

Prof. Dr. Ibrahim Aganoic, Prof. Dr. Kresimir Veselic

**Kurs 01380**

**Partielle Differentialgleichungen**

**LESEPROBE**

Fakultät für  
**Mathematik und  
Informatik**

---

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung und des Nachdrucks bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung der FernUniversität reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

---

## Studierhinweise

Sehr geehrte Fernstudentin, sehr geehrter Fernstudent,

herzlich willkommen zu unserem einführenden Kurs über partielle Differentialgleichungen! Zunächst einige Worte über diese mathematische Disziplin:

Die partiellen Differentialgleichungen sind „Differentialgleichungen über Funktionen mehrerer reeller Variablen“. Sie sind also eine Verallgemeinerung der sogenannten „gewöhnlichen“ Differentialgleichungen (welche nur mit einer reellen Variablen arbeiten). Beide Typen kommen in der Geschichte der Mathematik sehr früh vor, sie sind so alt wie die Analysis selbst.

Die Palette der Aufgaben, Methoden und Ergebnisse ist aber bei den partiellen Gleichungen wesentlich breiter und reicher. Auch heute, nach einer zum Teil stürmischen Entwicklung, ist es noch immer nicht leicht, eine systematische Darstellung des Stoffes anzubieten.

Viele – auch „unparteiische“ – Fachleute sind der Meinung, daß den partiellen Differentialgleichungen in der heutigen Mathematik in gewissem Sinn eine zentrale Rolle zukommt. Zuerst wegen ihres engen Zusammenhangs mit den Anwendungen, welche immer neue Modelle und immer neue Probleme liefern. Dann aber auch deshalb, weil sich auf dem Feld der partiellen Differentialgleichungen die meisten mathematischen Disziplinen begegnen: Klassische Analysis, Differentialgeometrie, Funktionalanalysis im breitesten Sinne, Topologie, Wahrscheinlichkeitstheorie und vieles mehr. Dabei ist das Verhältnis der partiellen Differentialgleichungen zu der jeweiligen anderen Disziplin immer in beiden Richtungen zugleich nutznießend und befruchtend.

All dies zeigt, daß eine Einführung in dieses Gebiet, wie es dieser Kurs sein will, keinen systematischen, von wenigen Axiomen ausgehenden Aufbau haben kann. Der Leser soll vielmehr zunächst die typischen Phänomene kennenlernen, wobei ein großer Wert den jeweiligen Anwendungen beigemessen wird, was durchaus mit der historischen Entwicklung dieses Gebietes im Einklang steht. In der Tat ist der größte Teil dieses Kurses nur *drei* Gleichungen gewidmet: der Wellengleichung, der Wärmeleitungsgleichung und der Laplaceschen Gleichung, welche stellvertretend für die hyperbolischen, parabolischen bzw. elliptischen Gleichungen stehen. Physikalisch wiederum beschreiben diese Gleichungen die (mechanischen oder elektrischen) Schwingungen, die Wärmeleitung bzw. die stationären Prozesse. Die Aufarbeitung des Materials folgt den klassischen Mustern, nur ab und zu werden auch modernere Fragestellungen berücksichtigt wie z.B. die Korrektheitsfragen. Im ganzen Kurs werden überhaupt *nur* lineare Gleichungen behandelt.

Man kann sagen, daß die Einführung in die partiellen Differentialgleichungen einer der zentralen einführenden Stoffe in die Angewandte Mathematik ist, der eine Motivation für spätere „steile“ und technisch anspruchsvollere Kurse über partielle Differentialgleichungen liefern soll.

Der anwendungsorientierte Charakter des Textes kommt auch darin zum Ausdruck, daß mehrere Gleichungen aus physikalischen Prinzipien „hergeleitet“ werden. Dieser für Studenten der Mathematik nicht alltägliche Vorgang wird sicherlich zusätzliche Verständnisschwierigkeiten bereiten, weil er nicht *deduktiv*, sondern *induktiv* aufgebaut ist. Wir sind aber fest davon überzeugt, daß der Mathematiker auch mit der Modellbildung vertraut werden soll und daß die Herleitungen partieller Differentialgleichungen Beispiele *par excellence* einer Modellbildung sind.

Nun etwas über die Aufgaben. Sie sind in vier Gruppen eingeteilt. Diejenigen aus der ersten Gruppe sind unmittelbar mit einer Lösung versehen. Die mit einem Stern (\*) gekennzeichneten entwickeln und vertiefen die Techniken, die bei den Aufgaben des ersten Typs erworben wurden. Ihre Lösungen befinden sich auf den „blauen“ Seiten am Ende der Kurseinheit. Eine ähnliche Rolle spielen die Einsendeaufgaben, für die – zusammen mit Ihren korrigierten Lösungen – später Musterlösungen verschickt werden.

Schließlich gibt es Aufgaben mit zwei Sternen (\*\*). Sie betreffen Erweiterungen oder Vertiefungen, die nicht unmittelbar den „roten Faden“ des Kurses berühren, aber vielleicht das Interesse des einen oder anderen Lesers wecken. Da die Kursautoren nicht in jedem Fall das letzte Wort haben wollen, werden zu diesen Aufgaben keine Lösungen geliefert.

Als letztes ein Wort über die Voraussetzungen für den Kurs. Es wird eine gründliche Kenntnis der Differential- und Integralrechnung einer und (insbesondere) mehrerer reeller Veränderlicher vorausgesetzt, z.B. im Umfang der Kurse ANALYSIS I,II. Ebenso muß Lineare Algebra beherrscht werden, z.B. im Umfang der Kurse LINEARE ALGEBRA I,II (insbesondere der Stoff über die Vektorräume  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  und ihre linearen Homomorphismen in Matrix-Darstellung). In der neueren Struktur des Mathematik-Grundstudiums an der FeU (mit den Kursen 114x) entsprechen dem die Inhalte der Kurse MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN, ANALYSIS und (in geringerem Umfang) LINEARE ALGEBRA sowie (für die Integration in mehreren Variablen) MASS- UND INTEGRATIONSTHEORIE.

Bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen werden an etlichen Stellen Resultate aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen gebraucht. Es ist daher sicherlich wünschenswert, auch dieses Gebiet zu beherrschen. Eine knappe Übersicht über das benötigte Material aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen wird auch in diesem Kurs in §4 angeboten, so daß der Leser lediglich das elementare Wissen über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme mitbringen sollte, so wie es (außer im Kurs ANALYSIS) z.B. auch im Rahmen des Kurses MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK UND TECHNIK enthalten ist. Diesen letzteren Kurs vorher zu bearbeiten empfiehlt sich auch deshalb, weil dadurch der Bezug zu den Anwendungen besser verstanden werden kann.

# Inhalt

## des Kurses PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

§1	Partielle Differentialgleichungen der Mathematischen Physik	
1.0	Einführendes über Partielle Differentialgleichungen	<i>Kurseinheit 1</i>
1.1	Die wichtigsten Gleichungen der Mathematischen Physik	"
1.2	Einige weitere Gleichungen der Mathematischen Physik	"
1.3	Rand- und Anfangsbedingungen	"
1.4	Die Formel von D'Alembert	"
1.5	Die Poissonsche Formel	<i>Kurseinheit 2</i>
1.6	Klassifikation bei Gleichungen zweiter Ordnung	"
1.7	Charakteristiken und das Anfangswertproblem	"
1.8	Kanonische Formen im Falle zweier Veränderlicher	"
§2	Die Gaußsche Formel	
2.0	Einleitung	<i>Kurseinheit 3</i>
2.1	Das Integral auf einer Mannigfaltigkeit	"
2.2	Die Gaußsche Formel	"
2.3	Die Integralform der Erhaltungsgesetze	"
2.4	Der Laplacesche Operator in krummlinigen Koordinaten	"
§3	Die Laplacesche Gleichung	
3.0	Einleitung	<i>Kurseinheit 4</i>
3.1	Greensche Formeln	"
3.2	Die Integraldarstellung	"
3.3	Die Greensche Funktion	"
3.4	Die Poissonsche Formel	"
3.5	Äußere Randwertprobleme	"
3.6	Das Newtonsche Potential	"
§4	Die Fourierreihe für die Laplacesche Gleichung	
4.1	Fourierreihen	<i>Kurseinheit 5</i>
4.2	Orthogonale Funktionensysteme	"
4.3	Das Anfangswertproblem für gewöhnliche Differentialgleichungen	<i>Kurseinheit 6</i>
4.4	Das Randwertproblem für die gewöhnliche lineare Gleichung zweiten Grades	"
4.5	Das Sturm–Liouvillesche Problem	"
4.6	Zylinderfunktionen	<i>Kurseinheit 7</i>
4.7	Sphärische Funktionen	"
4.8	Schlußbemerkungen zum Randwertproblem für die Laplacesche Gleichung	"

## Stichwortverzeichnis

zum Kurs PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

A	Abhängigkeitsgebiet	1–34, 2–21 *
	Anfangsbedingungen	1–25 ff., 6–3
	Anfangswertproblem	1–26, 6–3, 6–8
	assoziierte Legendresche Funktionen	7–20
	Atlas	3–3
	Außennormale	3–15
B	Basis (von Lösungen)	6–7
	Besselsche Differentialgleichung	7–5
	– Funktion	7–5
	– mit imaginärem Argument	7–12
	– Gleichung	5–33
	– Ungleichung	5–12, 5–33
	biharmonische Gleichung	1–23
C	Cauchy-Schwarzsche Ungleichung	5–32
	Charakteristik	1–32, 2–17 f.
	charakteristisches Dreieck	1–34, 2–21
	charakteristische Gleichung	2–18, 6–14
	Cosinusreihe	5–17
D	d’Alembertsche Formel	1–34 f., 3–24
	Diffeomorphismus	2–11 f.
	Differentialgleichung, partielle	1–3
	Dirichletsche Randbedingung,	
	Dirichletsches Randwertproblem	1–25
	Divergenzsatz	3–18
	Dreiecksungleichung	5–32

---

\* 1–34 heißt z.B., daß der betreffende Begriff in Kurseinheit 1 auf Seite 34 zu finden ist.

E	Eigenfunktion	5-4, 6-22
	Eigenwert	5-3, 6-22
	Einflußgebiet	1-35, 2-21 f.
	elliptisch	2-11
	Eulersche Gleichung	1-21
F	finit	3-26
	Flächenelement	3-7
	Flächeninhalt	3-8
	Fourierkoeffizienten	5-7, 5-32
	Fouriermethode	5-7
	Fourierreihe	5-7, 5-33
	Fundamentallösung (der Laplaceschen Gleichung)	4-7
	Fundamentalsystem	6-7
	Funktional (der Energie)	7-33
G	Gammafunktion	7-5 f.
	Gaußsche Formel	3-16
	geschlossen (Kurve, Hyperfläche)	3-15
	Gewichtsfunktion	5-36
	glatt	3-3
	Gradientensatz	3-18
	Greensche Formeln	4-3 ff.
	– Funktion der Laplaceschen Gleichung	4-14 ff.
	– des gewöhnlichen RWP's	6-18 ff.
	Greenscher Satz	3-20
H	harmonische Funktion	4-10
	homogen	1-6, 1-26
	hyperbolisch	2-11
	Hyperfläche	2-15, 3-4
I	inhomogen	1-6, 1-26
	Inversion (auf der Sphäre)	3-32
J	Jacobische Matrix	2-12
	Jordansche Kurven	3-13

