche walten lassen muß.

4.2.7 Beispiel

Nach Beispiel 4.2.4 gehört zur Folge a ,

$$a[n] = \begin{cases} 0 & , \quad n \leq 0 , \\ 2^{n-1} - 2^{-n+1} & , \quad n \geq 1 , \end{cases}$$

die z -Transformierte $\mathcal{Z}\{a\}$,

$$\mathcal{Z}\{a\}(z) = \frac{-3}{(z-2)(1-2z)} , \quad 2 < |z| .$$

Also folgt

$$\mathcal{Z}\{a^{-1}\}(z) = -\frac{(z-2)(1-2z)}{3} = \frac{2}{3}z^2 - \frac{5}{3}z + \frac{2}{3} , \quad |z| < \infty ,$$

also

$$a^{-1}[n] = \begin{cases} 0 & , \quad n \leq -3 , \\ \frac{2}{3} & , \quad n = -2 , \\ -\frac{5}{3} & , \quad n = -1 , \\ \frac{2}{3} & , \quad n = 0 , \\ 0 & , \quad n \geq 1 . \end{cases}$$

□

Bisher hatten wir die z -Transformation betrachtet, die einer Folge $a = (a[n])_{z \in \mathbb{Z}}$ eine als Laurent-Reihe definierte Funktion $\mathcal{Z}\{a\}$,

$$\mathcal{Z}\{a\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] z^{-n}, \quad z \in R_{\alpha\beta},$$

zuordnet. Da sich a und $\mathcal{Z}\{a\}$ eineindeutig entsprechen, hat es Sinn, das *Inversionsproblem* zu betrachten, d.h. die Zuordnung $\mathcal{Z}^{-1}\{f\}$, die einer in einem Ring $R_{\alpha\beta}$ holomorphen Funktion f die Folge a ihrer Laurent-Koeffizienten zuordnet gemäß

$$\mathcal{Z}^{-1}\{f\} = (a[n])_{n \in \mathbb{Z}},$$

wobei

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] z^{-n}, \quad z \in R_{\alpha\beta}.$$

Das Inversionsproblem für die z -Transformation entspricht also der Entwicklung einer in einem Ring holomorphen Funktion in eine Laurent-Reihe. Allerdings sollte man dabei beachten, daß in der Funktionentheorie üblicherweise nach Potenzen z^n statt wie hier nach z^{-n} summiert wird. Die Laurent-Koeffizienten lassen sich als Kurvenintegrale bestimmen. Dazu betrachtet man zunächst einen Kreis Γ_ρ vom Radius $\rho > 0$,

$$\Gamma_\rho := \{z \in \mathbb{C} \mid z = \rho \exp(jt), \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

Dann sind die Potenzen z^n , $n \in \mathbb{Z}$, wechselseitig orthogonal bzgl. Integration längs Γ_ρ , denn es gilt

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_\rho} z^{-n} z^{m-1} dz = \frac{1}{2\pi} \rho^{-n+m} \int_0^{2\pi} \exp(j(-n+m)t) dt = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = m, \\ 0, & \text{falls } n \neq m. \end{cases}$$

Da die Laurent-Entwicklung für eine in dem Ring $R_{\alpha\beta}$ holomorphe Funktion f eindeutig ist, folgt für ρ mit $\alpha < \rho < \beta$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_\rho} f(z) z^{m-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_\rho} z^{-n} z^{m-1} dz = a[m], \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Bekanntlich darf man den Integrationsweg, wie in der Funktionentheorie beim Beweis des Cauchyschen Integralsatzes gezeigt wird, im Ring $R_{\alpha\beta}$ „verbiegen“, ohne daß sich der Wert des Integrals ändert. Dies ergibt dann folgende Inversionsformel.

4.2.8 Satz

Die Funktion f sei in dem Ring $R_{\alpha\beta}$,

$$R_{\alpha\beta} := \{v \in \mathbb{C} \mid \alpha < |v| < \beta\},$$

holomorph, und Γ sei ein in $R_{\alpha\beta}$ verlaufender, positiv orientierter, doppelpunktfreier, den Nullpunkt ein Mal umschlingender und stückweise glatter Weg. Dann

gilt

$$\mathcal{Z}^{-1}\{f\} = (a[m])_{m \in \mathbb{Z}} ,$$

$$a[m] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(v) v^{m-1} dv , \quad m \in \mathbb{Z} .$$

Kennt man den Konvergenzbereich $R_{\alpha\beta}$ genauer, so kann man den Weg Γ spezieller wählen. Falls der Einheitskreis in $R_{\alpha\beta}$ liegt, wird man diesen als Γ wählen. Handelt es sich dagegen um eine rechtsseitige Entwicklung, so wird man einen „sehr großen“ Kreis wählen, der alle Singularitäten im Innern enthält. Der wichtigste Fall ist glücklicherweise der, daß alle Singularitäten im Innern des Einheitskreises liegen und es sich um eine rechtsseitige z -Transformierte handelt, so daß Γ als Einheitskreis gewählt werden kann.

Liegen die Singularitäten $z_i, i = 1, \dots, s$, von f alle *isoliert* im Innengebiet von Γ , so kann der *Residuensatz* angewendet werden. Dieser liefert dann

$$a[m] = \sum_{i=1}^s \text{Res}_{z=z_i} (f(z)z^{m-1}) , \quad m \in \mathbb{Z} .$$

Allerdings darf man sich von dieser eleganten Darstellung für die Praxis nicht zu viel erhoffen. Sie ist dann gut anwendbar, wenn f rational ist und die Pole alle bekannt sind. Aber für diesen Fall, der in der Praxis der wichtigste ist, da man auf ihn bei Linearen Differenzgleichungssystemen stößt (s. unten), kann man auch mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die Laurent-Koeffizienten bestimmen.

4.2.9 Aufgabe

Man bestimme mit Hilfe des Residuensatzes die inverse z -Transformierte $\mathcal{Z}^{-1}\{f\}$ für die Funktion $f, f(z) = \frac{1}{(z-2)(3z-1)}$, für die drei Konvergenzbereiche $|z| < \frac{1}{3}, \frac{1}{3} < |z| < 2, 2 < |z|$. □

Für die z -Transformation haben wir den Faltungssatz

$$\mathcal{Z}\{a * b\} = \mathcal{Z}\{a\} \cdot \mathcal{Z}\{b\}$$

hergeleitet. Dabei ist von besonderer Bedeutung, daß links das komplizierte Faltungsprodukt $*$ von zwei Folgen a und b und rechts das (gewöhnliche) punktweise Produkt \cdot der Laurent-Reihen $\mathcal{Z}\{a\}$ und $\mathcal{Z}\{b\}$ auftritt. Wir wollen nun eine entsprechende Formel für das gewöhnliche (oder Hadamard-) Produkt $a \cdot b$,

$$a \cdot b := (a[n] b[n])_{n \in \mathbb{Z}} ,$$

herleiten. Mit $f := \mathcal{Z}\{a\}, g := \mathcal{Z}\{b\}$, d.h. $a = \mathcal{Z}^{-1}\{f\}, b = \mathcal{Z}^{-1}\{g\}$, folgt durch Anwendung von Satz 4.2.8

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{a \cdot b\}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a \cdot b)[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] b[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{Z}^{-1}\{f\}[n] b[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(v) v^n \frac{dv}{v} \right) b[n] z^{-n} . \end{aligned}$$

Falls Γ im Innern des gemeinsamen Konvergenzringes $R_{\alpha\beta}$ von $\mathcal{Z}\{a\}$ und $\mathcal{Z}\{b\}$ verläuft, dürfen Summation und Integration vertauscht werden. Dann folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{a \cdot b\}(z) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(v) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} v^n b[n] z^{-n} \right) \frac{dv}{v} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(v) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n] \left(\frac{z}{v} \right)^{-n} \right) \frac{dv}{v} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(v) g \left(\frac{z}{v} \right) \frac{dv}{v} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \mathcal{Z}\{a\}(v) \mathcal{Z}\{b\} \left(\frac{z}{v} \right) \frac{dv}{v} .\end{aligned}$$

Die eben hergeleitete Formel

$$\mathcal{Z}\{a \cdot b\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \mathcal{Z}\{a\}(v) \mathcal{Z}\{b\} \left(\frac{\cdot}{v} \right) \frac{dv}{v}$$

legt es nahe, als das (*komplexe*) *Faltungsprodukt* $f *_k g$ der beiden in dem Ring $R_{\alpha\beta}$ holomorphen Funktionen die in $R_{\alpha\beta}$ holomorphe Funktion

$$(f *_k g)(z) := \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(v) g \left(\frac{z}{v} \right) \frac{dv}{v}, \quad z \in R_{\alpha\beta},$$

zu definieren. Man macht sich leicht klar, daß die komplexe Faltung $*_k$ assoziativ und kommutativ ist:

$$f *_k (g *_k h) = (f *_k g) *_k h, \quad f *_k g = g *_k f .$$

Die obige Formel nimmt dann die prägnante Form

$$\mathcal{Z}\{a \cdot b\} = \mathcal{Z}\{a\} *_k \mathcal{Z}\{b\}$$

an.