K	kanonische Form	2–13
	Karte	3–3
	Kelvinsche Transformation	3–33
	Klein-Gordon-Gleichung	1–24
	Kontinuitätsgleichung	1–22
	Kontinuum	1–9
	Konus (der Vergangenheit bzw. Zukunft)	1–33
	Konvergenz im (quadratischen) Mittel	5–16
	konzentrierte Quelle bzw. Ladung	4–7
	Korrektheit	1–36
	Korteweg-de Vries, Gleichung von –	1–22
	Kugelflächenfunktionen	7–24
	–funktionen	7–27
	Kurvenintegral	3–13 f.
L	Lamésche Gleichung	1–22
	Längenelement	3–12
	Laplacesche Gleichung	1–9
	Legendre, Gleichung von –	7–15
	–, Polynome von –	7–15
	Lichtkonus	1–32
	linear (un-)abhängig	5–32, 6–6
	lineare Gleichung	1–5, 2–10
	Liouvillesche Formel	6–7, 6–11
	Lokalisationsformeln	3–19
	Lösung	1–3
	–, allgemeine	6–7
	–, klassische	1–5, 1–36
	–, schwache	1–36, 2–5, 3–22
	–, verallgemeinerte	1–5, 2–5
M	Mannigfaltigkeit	3–3
	Matrix der ältesten Koeffizienten	2–10
	Maximumprinzip	4–13
	Maxwellsche Gleichungen	1–23
	Mittelwertsatz	4–11
N	Navier-Stokessche Gleichung	1–22
	Neumannsches Randwertproblem	1–25
	Normale	2–16, 3–7



O	Ordnung (einer Gleichung)	1–3
	orthogonal	5–32, 5–36
	orthonormiert	5–32, 5–36
P	parabolisch	2–11
	Parametrisierung	3–3
	Parsevalsche Gleichung	5–16, 5–35
	–, verallgemeinerte	5–35
	Picard-Lindelöf	6–5
	Poissonsche Formel für die Laplacegleichung	4–19
	– für die Wärmeleitungsgleichung	2–5
	Poissonsche Gleichung	1–10
	Poissonscher Kern	4–19
	Potential	3–14
	–, Volumen- oder Newtonsches	4–10
	– der einfachen oder doppelten Schicht	4–11
R	Rand-Anfangswertproblem	1–26
	Randbedingungen	1–25 ff., 6–16
	Randwertproblem	1–25, 6–16
	–, äußeres	4–25
	regulär	4–25
	Rodriguessche Formel	7–15
	Rotationssatz	3–18
S	Schock	3–22
	Schrödingergleichung	1–23
	Separationsmethode	5–7
	separierte Lösung	5–3, 7–3, 7–14
	Signatur (einer Matrix)	2–11
	singuläre Koeffizienten	6–13 ff., 6–20 f., 6–29 f.
	Singularität, (nicht) hebbare	4–22
	Sinusreihe	5–18
	Skalarprodukt	5–31
	sphärische Funktionen	7–27
	Spiegelung (Methode der –)	4–15
	stückweise glatt	3–6
	– stetig (differenzierbar)	3–6
	Sturm-Liouvillesches Problem	6–22
	–, singuläres	6–30
	sukzessive Approximationen	6–3
	Superpositionsprinzip	1–6, 1–26

---

T	Tangentenhyperebene	2–16
	Triangulierung	3–8
	Tricomische Gleichung	2–13
	Trigonometrische Reihe	5–6
	Typ	2–11
U	Umgebung von $\infty$	4–24
	Umströmungsproblem	4–29
V	Variationsgleichung	3–27, 7–33
	-theorie	7–32 ff.
	vernachlässigbar	3–4, 3–6
	vollständig	5–34
W	Wärmeleitungsgleichung	1–9, 1–14
	Wellengleichung	1–9
	Wirbelfreiheit	4–29
	Wronskideterminante	6–7, 6–10
Z	zeitartig	2–22
	zylindrische Funktionen	7–5

## Verzeichnis der verwendeten Symbole

$C^{(k)}, C^{(\infty)}$	3–3
$\Delta, \Delta_x$	1–9
div	1–21
$\partial\Omega$	1–25
$D(\mathcal{O})$	3–26
$dS$	3–7
$dx^{(i)}$	1–11
$f_n$	4–6
$\Gamma$	1–25, 3–11, 7–5
$\vec{\Gamma}, \overleftarrow{\Gamma}$	3–13
grad	1–21
$\mathcal{H}(0, l)$	5–31
$I_n(x)$	7–12
$(J_{ik})$	2–12, 3–30
$J_n(x)$	7–5
$K_\rho^n$	3–12
$L$	3–30
$N$	3–6
$\nu$	2–16
$\nabla$	1–21
$\ \cdot\ $	5–31
$o, \mathcal{O}$	4–22 f.
$[\phi]$	3–23
$P_n(x)$	7–15
rot	1–21
$ S $	3–8
$S_\rho^n$	3–4
$(\cdot, \cdot)$	5–31, 5–36
$u^*$	3–33
$x^*$	3–32
$Y_n^m(x)$	7–24



# Inhaltsverzeichnis

	Einleitung . . . . .	2
<b>1</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen der Mathematischen Physik</b>	<b>3</b>
1.0	Einführendes über Partielle Differentialgleichungen . . . . .	3
1.1	Die wichtigsten Gleichungen der Mathematischen Physik . . . . .	9
1.2	Einige weitere Gleichungen der Mathematischen Physik . . . . .	21
1.3	Rand- und Anfangsbedingungen . . . . .	25
1.4	Die Formel von D'Alembert . . . . .	31
	Lösungen der zusätzlichen Aufgaben . . . . .	41

## Einleitung

Diese Kurseinheit und der ganze §1, der sich auch in die Kurseinheit 2 erstreckt, bringt technisch nicht viel Neues. Wir stellen die Anfangs- und Randwertprobleme – dies sind typische Probleme der partiellen Differentialgleichungen – und lösen sie an einigen konkreten linearen Gleichungen: der Gleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, der Wellen- und Wärmeausbreitung in einer Dimension. Dabei soll der Leser, ausgehend von ihm vertrautem Material, die wichtigsten Fragestellungen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen kennenlernen.