Mit den obigen Bezeichnungen folgt dann weiterhin

$$\mathcal{Z}^{-1}\{f \cdot g\} = \mathcal{Z}^{-1}\{\mathcal{Z}\{a\} \cdot \mathcal{Z}\{b\}\} = \mathcal{Z}^{-1}\{\mathcal{Z}\{a *_k b\}\} = a *_k b = \mathcal{Z}^{-1}\{f\} *_k \mathcal{Z}^{-1}\{g\}$$

sowie

$$\mathcal{Z}^{-1}\{f *_k g\} = \mathcal{Z}^{-1}\{\mathcal{Z}\{a\} *_k \mathcal{Z}\{b\}\} = \mathcal{Z}^{-1}\{\mathcal{Z}\{a \cdot b\}\} = a \cdot b = \mathcal{Z}^{-1}\{f\} \cdot \mathcal{Z}^{-1}\{g\} .$$

Wir halten fest:

4.2.10 Satz

Für die z -Transformation und die inverse z -Transformation von zwei Folgen a, b und von zwei in einem gemeinsamen Konvergenzring $R_{\alpha\beta}$ holomorphen Funktionen f, g gelten die folgende Faltungssätze:

- (1) $\mathcal{Z}\{a *_k b\} = \mathcal{Z}\{a\} \cdot \mathcal{Z}\{b\}$,
- (2) $\mathcal{Z}\{a \cdot b\} = \mathcal{Z}\{a\} *_k \mathcal{Z}\{b\}$,
- (3) $\mathcal{Z}^{-1}\{f *_k g\} = \mathcal{Z}^{-1}\{f\} \cdot \mathcal{Z}^{-1}\{g\}$,
- (4) $\mathcal{Z}^{-1}\{f \cdot g\} = \mathcal{Z}^{-1}\{f\} *_k \mathcal{Z}^{-1}\{g\}$.

4.2.11 Bemerkung

Im obigen Satz 4.2.10 sind vier Aussagen zur z -Transformation und zur inversen z -Transformation zusammengestellt, die in ihrer Art typisch für eine ganze Reihe von Faltungssätzen sind, die wir im folgenden noch behandeln werden. Bemerkenswert sind dabei die im folgenden Diagramm (Abb. 4.4) dargestellten „Über-Kreuz-Beziehungen“ zwischen dem $*$ -Produkt und dem \cdot -Produkt für Folgen einerseits und dem $*_k$ -Produkt und dem \cdot -Produkt für Laurent-Reihen andererseits. \square

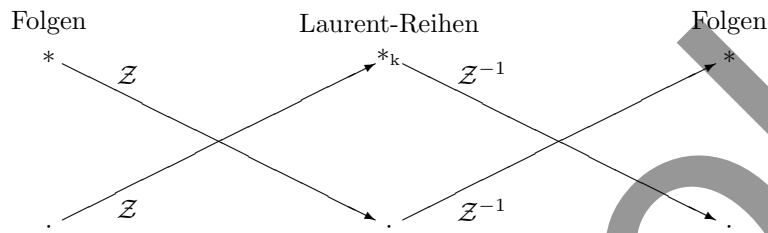


Abb. 4.4. Faltung und gewöhnliches Produkt bei der z -Transformation und der inversen z -Transformation

Wir betrachten nun speziell den Fall, daß eine *rationale* Funktion f als rechtsseitige z -Transformierte einer Folge a aufgefaßt wird, also

$$a = \mathcal{Z}^{-1}\{f\}, \quad a = (a[n])_{n \in \mathbf{Z}}, \quad a[n] = 0 \text{ für } n < 0,$$

$$f(z) = \mathcal{Z}\{a\}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a[n] z^{-n}.$$

Dabei sei f eine rationale Funktion, also

$$f(z) = \frac{P_k(z)}{Q_l(z)}, \quad \text{Grad } P_k = k, \quad \text{Grad } Q_l = l;$$

dabei dürfen wir $k < l$ annehmen. (Hier handelt es sich um die Systemfunktion eines kausalen linearen Differenzengleichungssystems, s. u.) Dann hat f eine Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^s H_{\nu}(z), \quad H_{\nu}(z) = \sum_{\mu=1}^{g_{\nu}} \frac{\alpha_{\nu\mu}}{(z - \xi_{\nu})^{\mu}},$$

wobei ξ_1, \dots, ξ_s die *verschiedenen* Nullstellen von Q_l und g_1, \dots, g_s die zugehörigen Vielfachheiten bezeichnen. Da die inverse z -Transformation eine lineare Operation ist, erhält man $\mathcal{Z}^{-1}\{f\}$ aus der Partialbruchzerlegung von f , falls man die Laurent-Entwicklungen der speziellen rationalen Funktionen r_{μ} ,

$$r_{\mu}(z) = \frac{1}{(z - \xi)^{\mu}}, \quad \mu = 1, 2, \dots,$$

kennt. Diese kann man sich aber mit Hilfe der geometrischen Reihe leicht beschaffen. Es gilt

$$\frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\xi}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{n-1} z^{-n}, \quad |\xi| < |z|.$$

Also folgt

$$\mathcal{Z}^{-1}\{r_1\} = (a_1[n])_{n \in \mathbf{Z}}, \quad a_1[n] = \begin{cases} \xi^{n-1}, & n = 1, 2, 3, \dots, \\ 0, & n = 0, -1, -2, \dots \end{cases}$$

Für $|z| > |\xi|$ ist gliedweises Differenzieren der obigen Reihe erlaubt, und man erhält

$$\left(\frac{1}{z - \xi}\right)' = \frac{-1}{(z - \xi)^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi^{n-1} z^{-n}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \xi^{n-1} n z^{-(n+1)},$$

also

$$\frac{1}{(z - \xi)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \xi^{n-2} (n-1) z^{-n}$$

und somit

$$\mathcal{Z}^{-1}\{r_2\} = (a_2[n])_{n \in \mathbf{Z}}, \quad a_2[n] = \begin{cases} (n-1)\xi^{n-2}, & n = 2, 3, \dots, \\ 0, & n = 1, 0, -1, \dots \end{cases}$$

Es ist evident, wie man durch sukzessives Differenzieren $\mathcal{Z}^{-1}\{r_\mu\}$, $\mu = 1, 2, \dots$, erhalten kann. Wir halten das Resultat fest.

4.2.12 Satz

Für die rationale Funktion r_μ , $r_\mu(z) = \frac{1}{(z-\xi)^\mu}$, $\mu = 1, 2, \dots$, gilt für $|z| > |\xi|$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{r_\mu\} = (a_\mu[n])_{n \in \mathbf{Z}},$$

$$a_\mu[n] = \begin{cases} \frac{(n-1) \cdots (n-(\mu-1)) \xi^{n-\mu}}{(\mu-1)!}, & n = \mu, \mu+1, \dots, \\ 0, & n = \mu-1, \mu-2, \dots \end{cases}$$

Damit kann man bei gegebener Partialbruchzerlegung von f die inverse z -Transformierte $\mathcal{Z}^{-1}\{f\}$ „zusammenbauen“.

4.2.13 Beispiel

Für f ,

$$f(z) = \frac{8z^2 + z - 5}{(z+2)(2z-1)^2},$$

erhält man durch den Ansatz

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{A}{z+2} + \frac{B}{2z-1} + \frac{C}{(2z-1)^2} \\ &= \frac{A(2z-1)^2 + B(z+2)(2z-1) + C(z+2)}{(z+2)(2z-1)^2} \\ &= \frac{(4A+2B)z^2 + (-4A+3B+C)z + (A-2B+2C)}{(z+2)(2z-1)^2} \end{aligned}$$

durch Koeffizientenvergleich der Zählerpolynome das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4A + 2B &= 8 \\ -4A + 3B + C &= 1 \\ A - 2B + 2C &= -5 \end{aligned}$$

mit der Lösung $A = 1$, $B = 2$, $C = -1$, also

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+2} + \frac{2}{2z-1} - \frac{1}{(2z-1)^2} \\ &= \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2}, \\ \xi_1 &= -2, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.2.12 gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{n-1} z^{-n}, \quad |z| > 2, \\ \frac{1}{z-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n-1)} z^{-n}, \quad |z| > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{(z-\frac{1}{2})^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) 2^{-(n-2)} z^{-n}, \quad |z| > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Man erhält somit

$$\begin{aligned} f(z) &= 2z^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ (-1)^{n-1} 2^{n-1} + 2^{-(n-1)} - \frac{1}{4} (n-1) 2^{-(n-2)} \right\} z^{-n} \\ &= 2z^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ (-1)^{n-1} 2^{n-1} + 2^{-n} (-n+3) \right\} z^{-n}, \quad |z| > 2, \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{Z}^{-1}\{f\} = (a[n])_{n \in \mathbb{Z}}, \quad a[n] = \begin{cases} 0 & , \quad n = 0, -1, -2, \dots, \\ 3 & , \quad n = 1, \\ (-1)^{n-1} 2^{n-1} + 2^{-(n-2)} (-n+2) & , \quad n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

□

Bei späteren Anwendungen spielen gewisse Operationen mit Folgen und deren z -Transformation eine wichtige Rolle. Dies ist zunächst das „Modulieren“ einer Folge $h = (h[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ durch Übergang zur Folge h^\sim , wobei

$$h^\sim[n] := (-1)^n h[n], \quad n \in \mathbb{Z},$$

gesetzt wird. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{h^\sim\}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^\sim[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] (-z)^{-n} = \mathcal{Z}\{h\}(-z) .\end{aligned}$$

Für die Faltung von h mit h^\sim folgt dann

$$\mathcal{Z}\{h * h^\sim\}(z) = \mathcal{Z}\{h\}(z) \cdot \mathcal{Z}\{h\}(-z) .$$

Also ist die z -Transformierte von $h * h^\sim$ eine *gerade* Funktion. Somit verschwinden die Koeffizienten mit ungeraden Indizes. Also gilt

$$\mathcal{Z}\{h * h^\sim\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[2n] z^{-2n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[2n] (z^2)^{-n} .$$

4.2.14 Satz

Es bezeichne $h^\sim = ((-1)^n h[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ die aus h durch „Modulation“ entstehende Folge.

Dann gilt

- (1) $\mathcal{Z}\{h^\sim\}(z) = \mathcal{Z}\{h\}(-z)$.
- (2) $\mathcal{Z}\{h * h^\sim\} = \mathcal{Z}\{h\}(z) \mathcal{Z}\{h\}(-z)$,
 $\mathcal{Z}^{-1}\{h * h^\sim\}[2n + 1] = 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

Bei der Definition von Allpässen hatten wir die zu einer Folge $x = (x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ gespiegelte Folge $x^- = (x[-n])_{n \in \mathbb{Z}}$ eingeführt. Hier gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x^-\}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = \mathcal{Z}\{x\}\left(\frac{1}{z}\right) .\end{aligned}$$

4.2.15 Satz

Es bezeichne $x^- = (x[-n])_{n \in \mathbb{Z}}$ die zu $x = (x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ gespiegelte Folge. Dann gilt

$$\mathcal{Z}\{x^-\}(z) = \mathcal{Z}\{x\}\left(\frac{1}{z}\right) .$$

Für die Impulsantwort h eines Allpasses gilt $h * h^- = \delta$, also

$$\mathcal{Z}\{h\}(z) \mathcal{Z}\{h^-\}(z) = \mathcal{Z}\{\delta\}(z) = 1 ,$$

und folglich

$$\mathcal{Z}\{h\}(z) = \frac{1}{\mathcal{Z}\{h^-\}(z)} = \frac{1}{\mathcal{Z}\{h\}\left(\frac{1}{z}\right)} .$$

4.2.16 Satz

Für die Impulsantwort h eines Allpasses gilt

$$\mathcal{Z}\{h\}(z) = \frac{1}{\mathcal{Z}\{h\}\left(\frac{1}{z}\right)} .$$

Für eine Folge $h = (h[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $h[2n+1] = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, kann man alle Glieder mit ungeraden Indizes *ohne* Informationsverlust unterdrücken. Dies ist das sogenannte *Down-sampling* (*Dezimierung*), also der Übergang von $h = (h[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ zu der Folge $h_{\downarrow 2}$ mit

$$h_{\downarrow 2}[n] := h[2n] , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

(Bei einer Folge, für die gewisse oder sogar alle Glieder $h[2n+1] \neq 0$ sind, führt das Down-sampling zu einem Informationsverlust.) Durch Einsetzen ist leicht folgender Satz zu verifizieren.

4.2.17 Satz

Es gilt

$$\mathcal{Z}\{h_{\downarrow 2}\}(z) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{Z}\{h\}(\sqrt{z}) + \mathcal{Z}\{h\}(-\sqrt{z}) \right) .$$

Die Umkehroperation zum Down-sampling ist das Up-sampling, also der Übergang von der Folge $h = (h[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ zur Folge $h_{\uparrow 2}$ mit

$$h_{\uparrow 2}[n] = \begin{cases} h\left[\frac{n}{2}\right], & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es ist wiederum leicht, folgenden Satz zu verifizieren.

4.2.18 Satz

Es gilt

$$\mathcal{Z}\{h_{\uparrow 2}\}(z) = \mathcal{Z}\{h\}(z^2) .$$

4.2.19 Aufgabe

Sei T der im Abschnitt 4.1 eingeführte Shift-Operator. Man zeige: Für eine beliebige Folge $h = (h[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ gilt

$$[Th * h^{\sim}]_{\downarrow 2} = 0 \quad (\text{Nullfolge}) .$$

□

4.3 Untersuchung diskreter LTI-Systeme mit Hilfe der z -Transformierten

Ein diskretes LTI-System S wird, wie wir im Abschnitt 4.1 gesehen haben, durch die Impulsantwort $h := S\{\delta\}$ charakterisiert. Mit Hilfe der Faltung läßt sich der zum Input $x = (x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ gehörende Output $y := S\{x\}$ als $y = h * x$ beschreiben. Mit Hilfe der z -Transformation folgt dann $\mathcal{Z}\{y\} = \mathcal{Z}\{h\} \mathcal{Z}\{x\}$, d.h. die Faltung $h * x$ geht in die gewöhnliche Multiplikation der z -Transformierten $\mathcal{Z}\{h\}$ und $\mathcal{Z}\{x\}$ über. Das System S wird durch die Impulsantwort $h = S\{\delta\}$ und diese wiederum durch ihre z -Transformierte $\mathcal{Z}\{h\}$ charakterisiert. Also können wir typische Eigenschaften von S — Stabilität, Kausalität — bei $\mathcal{Z}\{h\}$ wiederfinden. Dies legt folgende Definition nahe.

4.3.1 Definition

Für ein diskretes LTI-System S mit der Impulsantwort $h = S\{\delta\}$ bezeichnet man die z -Transformierte $\mathcal{Z}\{h\}$,

$$\mathcal{Z}\{h\}(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}, \quad z \in R_{r_1 r_2},$$

als *Systemfunktion* von S . (Man beachte, daß die Angabe des Konvergenzrings $R_{r_1 r_2}$ wesentlich ist, insbesondere dann, wenn die Summation der Laurent-Reihe in geschlossener Form möglich ist und man nur die sich dabei ergebende Funktion betrachtet; vgl. Beispiel 4.2.4).