Wesentlich delikater (für einen Mathematiker) wird derjenige Teil des Textes, wo einige Gleichungen aufgrund physikalischer Prinzipien hergeleitet werden. Wenn hier wesentliche Verständnisschwierigkeiten auftreten, so empfiehlt sich zunächst das Weiterbearbeiten der Kurseinheit bis zum Ende. Dann sollte man es mit jenem „aufgeschobenen“ Teil noch einmal versuchen. Testen Sie Ihren Erfolg an den dort gegebenen Aufgaben!

# 1 Partielle Differentialgleichungen der Mathematischen Physik

## 1.0 Einführendes über Partielle Differentialgleichungen

Was die (gewöhnliche) Differentialgleichung für Funktionen einer Variablen ist, das ist die partielle Differentialgleichung für die Funktionen mehrerer Variablen. Z.B. ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + e^{x_1} + \sin \left( u \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = 0$$

eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die unbekannte Funktion  $u$ . Eine allgemeine **partielle Differentialgleichung erster Ordnung** für eine Funktion  $u$  zweier reeller Variablen lautet

$$\Phi \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, u, x_1, x_2 \right) = 0, \quad (1.0.1)$$

wobei  $\Phi$  eine gegebene, in der Regel stetige Funktion von fünf reellen Variablen ist. Eine Funktion  $u$ , definiert auf einem Gebiet  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^2$ , heißt eine **Lösung** von (1.0.1), wenn sie auf  $\Omega$  einmal differenzierbar ist und dort (1.0.1) genügt in dem Sinne, daß

$$\Phi \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2), u(x_1, x_2), x_1, x_2 \right) = 0$$

gilt für alle  $(x_1, x_2)^T$  aus  $\Omega$ . Ähnlich lautet eine allgemeine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\Psi \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, u, x_1, x_2 \right) = 0. \quad (1.0.2)$$

Mit wachsender Anzahl der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  und der Ordnung der Gleichung kompliziert sich schon das Aufschreiben der Gleichung (geschweige denn ihre Lösung!). Wie der Leser selbst schon gemerkt haben wird, ist für uns die **Ordnung** einer partiellen Differentialgleichung gleich der höchsten in ihr auftretenden Ableitungsordnung.

Typisch für gewöhnliche Differentialgleichungen ist es, daß sie ohne zusätzliche (Rand- oder Anfangs-)Bedingungen jeweils unendlich viele Lösungen besitzen; z.B. ist die sogenannte allgemeine Lösung der Gleichung

$$y'' + xy' = 0 \quad (1.0.3)$$

gegeben durch

$$y(x) = C_1 \int_0^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C_2. \quad (1.0.4)$$

Hier sind  $C_1, C_2$  die Integrationskonstanten, welche nach den Anfangs- bzw. Randbedingungen bestimmt werden. Insgesamt gibt es also unendlich viele Lösungen. Genauer gesagt ist die Menge aller Lösungen ein zweidimensionales Gebilde – hier, wegen der Linearität der Differentialgleichung, ein zweidimensionaler Vektorraum. Im allgemeinen ist in der Regel die Menge aller Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung ein  $n$ -dimensionales Gebilde (eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit). Wie verhalten sich die partiellen Differentialgleichungen in dieser Hinsicht?

Wir betrachten eine ganz einfache:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} = 0, \quad y = y(x_1, x_2) . \quad (1.0.5)$$

Hier wird bezüglich  $x_2$  überhaupt nicht abgeleitet, so daß für jedes  $x_2$  eine Gleichung vom Typ (1.0.3) entsteht. Also ist die  $x_1$ -Abhängigkeit von  $y$  auch durch (1.0.4) gegeben, nur muß nicht für jedes  $x_2$  die gleiche Konstante  $C_1$  oder  $C_2$  genommen werden; diese dürfen auch von  $x_2$  abhängen. Die allgemeine Lösung von (1.0.5) lautet

$$y(x_1, x_2) = C_1(x_2) \int_0^{x_1} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi + C_2(x_2) , \quad (1.0.6)$$

wobei  $C_1, C_2$  nun beliebige Funktionen von  $x_2$  sind. Sind  $C_1, C_2$  z.B. zweimal stetig differenzierbar, so ist das  $y$  aus (1.0.6) eine zweimal stetig differenzierbare Lösung von (1.0.5) (sie ist also sooft stetig differenzierbar, wie die Ordnung der Differentialgleichung beträgt).

Wir können dies so ausdrücken: *Die Menge aller Lösungen einer partiellen Differentialgleichung ist unendlich-dimensional.*

**\* 1.0.1 Aufgabe.** *Man zeige, daß die Gleichung (1.0.5) keine zweimal stetig differenzierbare Lösung haben kann, die nicht durch (1.0.6) erfaßt worden wäre.*

**1.0.2 Aufgabe.** *Man finde alle zweimal stetig differenzierbaren Lösungen der Gleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 . \quad (1.0.7)$$

**Lösung.** Man integriere (1.0.7) bezüglich  $x_1$  von 0 bis  $x_1$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi, x_2) d\xi = \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial x_2}(\xi, x_2) \right) d\xi \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial u}{\partial x_2}(0, x_2) . \end{aligned}$$



Nochmalige Integration bezüglich  $x_2$  ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(0, \xi) d\xi &= \int_0^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, \xi) d\xi \\ &= u(x_1, x_2) - u(x_1, 0) . \end{aligned} \quad (1.0.8)$$

Dies gibt

$$u(x_1, x_2) = C_1(x_1) + C_2(x_2) , \quad (1.0.9)$$

wobei  $C_1, C_2$  (beliebige) zweimal stetig differenzierbare Funktionen einer Variablen sind.