4.3.2 Bemerkung

Für die Beschreibung und die graphische Darstellung eines diskreten LTI-Systems stehen uns nun mehrere Möglichkeiten wahlweise zur Verfügung:

- „Modulare“ Darstellung, d.h. wir visualisieren ein komplexes System S mit Hilfe von einfacheren Teilsystemen S_i , $i = 1, \dots, p$.
- Darstellung im Zeitbereich mit Hilfe der Impulsantwort h gemäß

$$y = S\{x\} = h * x.$$

- Darstellung mit Hilfe der z -Transformation gemäß

$$\mathcal{Z}\{y\}(z) = \mathcal{Z}\{h\}(z) \mathcal{Z}\{x\}(z).$$

Diese drei Darstellungsarten sind gleichwertig. Wir können uns also wahlweise auf eine davon zurückziehen, je nachdem welche Form mehr Einsicht in die Eigenschaften des Systems liefert (vgl. auch Abb. 4.8 – 4.10). \square

Aus den Resultaten des vorigen Abschnitts erhält man unmittelbar die folgenden Aussagen. Man beachte dabei, daß Kausalität des Systems bedingt, daß die z -Transformierte rechtsseitig ist.

4.3.3 Satz

- (1) Ein System S ist genau dann bibo-stabil, wenn der Einheitskreis zum Konvergenzbereich der Systemfunktion gehört.
- (2) Für ein kausales System S konvergiert die Systemfunktion für $|z| > r_2$, also außerhalb eines Kreises vom Radius r_2 (kurz gesagt: „bei ∞ “.)
- (3) Für ein kausales und bibo-stabiles System S konvergiert die Systemfunktion für $|z| > r$, wobei $r < 1$ gilt.
- (4) Für ein kausales und bibo-stabiles System S liegen die Singularitäten der Systemfunktion im Innern des Einheitskreises.

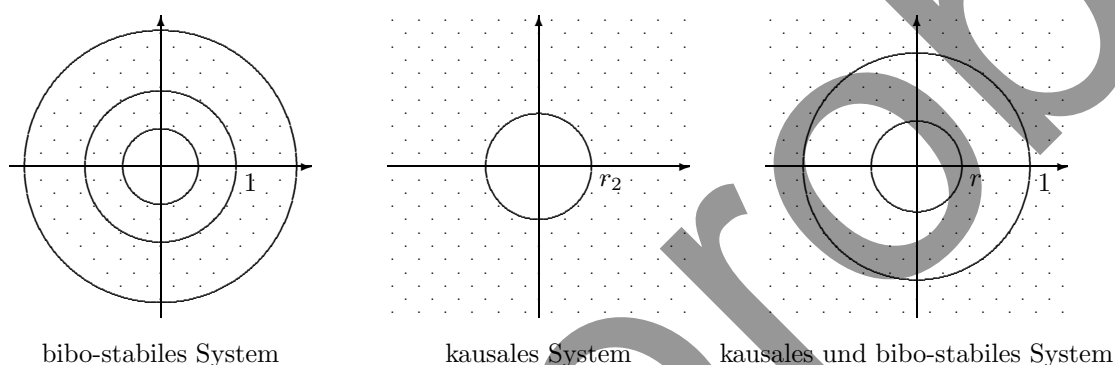


Abb. 4.5. Konvergenzbereiche von Systemfunktionen

Während vom mathematischen Standpunkt alle Laurent-Reihen als Systemfunktionen zugelassen sind, sind bei technischen Realisierungen wichtige Einschränkungen zu beachten, die im wesentlichen darin bestehen, daß zum Aufbau solcher Systeme nur endlich viele spezielle Grundbausteine verwendet werden. Die Linearität des Systems wird durch die Verwendung von Additions- und Multiplikationsgliedern und die Zeitinvarianz durch Verzögerungsglieder (Speicherelemente) gesichert:

Aus Definition 4.2.5 folgt unmittelbar, wie die z -Transformation auf diese Grundbausteine (elementare diskrete LTI-Systeme) wirkt.

4.3.4 Satz

Für die elementaren diskreten LTI-Systeme gilt

- (1) $\mathcal{Z}\{x + y\}(z) = \mathcal{Z}\{x\}(z) + \mathcal{Z}\{y\}(z)$ (Addieren),
- (2) $\mathcal{Z}\{\alpha x\}(z) = \alpha \mathcal{Z}\{x\}(z)$ (Multiplizieren),
- (3) $\mathcal{Z}\{Tx\}(z) = z^{-1} \mathcal{Z}\{x\}(z)$ (Verzögerungsglied).

Unter Verwendung dieser Grundbausteine und des Rekursionsprinzips (Rückführungsschaltung) kann man durch Kaskaden- und Parallelschaltung die technisch wichtigste Klasse von diskreten LTI-Systemen, die sogenannten (kausalen) Differenzgleichungssysteme (mathematisch: Lineare Mehrschritt-Verfahren) realisieren.

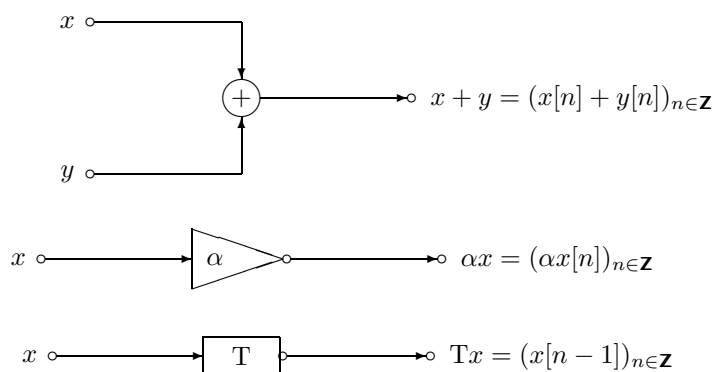


Abb. 4.6. Elementare LTI-Systeme

4.3.5 Beispiel

Wir betrachten die Schaltung aus Abb. 4.7. Es wird angenommen, daß es sich um ein kausales

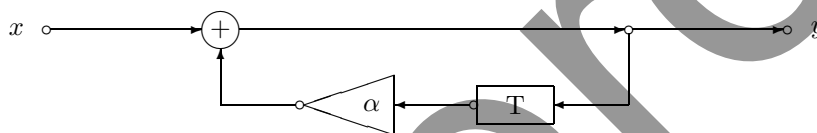


Abb. 4.7. Rückführungssystem erster Ordnung

System handelt. Hier gilt

$$y = x + \alpha T y, \quad y[n] = x[n] + \alpha y[n - 1],$$

oder umgeformt

$$(1 - \alpha T)y = x \iff y[n] - \alpha y[n - 1] = x[n].$$

Hier bereitet die Auflösung nach dem Output $y[n]$ gewisse Schwierigkeiten. Gehen wir aber zu den z-Transformierten $\mathcal{Z}\{x\}$, $\mathcal{Z}\{y\}$ über, so folgt

$$(1 - \alpha z^{-1})\mathcal{Z}\{y\}(z) = \mathcal{Z}\{x\}(z)$$

oder

$$\mathcal{Z}\{y\}(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \mathcal{Z}\{x\}(z).$$

Also ist

$$\mathcal{Z}\{h\}(z) := \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

die Systemfunktion, wobei aber noch der Konvergenzbereich angegeben werden muß. Wegen der vorausgesetzten Kausalität des Systems kommt von den beiden Reihenentwicklungen

$$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} & , \quad |z| > |\alpha| , \\ -\frac{z}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-n} z^n & , \quad |z| < |\alpha| , \end{cases}$$

nur die erste in Betracht. Also ist $\mathcal{Z}\{h\}$,

$$\mathcal{Z}\{h\}(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad |z| > |\alpha|,$$

die Systemfunktion und h ,

$$h[n] = \begin{cases} 0, & \text{falls } n < 0, \\ \alpha^n, & \text{falls } n \geq 0, \end{cases}$$

die Impulsantwort. Es gilt also auch

$$y = h * x \iff y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x[n-k], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Das System ist bibo-stabil, wenn $|\alpha| < 1$ gilt, d.h. wenn der Pol $z_1 = \alpha$ von $\mathcal{Z}\{h\}$ im Innern des Einheitskreises und dieser dann im Konvergenzbereich von $\mathcal{Z}\{h\}$ liegt. \square

4.3.6 Definition

Ein kausales System S , bei dem der Input $x = (x[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ und der zugehörige Output $y = (y[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ durch eine Rekursionsgleichung

$$\sum_{\mu=0}^M \beta[\mu] y[n-\mu] = \sum_{\mu=0}^M \alpha[\mu] x[n-\mu], \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (\text{R})$$

verknüpft sind, bezeichnet man als *lineares Differenzgleichungssystem*. Man bezeichnet es als *explizit*, falls $\beta[0] = 1$ gilt, andernfalls als *implizit*. Es heißt *nichtrekursiv*, falls $\beta[1] = \dots = \beta[M] = 0$, andernfalls *rekursiv*.

Führt man die beiden Folgen $\alpha := (\alpha[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ und $\beta := (\beta[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ ein, so ist (R) äquivalent zu

$$\beta * y = \alpha * x,$$

wobei die Folgen α, β *abbrechend* sind, also nur für endlich viele Indizes von n von Null verschieden sind. Durch z -Transformation beider Seiten von (R) folgt dann

$$\mathcal{Z}\{\beta\} \mathcal{Z}\{y\} = \mathcal{Z}\{\alpha\} \mathcal{Z}\{x\},$$

also

$$\mathcal{Z}\{y\} = \frac{\mathcal{Z}\{\alpha\}}{\mathcal{Z}\{\beta\}} \mathcal{Z}\{x\}.$$

Hier sind $\mathcal{Z}\{\alpha\}$, $\mathcal{Z}\{\beta\}$,

$$\mathcal{Z}\{\alpha\}(z) = \sum_{\mu=0}^M \alpha[\mu] z^{-\mu}, \quad \mathcal{Z}\{\beta\}(z) = \sum_{\mu=0}^M \beta[\mu] z^{-\mu},$$

Polynome vom Höchstgrad M in der Variablen z^{-1} . Somit ist

$$\mathcal{Z}\{h\} := \frac{\mathcal{Z}\{\alpha\}}{\mathcal{Z}\{\beta\}}$$

die Systemfunktion, wobei der Konvergenzbereich wegen der vorausgesetzten Kausalität aus allen $z \in \mathbb{C}$ mit

$$|z| > \rho := \max_{i=1, \dots, n} |z_i|$$

besteht, wenn $z_i, i = 1, \dots, n$, die Nullstellen von $\mathcal{Z}\{\beta\}$ (also Polstellen von $\mathcal{Z}\{h\}$) bezeichnet. $\mathcal{Z}\{h\}$ ist also eine rationale Funktion, wobei der Zähler- und der Nennergrad M nicht übersteigt. Ein solches System ist nach Satz 4.3.3 (4) *bibo-stabil*, wenn $\rho < 1$, d.h. $|z_i| < 1, i = 1, \dots, n$, gilt.

4.3.7 Satz

Ein kausales lineares Differenzgleichungssystem

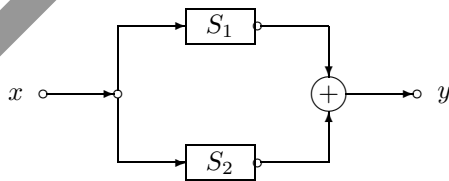
$$\sum_{\mu=0}^M \beta[\mu] y[n - \mu] = \sum_{\mu=0}^M \alpha[\mu] x[n - \mu], \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (\text{R})$$

hat die Systemfunktion

$$\mathcal{Z}\{h\} = \frac{\mathcal{Z}\{\alpha\}}{\mathcal{Z}\{\beta\}}, \quad |z| > \rho := \max_{i=1, \dots, n} |z_i|,$$

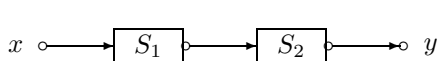
wenn $z_i, i = 1, \dots, n$, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\mathcal{Z}\{\beta\}$ bezeichnet. Gilt $|z_i| < 1, i = 1, \dots, n$, so ist das System *bibo-stabil*.

Ein Vorteil der z -Transformation besteht auch darin, daß man die *Modularisierung* eines Systems, also entweder die Verkettung von einfacheren Bausteinen zu einem Gesamtsystem oder umgekehrt die Zerlegung eines komplexen Systems in logisch überschaubare Teilsysteme, auch bei der Systemfunktion leicht nachvollziehen kann, während dies für die Impulsantwort oft nicht möglich ist. Die wichtigsten Bauprinzipien sind die *Parallel-* und die *Kaskadenschaltung* sowie für Regelungsprobleme die *Rückführungsschaltung*. Wir bezeichnen mit S_1, S_2 die Teilsysteme und mit S das Gesamtsystem und mit h_1, h_2 und h sowie H_1, H_2 und H die entsprechenden Impulsantworten und Systemfunktionen.



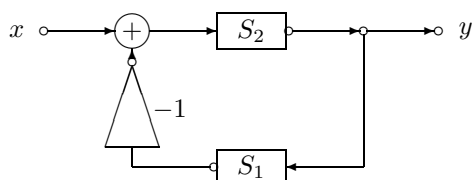
$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ y &= (h_1 + h_2) * x \\ H &= H_1 + H_2 \end{aligned}$$

Abb. 4.8. Parallelschaltung



$$\begin{aligned} S &= S_2 \circ S_1 \\ y &= (h_2 * h_1) * x \\ H &= H_2 H_1 \end{aligned}$$

Abb. 4.9. Kaskadenschaltung



$$\begin{aligned} S &= S_2 \circ (\text{id} - S_1 \circ S) \\ y &= h_2 * (x - h_1 * y) \\ H &= \frac{H_2}{1 + H_2 H_1} \end{aligned}$$

Abb. 4.10. Rückführungsschaltung

4.3.8 Satz

Besteht das diskrete LTI-System S aus den beiden diskreten LTI-Teilsystemen S_1 und S_2 und bezeichnen h, h_1, h_2 die jeweiligen Impulsantworten und H, H_1, H_2 die zugehörigen Systemfunktionen, so gilt bei

(1) Parallelschaltung (Abb. 4.8)

$$h = h_1 + h_2, \quad H = H_1 + H_2,$$

(2) Kaskadenschaltung (Abb. 4.9)

$$h = h_2 * h_1, \quad H = H_2 H_1,$$

(3) Rückführungsschaltung (Abb. 4.10)

$$h = h_2 * (\delta - h_1 * h), \quad H = \frac{H_2}{1 + H_2 H_1} \quad (\delta: \delta\text{-Impuls}).$$

Beweis. Nur die Rückführungsschaltung (3) erfordert etwas Überlegung. Am Eingang von S_1 liegt das Signal $y = S\{x\} = h * x$ und folglich am Ausgang

$$S_1\{y\} = h_1 * y = (h_1 * h) * x.$$

S_2 hat das Eingangssignal

$$x - S_1\{y\} = \delta * x - h_1 * y = \delta * x - (h_1 * h) * x,$$

also das Ausgangssignal

$$S_2\{x - S_1\{y\}\} = h_2 * (\delta * x - (h_1 * h) * x).$$

Dieses ist aber das Ausgangssignal des Gesamtsystems S ; also gilt

$$y = h * x = h_2 * (\delta - h_1 * h) * x$$

und folglich

$$h = h_2 * (\delta - h_1 * h) .$$

Geht man nun zu den z -Transformierten über, so erhält man

$$H = H_2(1 - H_1H)$$

oder nach H aufgelöst

$$H = \frac{H_2}{1 + H_2H_1} .$$

□

Mit diesen Grundbausteinen kann man ein Differenzgleichungssystem als digitale Schaltung realisieren. Das ist auf verschiedene Arten möglich, je nachdem, welche Darstellung der Systemfunktion — Faktorzerlegung, Partialbruchzerlegung, Kettenbruchdarstellung — man verwendet. Man spricht auch von *kanonischen Strukturzerlegungen*, wenn dabei die Anzahl der Addierer, Multiplizierer oder Verzögerungsglieder minimal ist.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall eines expliziten *nichtrekursiven* Systems

$$y[n] = \sum_{\mu=0}^M \alpha[\mu] x[n - \mu] , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

Hier ist die Systemfunktion H polynomial in der Variablen $1/z$,

$$H(z) = \sum_{\mu=0}^M \alpha[\mu] z^{-\mu} ,$$

entsprechend

$$y = \sum_{\mu=0}^M \alpha[\mu] T^\mu x .$$

Ein solches System kann man mit Hilfe von M Addierern, $M + 1$ Multiplizierern und M Verzögerungsgliedern realisieren, siehe Abb. 4.11.