Hier möchten wir auf einen für viele Gleichungen typischen Umstand aufmerksam machen. Wir nennen eine Funktion **klassische Lösung** einer Gleichung, wenn sie so oft stetig differenzierbar ist, wie die Ordnung der Gleichung es angibt, und wenn sie dieser Gleichung genügt. Ist z.B.  $\Psi$  in (1.0.2) stetig, so scheint dies eine durchaus natürliche Definition einer Lösung zu sein.

Bei (1.0.7) ist das  $\Psi$  stetig. Die Lösung (1.0.9) ist klassisch genau dann, wenn  $C_1, C_2$  jeweils zweimal stetig differenzierbar sind. Lassen wir für  $C_1, C_2$  jeweils *einmal* stetig differenzierbare Funktionen zu, erreichen wir noch immer, daß alle *in der Gleichung vorkommenden* Ableitungen stetig sind, was durchaus als natürliche Lösung angesehen werden kann. Wir werden vielmehr später erfahren, daß sogar nur noch stetige oder nur noch integrierbare Funktionen  $C_1, C_2$  in (1.0.9) eine „Lösung“ von (1.0.7) liefern können. Es wird also Gleichungen geben, die „Lösungen“ (sogar wichtige und überaus relevante) haben, welche sie im üblichen Sinne gar nicht lösen (sogenannte **verallgemeinerte Lösungen**).

Daß es auch bei partiellen Gleichungen eine Art Anfangsbedingungen geben kann, sieht man z.B. in (1.0.6), wo sofort folgt

$$C_2(x_2) = y(0, x_2) , \quad C_1(x_2) = \frac{\partial y}{\partial x_1}(0, x_2) .$$

Wir können sagen: (1.0.5) ist eindeutig lösbar, wenn auf der Geraden  $x_1 = 0$  die Funktion selbst und ihre erste  $x_1$ -Ableitung vorgegeben sind. Solch ein Vorgehen ist bei (1.0.7) offenbar *nicht* möglich, da in (1.0.9) sich zwangsläufig

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2) = \frac{dC_1}{dx_1}(0) = \text{const.}$$

ergibt, es also nicht als beliebige Funktion von  $x_2$  vorgegeben werden kann. Darüber später etwas mehr!

Eine **lineare Gleichung** ist linear in allen Ableitungen und der Funktion selbst. So lautet die **lineare Gleichung erster Ordnung** in  $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)u = f(x) , \quad x \in \mathbb{R}^n , \quad (1.0.10)$$

wobei  $a_1, \dots, a_n, a_0, f$  gegebene Funktionen von  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  sind.

Die **lineare Gleichung zweiter Ordnung** lautet

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)u = f(x) \quad , \quad (1.0.11)$$

usw.. Bei  $f = 0$  heißen die Gleichungen **homogen**, sonst sind sie **inhomogen**. Die Funktion  $f$  bezeichnet man oft einfach als **rechte Seite**.

Für lineare Gleichungen charakteristisch ist das Superpositionsprinzip (selbst nachprüfen!):

*Lösen die Funktionen  $u_1, \dots, u_s$  eine lineare Gleichung mit den jeweiligen rechten Seiten  $f_1, \dots, f_s$ , so löst eine beliebige lineare Kombination der  $u_1, \dots, u_s$  dieselbe Gleichung mit der entsprechenden linearen Kombination der rechten Seiten. Ist insbesondere eine Gleichung homogen, so löst mit  $u_1, \dots, u_s$  jede lineare Kombination dieser Funktionen die Gleichung wieder.*

Dieses Prinzip kennt der Leser sicherlich aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen oder, noch eher, aus der Theorie der linearen Gleichungssysteme in der Linearen Algebra, wo es die gleiche Rolle und Bedeutung hat.

Wegen ihrer Rolle in den Anwendungen fällt linearen Gleichungen zweiter Ordnung eine ganz besondere Bedeutung in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu. Dementsprechend widmet sich der Rest unseres Kurses fast ausschließlich diesen Gleichungen. Um dem Leser jedoch einige weitere elementare Erfahrungen zukommen zu lassen, betrachten wir bis zum Ende dieses Abschnitts die lineare Gleichung erster Ordnung mit **konstanten Koeffizienten**:

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f(x) \quad , \quad (1.0.12)$$

wobei  $a_0, a_1, \dots, a_n$  gegebene reelle Zahlen sind und  $f$  eine gegebene, auf  $\mathbb{R}^n$  stetige reellwertige Funktion ist. Dabei wird noch vorausgesetzt, daß der Vektor

$$(a_1, \dots, a_n)^T = a \quad (1.0.13)$$

nicht verschwindet.