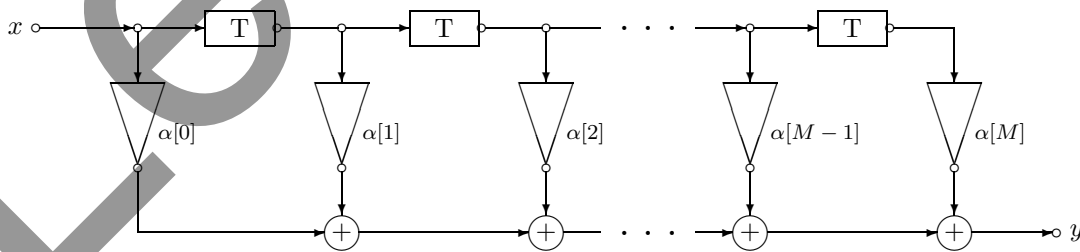


Abb. 4.11. Nichtrekursives System

Während man hier das Polynom H entsprechend

$$H(z) = \alpha[0] + \alpha[1]z^{-1} + \dots + \alpha[M]z^{-M}$$

von links nach rechts ausgewertet hat, kann man auch entsprechend dem Horner-Algorithmus gemäß

$$H(z) = \left(\cdots \left(\alpha[M]z^{-1} + \alpha[M-1] \right) z^{-1} + \cdots + \alpha[1] \right) z^{-1} + \alpha[0]$$

vorgehen. Das ergibt die Schaltung aus Abb. 4.12. Man kann dies auch als Auswertung entsprechend

$$y = \left(\cdots \left(\alpha[M]T + \alpha[M-1] \right) T + \cdots + \alpha[1]T + \alpha[0] \right) x$$

deuten.

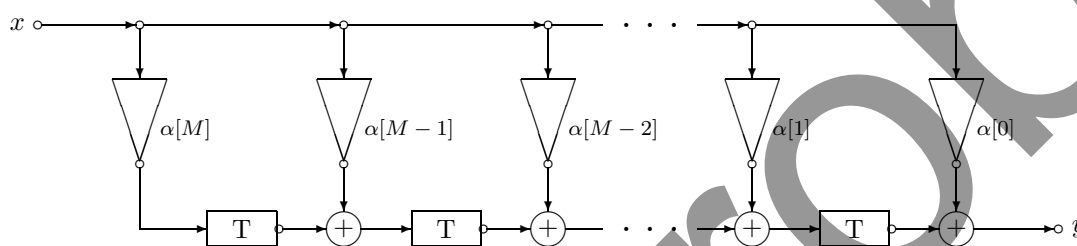


Abb. 4.12. Horner-Realisierung eines nichtrekursiven Systems

4.3.9 Bemerkung

Vergleicht man die beiden Schaltbilder 4.11 und 4.12 miteinander, so erkennt man, daß sie auseinander durch *Transponierung* hervorgehen. Man versteht darunter folgendes wichtiges Bauprinzip: Man vertausche Eingang x und Ausgang y , kehre alle Pfeilrichtungen um und ändere Addierer zu Verzweigungen und Verzweigungen zu Addierern. Dann bleibt die Systemfunktion unverändert. \square

4.3.10 Aufgabe

Im Fall $M = 2^k - 1$, $k = 3$, realisiere man ein nichtrekursives System mit Hilfe des Divide-and-Conquer-Prinzips (vgl. Abb. 2.3). \square

Wir betrachten nun den allgemeineren Fall eines rekursiven Systems in expliziter Form

$$y[n] - \sum_{\nu=1}^N \beta[\nu] y[n - \nu] = \sum_{\mu=0}^M \alpha[\mu] x[n - \mu] .$$

Man beachte, daß wir die Koeffizienten $\beta[\nu]$, $\nu = 1, \dots, N$, hinsichtlich des Vorzeichens unnormiert haben. Durch „Auffüllen“ mit Nullkoeffizienten können wir $M = N$ erreichen, so daß das System jetzt die Form

$$y[n] - \sum_{\mu=1}^M \beta[\mu] y[n - \mu] = \sum_{\mu=0}^M \alpha[\mu] x[n - \mu]$$

hat mit $\beta[\mu], \alpha[\mu] \in \mathbb{R}$. Die zugehörige Systemfunktion H ist rational,

$$H(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^M \alpha[\mu] z^{-\mu}}{1 - \sum_{\mu=1}^M \beta[\mu] z^{-\mu}} .$$

Die erste Möglichkeit einer Strukturzerlegung ist die sogenannte *Direktform*, die auf der Monomdarstellung von Zähler und Nenner beruht. (Wir diskutieren diese Struktur eingehend, da sie auch bei den anderen als Grundmodul zur Anwendung kommt.) Hier zerlegt man H in das Produkt

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \quad (\text{Direktform I})$$

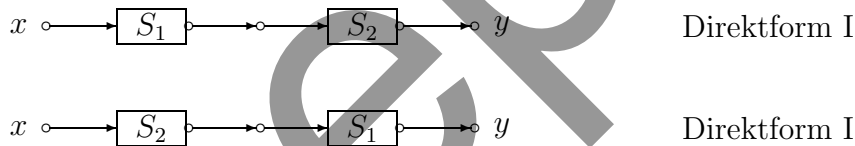
bzw.

$$H(z) = H_2(z)H_1(z) \quad (\text{Direktform II}) ,$$

wobei

$$H_1(z) = \sum_{\mu=0}^M \alpha[\mu] z^{-\mu} , \quad H_2(z) = \frac{1}{1 - \sum_{\mu=1}^M \beta[\mu] z^{-\mu}} .$$

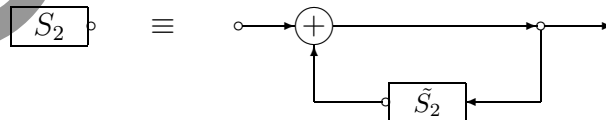
Das System S mit der Systemfunktion H ist also zunächst zerlegt in die Kaskadenschaltung von zwei Teilsystemen S_1 und S_2 , wobei der einzige Unterschied in der Reihenfolge liegt:



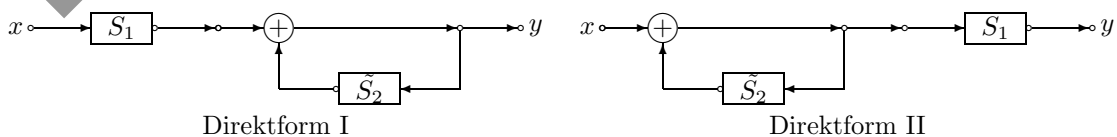
S_1 ist nichtrekursiv, während S_2 durch Rückführung aus dem nichtrekursiven System \tilde{S}_2 mit der Systemfunktion \tilde{H}_2 ,

$$\tilde{H}_2(z) = \sum_{\mu=1}^M \beta[\mu] z^{-\mu} ,$$

entsteht:



Man hat also folgende beiden Realisierungen (S_1, \tilde{S}_2 nichtrekursiv):



Setzt man S_1 und \tilde{S}_2 ein, so resultieren die beiden Schaltungen aus Abb. 4.13.