**1.0.3 Aufgabe.** *Man finde alle stetig differenzierbaren Lösungen von (1.0.12).*

**Lösung.** Da  $a$  aus (1.0.13) nicht verschwindet, können wir stets annehmen, daß  $a$  ein Einheitsvektor ist, d.h. daß  $a^T a = 1$  gilt (sonst dividiert man (1.0.12) durch  $\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ ). Dann aber ist

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

nichts anderes als die Ableitung von  $u$  in der Richtung von  $a$ . Wir nutzen das so aus, indem wir neue Cartesische Koordinaten einführen, bei denen diese Richtung z.B. mit der  $x_1$ -Achse übereinstimmt. Wir setzen also

$$\hat{u}(x') = u(x) \quad , \quad \hat{f}(x') = f(x) \quad , \quad x' = Rx \quad , \quad (1.0.14)$$

wobei  $R = (r_{ij})$  eine noch zu bestimmende orthogonale Matrix ist. Dies substituieren wir in (1.0.12). Nach der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= \sum_{i,j} a_i \frac{\partial \hat{u}}{\partial x'_j}(x') \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial \hat{u}}{\partial x'_j}(x') r_{ji} \\ &= \sum_j a'_j \frac{\partial \hat{u}}{\partial x'_j}(x') \end{aligned}$$

mit

$$a'_j = \sum_i r_{ji} a_i \quad .$$

Schreiben wir vektoriell  $(a'_1, \dots, a'_n)^T = a'$ , so ist ( $R$  ist orthogonal!)

$$a' = Ra \quad , \quad a = R^{-1}a' = R^T a' \quad .$$

Nun soll  $R$  so gewählt werden, daß  $(a'_1, \dots, a'_n) = (1, 0, \dots, 0)$  gilt. Wie aus der Linearen Algebra bekannt, ist dies so möglich, indem der Vektor  $a$  durch Vektoren  $u_2, \dots, u_n$  bis zu einer orthonormalen Basis in  $\mathbb{R}^n$  erweitert wird und dann

$$R^T = (a, u_2, \dots, u_n)$$

gesetzt wird. In der Tat:

$$Ra = (a^T a, u_2^T a, \dots, u_n^T a)^T = (1, 0, \dots, 0)^T \quad .$$

Die neue Funktion  $\hat{u}$  löst also die Gleichung

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x'_1} + a_0 \hat{u} = \hat{f} \quad . \quad (1.0.15)$$

Genauer gesagt, für jedes stetig differenzierbare  $u$ , das (1.0.12) löst, ist das entsprechende  $\hat{u}$  ebenso stetig differenzierbar und löst (1.0.15) (und umgekehrt). Dies ist ein Beispiel zur Überführung einer Gleichung in eine andere, äquivalente durch Transformation der unabhängigen Veränderlichen, was dem Leser auch bei gewöhnlichen Differentialgleichungen begegnet ist.

Nun aber befinden wir uns in einer ähnlichen Situation wie bei der Gleichung (1.0.5): Für jede Wahl von  $x'_2, \dots, x'_n$  stellt (1.0.15) eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung dar. Unter Angabe von z.B.  $\hat{u}(0, x'_2, \dots, x'_n)$  ist ihre einzige Lösung gegeben durch

$$\hat{u}(x') = e^{-a_0 x'_1} \left[ \int_0^{x'_1} e^{a_0 \xi_1} \hat{f}(\xi_1, x'_2, \dots, x'_n) d\xi_1 + \hat{u}(0, x'_2, \dots, x'_n) \right] \quad . \quad (1.0.16)$$

Daraus folgt, daß die Menge aller Lösungen von (1.0.15) gegeben ist durch

$$\hat{u}(x') = e^{-a_0 x'_1} \left[ \int_0^{x'_1} e^{a_0 \xi_1} \hat{f}(\xi_1, x'_2, \dots, x'_n) d\xi_1 + C(x'_2, \dots, x'_n) \right] \quad , \quad (1.0.17)$$

wobei  $C$  eine beliebige, auf  $\mathbb{R}^{n-1}$  stetig differenzierbare Funktion ist. Nach (1.0.14) liefert (1.0.17) auch die Menge aller Lösungen von (1.0.12), wenn die Abkürzungen

$$\begin{aligned} x_1' &= \sum_j r_{1j} x_j = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n, \\ x_i' &= \sum_j r_{ij} x_j \end{aligned} \tag{1.0.18}$$

benutzt werden. Damit ist die Aufgabe gelöst.

**\*\* 1.0.4 Aufgabe.** *Man finde die Lösung von (1.0.12), welche auf einer Hyperebene*

$$H(\nu) = \{x \in \mathbb{R}^n, \nu^T x = 0\},$$

*$\nu$  ein Einheitsvektor, vorgegeben ist. Existiert solch eine Lösung immer, und ist sie eindeutig für jedes  $\nu$ ?*

Auch allgemeinere lineare (und nichtlineare) partielle Differentialgleichungen erster Ordnung werden durch Zurückführung auf gewöhnliche Differentialgleichungen gelöst. Näheres findet der Leser darüber z.B. in

- W.I. Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik II u. IV, Berlin 1979,
- W.W. Stepanow, Lehrbuch der Differentialgleichungen, Berlin 1963.

## 1.1 Die wichtigsten Gleichungen der Mathematischen Physik

Physikalische Prozesse in einem materiellen Medium, sonst auch **Kontinuum** genannt, lassen sich durch Gleichungen beschreiben, welche üblicherweise als **Gleichungen der Mathematischen Physik** bekannt sind. Die unbekannte Funktion  $u$  – die Lösung der Gleichung – hängt dabei von den räumlichen Variablen  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  sowie der zeitlichen Variablen  $t$  ab, wobei die ersten als ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  aufgefaßt werden können. Wir werden also schreiben, je nach Bedarf,

$$u = u(x, t) = u(x_1, \dots, x_n, t) .$$

Ist der Prozeß *stationär*, fällt die  $t$ -Abhängigkeit weg:  $u = u(x)$ . Die Gleichungen können kürzer geschrieben werden mit Hilfe des sogenannten Laplaceschen Operators:

$$\Delta = \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} .$$

Dabei sind zunächst die Fälle  $n = 1, 2, 3$  von Interesse:

- $n = 1$  : Prozesse auf einer Geraden ,
- $n = 2$  : Prozesse in einer Ebene ,
- $n = 3$  : Prozesse im Raum .