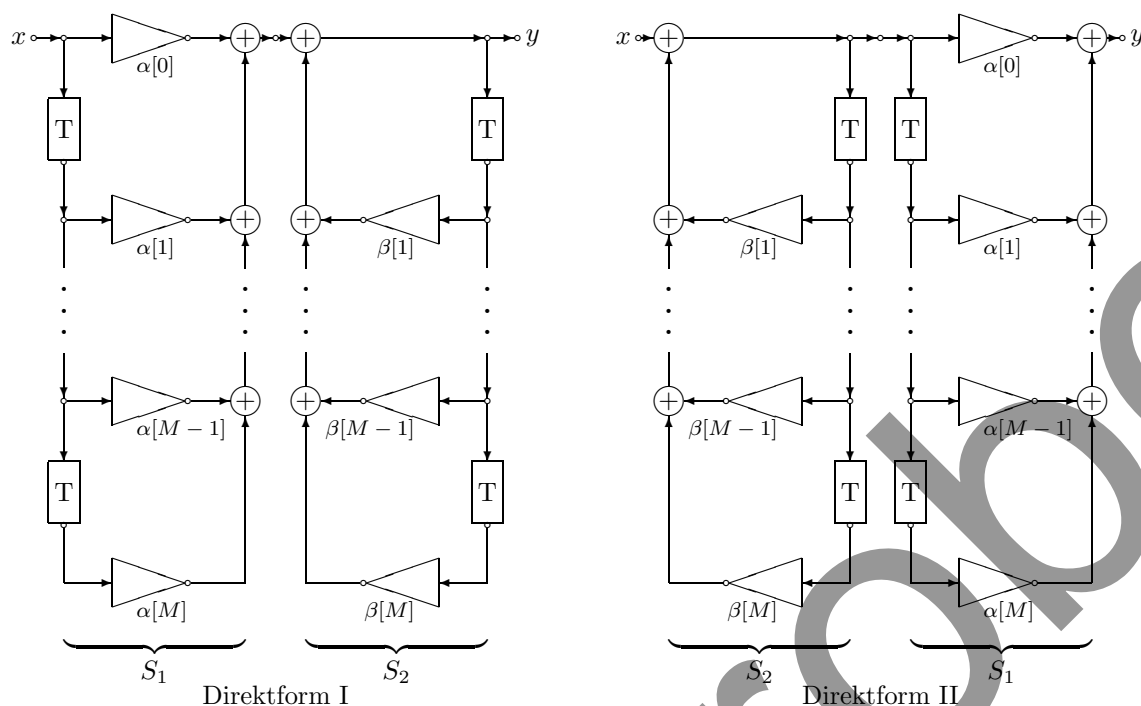


Abb. 4.13. Strukturzerlegung eines rekursiven Systems

Man sieht, daß man bei der Direktform II auf M Verzögerungsglieder verzichten kann, wenn man entsprechend Abb. 4.14 schaltet. Dies ergibt eine hinsichtlich der Verzögerungsglieder kanonische Struktur.

Bei der *Faktorzerlegung* — reelle Koeffizienten $\alpha[\mu], \beta[\mu]$ vorausgesetzt — zerlegt man die Systemfunktion entsprechend Satz 2.3.4 gemäß

$$H(z) = \alpha[M] G_1(z) \cdot G_2(z) \cdots G_s(z) ;$$

dabei entstehen die Faktoren G_p durch Paarung von reellen oder konjugierten Paaren von Zähler- und Nennernullstellen. $G_p, p = 1, \dots, s$, ist also eine rationale Funktion vom Typ (2,2) mit reellen Parametern,

$$G_p(z) = \frac{1 + a_p[1]z^{-1} + a_p[2]z^{-2}}{1 - (b_p[1]z^{-1} + b_p[2]z^{-2})} ,$$

wobei einzelne (aber nicht alle) a_p, b_p verschwinden können. Wählt man für $G_p, p = 1, \dots, s$, jeweils die kanonische Direktform II und schaltet hintereinander, so folgt eine Realisierung von S gemäß Abb. 4.15.

Bei der *Partialbruchzerlegung* — reelle Koeffizienten und einfache Nullstellen vorausgesetzt — zerlegt man H gemäß (vgl. Satz 2.3.5), wobei konjugierte Paare zu reellen Termen zusammengefaßt werden,

$$H(z) = \sum_{p=1}^s H_p(z)$$

$$H_p(z) = \frac{a_p[1]z^{-1} + a_p[2]z^{-2}}{1 - b_p[1]z^{-1} - b_p[2]z^{-2}} , \quad p = 1, \dots, s ,$$

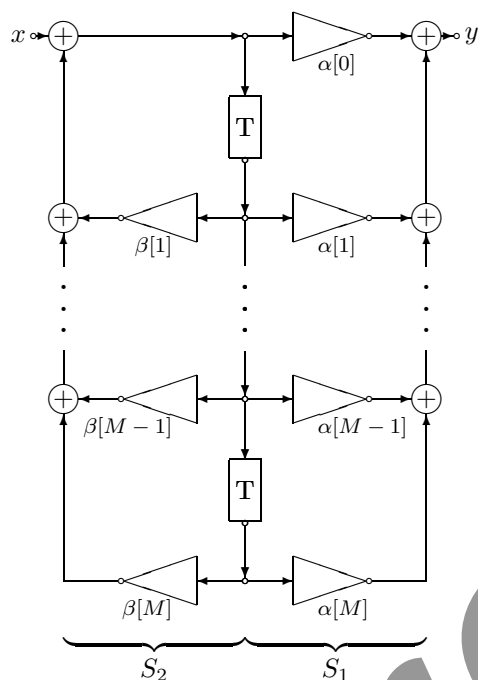


Abb. 4.14. Direktform II (kanonisch) eines rekursiven Systems

wobei wiederum einzelne (aber nicht alle) a_p, b_p verschwinden können. Realisiert man die zu den rationalen Funktionen H_p gehörenden Teilsysteme S_p , $p = 1, \dots, s$, in kanonischer Direktform II und schaltet diese parallel, so erhält man eine Realisierung von H gemäß Abb. 4.16.

Eine weitere Möglichkeit, eine Strukturzerlegung zu bekommen, bietet die *Kettenbruchentwicklung*, bei der ein Rekursionsprinzip (rekursive Schachtelung von Teilmodulen) zur Anwendung kommt. Ist H ,