*Selbstverständlich sind auch Prozesse auf „krummen Gebilden“, d.h. Mannigfaltigkeiten (Sphäre usw.) denkbar und von Interesse. Dort werden oft zweckmäßigerweise statt Cartesischen andere, passendere Koordinaten gewählt.*

Die wichtigsten Gleichungstypen sind: die **Laplacesche Gleichung**

$$\Delta u = 0 , \tag{1.1.1}$$

die **Wärmeleitungsgleichung**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = 0 \quad (k > 0) \tag{1.1.2}$$

und die **Wellengleichung**

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad (c > 0) . \tag{1.1.3}$$

Es sind dies partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Dazu sind sie linear und homogen. Die entsprechenden inhomogenen Gleichungen sind auch von Interesse:

$$-\Delta u = f(x) , \tag{1.1.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = f(x, t) , \tag{1.1.5}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x, t) . \tag{1.1.6}$$

Dabei ist die inhomogene Laplacesche Gleichung (1.1.4) auch unter dem Namen **Poissonsche Gleichung** bekannt.

*Der Fall  $n = 1$  bei (1.1.4) ist technisch trivial (obwohl nicht ohne Bedeutung!), da er sich auf ein exakt lösbares Problem  $-u'' = f(x)$  reduziert (siehe die nächste Aufgabe). Diesen Fall klammern wir in unseren allgemeinen Betrachtungen aus.*

**\*\* 1.1.1 Aufgabe.** *Man finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung*

$$-u'' = f(x) .$$

Jede dieser obigen Gleichungen kann verschiedene physikalische Prozesse beschreiben. Z.B. gilt (1.1.4) für das elektrostatische Potential und für das stationäre Strömen gewisser Flüssigkeiten, ebenso gilt (1.1.5) für die Wärmeleitung, für Diffusionsprozesse usw.. Sind darüber hinaus in (1.1.5), (1.1.6)  $u, f$  von  $t$  unabhängig, so entsteht eine Gleichung vom Typ (1.1.4).

Es wird sich später zeigen, daß die Gleichungen (1.1.1) – (1.1.3) bzw. ihre inhomogenen Analoga (1.1.4) – (1.1.6) „Prototypen“ für allgemeine lineare Gleichungen zweiter Ordnung sind, d.h. kennt man ihre Eigenschaften, so kann man in gewissem Sinne auf das Verhalten allgemeinerer Fälle schließen.

Wir wollen nun, zumindest an zwei Beispielen, den Zusammenhang unserer Gleichungen mit physikalischen Prozessen untersuchen. Genauer gesagt, wir wollen einige dieser Gleichungen aus gewissen physikalischen Prinzipien *herleiten*. Für einen Mathematiker hat eine solche Herleitung es immer in sich. Die Verständnisschwierigkeiten liegen dabei nicht so sehr an den etwa mangelnden physikalischen Vorkenntnissen – in unseren Beispielen reduzieren die sich wirklich auf das Elementarste –, sondern vielmehr an der ganzen Denkweise, die sich durch ihre induktiven und heuristischen Elemente auszeichnet. Aber auch als solche kann diese Denkweise auch für einen Mathematiker von großem Nutzen sein.

**1.1.2 Beispiel.** (Wärmeleitung) Die Wärmeleitung in einem leitenden Medium wird durch dessen Temperatur  $u = u(x, t)$  beschrieben, wobei  $x \in \mathbb{R}^3$  die Lage im Medium und  $t$  die betrachtete Zeit angibt. Maßgebend für die Herleitung einer Differentialgleichung für  $u$  sind zwei Elemente:

- (i) das Wärmehaltungsgesetz (ein Spezialfall des allgemeinen Energieerhaltungsgesetzes),
- (ii) das sog. Verhaltensgesetz, welches besagt, in welchem Zusammenhang Wärme (= Wärmeenergie) und Temperatur zueinander stehen.

Der Wärmehalt eines Gebietes  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^3$  hängt bekanntlich von der Temperatur (höhere Temperatur, mehr Wärme), aber auch von einigen anderen materialbezogenen Daten des leitenden Mediums ab. Ist das Material homogen und die Temperatur über  $\Omega$  konstant, so ist die in  $\Omega$  enthaltene Wärme zur Zeit  $t$  gleich

$$W = W(\Omega, t) = C\rho|\Omega|u(t) \quad ; \quad (1.1.7)$$

hier ist  $\rho$  die Massendichte,  $C$  die sog. spezifische Wärme des Materials,  $u(t)$  die (absolute) Temperatur und  $|\Omega|$  das Lebesguesche Maß (hier Volumen) von  $\Omega$ .

*Die Größe  $C$  kann also als die Wärmehaufnahmefähigkeit des Materials in  $\Omega$  pro Einheit der Masse und der Temperatur aufgefaßt werden. Materialien, die in den sog. Kühlakkumulatoren verwendet werden, zeichnen sich durch ein sehr hohes  $C$  aus (warum?).*

Ist die Temperaturverteilung nicht konstant oder das Material nicht homogen, so nehmen wir statt (1.1.7)

$$W = W(\Omega, t) = \int_{\Omega} C(x)\rho(x)u(x, t) dx \quad , \quad (1.1.8)$$

wobei jetzt  $C$  und  $\rho$  positive Funktionen auf  $\Omega$  sind, die die entsprechenden Eigenschaften des Materials wiedergeben. Die Integralform (1.1.8) ist eine typische Verallgemeinerung von (1.1.7) auf den nichtkonstanten Fall. Sie kann wie folgt begründet werden: Die Wärme genügt (wie jede Art Energie) dem *Additionsgesetz*, d.h., teilt man  $\Omega$  auf in mehrere disjunkte Teile  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ , so gilt

$$W(\Omega, t) = \sum_{i=1}^n W(\Omega_i, t) \quad .$$

Sind die „Stücke“  $\Omega_i$  klein genug, so kann man dort die Funktionen  $C$ ,  $\rho$  durch Konstanten annähern:

$$W(\Omega_i, t) \approx \sum_i C(x_i)\rho(x_i)u(x_i, t)|\Omega_i| \quad , \quad x_i \in \Omega_i \quad ,$$

wobei erwartet wird, daß dies umso genauer ist, je kleiner die Teile  $\Omega_i$  sind. Im Limes erhält man das Integral in (1.1.8).

Nun wollen wir den Wärmefluß durch das Medium näher beschreiben. Sei  $\Phi_i$  ein Gebiet in einer auf der  $x_i$ -Achse senkrecht stehenden Ebene. Ist der Wärmefluß zeitlich und räumlich homogen, so fließt in einem Zeitintervall  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  durch  $\Phi_i$  die Wärme

$$\Delta t |\Phi_i| q_i \quad , \quad (1.1.9)$$

wobei der Größe  $q_i$  die Bedeutung einer „Wärmestromdichte“ in der  $x_i$ -Richtung zukommt. Beim inhomogenen Fluß ist (ähnlich wie oben) die im Zeitintervall  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  durch  $\Phi_i$  geflossene Wärme gleich

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt \int_{\Phi_i} q_i(x, t) dx^{(i)} \quad . \quad (1.1.10)$$

Dabei ist  $dx^{(i)}$  das Lebesguesche Maß in der  $i$ -ten Koordinatenebene. Z.B. ist in den Cartesischen Koordinaten

$$dx^{(1)} = dx_2 dx_3 \quad , \quad dx^{(2)} = dx_1 dx_3 \quad , \quad dx^{(3)} = dx_1 dx_2 \quad .$$

In (1.1.9) – (1.1.10) gilt die Vereinbarung, daß das positive Vorzeichen den Fluß von rechts nach links bedeutet und umgekehrt.

Nun nehmen wir ein rechteckiges Gebiet

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega; x_i^{(0)} < x_i < x_i^{(0)} + \Delta x_i\} ,$$

berandet durch

$$\Phi_i^- = \{x \in \Omega; x_i = x_i^{(0)}, x_j^{(0)} < x_j < x_j^{(0)} + \Delta x_j, j \neq i\} ,$$

$$\Phi_i^+ = \{x \in \Omega; x_i = x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_j^{(0)} < x_j < x_j^{(0)} + \Delta x_j, j \neq i\} ,$$

$$i = 1, 2, 3$$

(siehe Abb. 1.1.1).

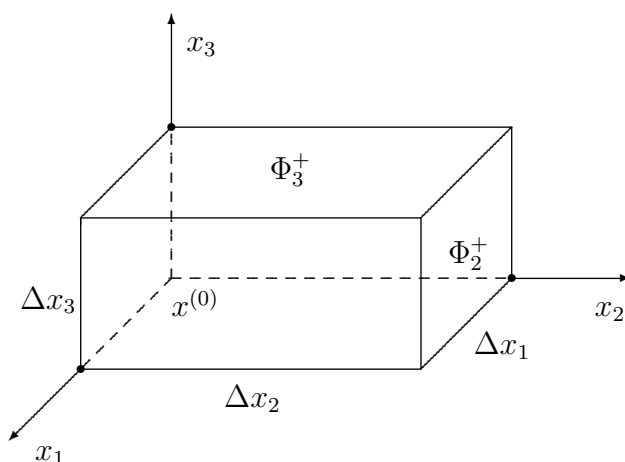


Abbildung 1.1.1

Auf dieses Gebiet wenden wir nun das aus der Physik bekannte Erhaltungsgesetz für die Wärmeenergie an. Es lautet:

*Abgesehen von etwaigen in  $\Omega_0$  vorhandenen Wärmeerzeugern oder -verbrauchern (Wärmestrahlung, chemische oder Kernreaktionen usw.) variiert die in  $\Omega_0$  gespeicherte Wärme lediglich durch das Ein- oder Ausfließen an den Rändern.*

Dies gibt



$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} C(x)\rho(x)u(x, t_0 + \Delta t) dx - \int_{\Omega_0} C(x)\rho(x)u(x, t_0) dx \\
&= \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt \left[ \int_{\Phi_i^+} q_i(x, t) dx^{(i)} - \int_{\Phi_i^-} q_i(x, t) dx^{(i)} \right] \\
&+ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt \int_{\Omega_0} F(x, t) dx .
\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Dazu einige Bemerkungen:

- (i) Das Minuszeichen auf der rechten Seite entstand gemäß unserer Vereinbarung über das Vorzeichen des Wärmeflusses.
- (ii) Der Term  $F(x, t)$  beschreibt die eventuellen zusätzlichen Wärmeerzeuger oder -verbraucher (hier bedeutet offensichtlich  $F(x, t) > 0$  die Wärmeerzeugung und  $F(x, t) < 0$  den Wärmeverbrauch).

Als weiteres ziehen wir das Verhaltensgesetz hinzu:

$$q_i(x, t) = \kappa(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} , \quad \kappa(x) > 0 \quad ,^1 \tag{1.1.12}$$

was nichts anderes besagt, als daß die Wärme stets in Richtung abfallender Temperatur fließt und das um so intensiver, je größer die Temperaturdifferenzen sind. Die Funktion  $\kappa(x)$  (die thermische Leitbarkeit genannt) ist in einem großen Temperaturbereich temperaturunabhängig und bei homogenem Material konstant. Wir berücksichtigen auch die folgenden Identitäten

$$\int_{\Phi_i^+} q_i(x) dx^{(i)} - \int_{\Phi_i^-} q_i(x) dx^{(i)} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial q_i}{\partial x_