$$H(z) = \frac{p_M(z^{-1})}{q_N(z^{-1})},$$

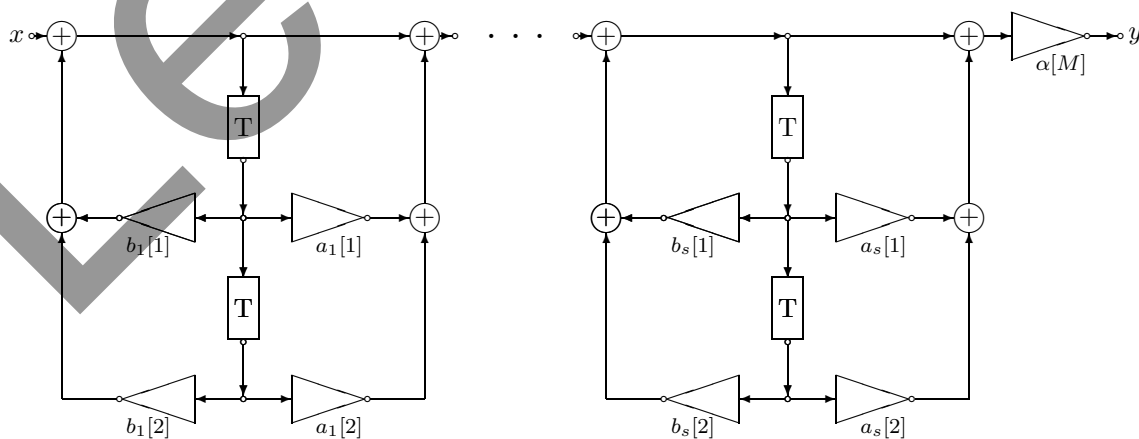


Abb. 4.15. Faktorzerlegung eines Differenzgleichungssystems

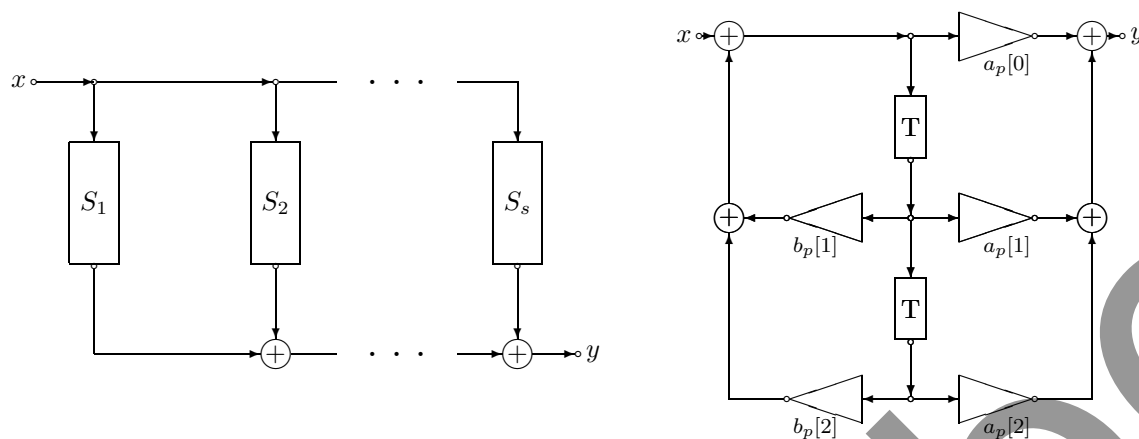


Abb. 4.16. Partialbruchzerlegung und Teilsystem S_p , $p = 1, \dots, s$

mit Polynomen p_M und q_N vom Grad M bzw. N die Systemfunktion, so darf man $M < N$ annehmen, anderenfalls spalte man einen nichtrekursiven (polynomialen) Anteil durch Polynomdivision ab. Wir schränken noch weiter ein und setzen voraus, daß $M = N - 1$ gilt. (Man könnte zwar auch den allgemeineren Fall betrachten, aber mit größeren technischen Schwierigkeiten.) Um das Rekursionsprinzip zu verdeutlichen, bezeichnen wir die Systemfunktion mit H_N ,

$$H_N(z) = \frac{p_{N-1}(z^{-1})}{q_N(z^{-1})}.$$

Dann folgt durch Polynomdivision

$$\frac{q_N(z^{-1})}{p_{N-1}(z^{-1})} = \alpha_1 + \beta_1 z^{-1} + \frac{q_\nu(z^{-1})}{p_{N-1}(z^{-1})}$$

mit $0 \leq \nu \leq N - 2$. Gilt speziell $\nu = N - 2$, so setzt man

$$H_{N-1}(z^{-1}) := \frac{q_{N-2}(z^{-1})}{p_{N-1}(z^{-1})}$$

und erhält die rekursive Darstellung, $\alpha_1 \neq 0$ vorausgesetzt,

$$\begin{aligned} H_N(z) &= \frac{1}{q_n(z^{-1})/p_{N-1}(z^{-1})} = \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1 z^{-1} + H_{N-1}(z^{-1})} \\ &= \frac{\frac{1}{\alpha_1}}{1 - \frac{1}{\alpha_1} \left[(-1) (\beta_1 z^{-1} + H_{N-1}(z^{-1})) \right]}. \end{aligned}$$

Durch die Klammerung ist angedeutet, wie man H_N durch Rückführungsschaltung aus

$$G_2(z) := \frac{1}{\alpha_1}, \quad G_1(z) := (-1) (\beta_1 z^{-1} + H_{N-1}(z^{-1}))$$

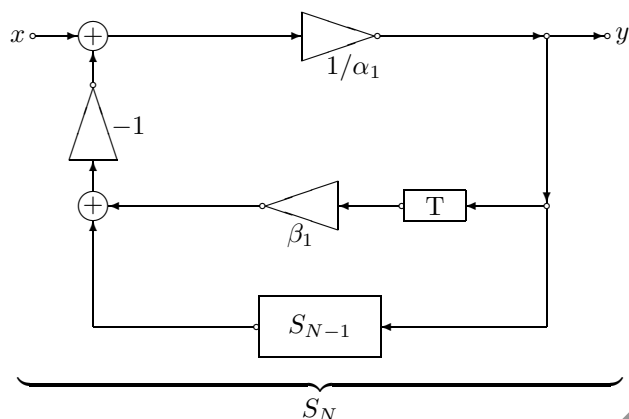


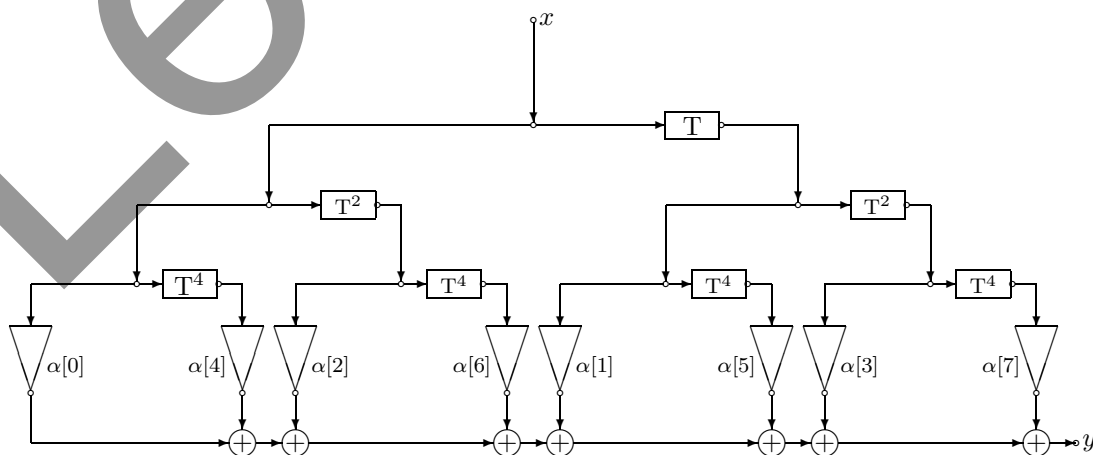
Abb. 4.17. Kettenbruchschaltung in rekursiver Form

und $G_1(z)$ selbst durch Parallelschaltung realisieren kann, siehe dazu Abb. 4.17. Man sieht, daß man in gewissen Fällen — aber nicht immer — eine rationale Funktion H_N als Kettenbruch in der Form

$$H_N(z) = \frac{1}{\alpha_1 + \beta_1 z^{-1} + \frac{1}{\alpha_2 + \beta_2 z^{-1} + \frac{1}{\alpha_3 + \beta_3 z^{-1} + \dots + \frac{1}{\alpha_N + \beta_N z^{-1}}}}$$

entwickeln kann. Gilt dabei $\alpha_\nu \neq 0, \nu = 1, \dots, N$, so erhält man durch rekursive Schachtelung eine Realisierung (Abb. 4.18). Man beachte, daß S_{n-1} von „rechts nach links“ durchlaufen wird!

Lösung zu Aufgabe 4.3.10



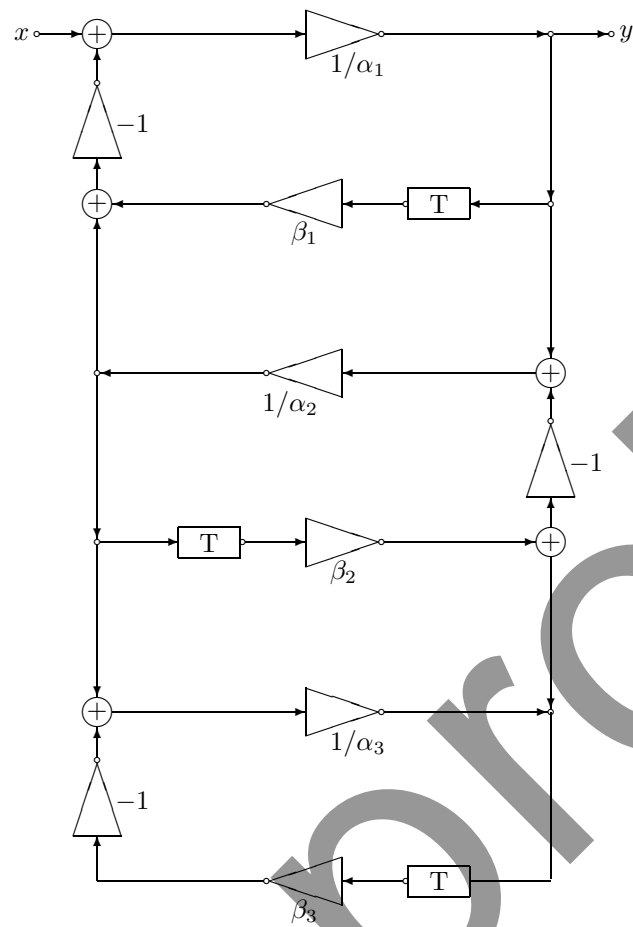


Abb. 4.18. Kettenbruchschialtung im Fall $N = 3$

Transponierung ergibt folgendes Schaltbild:

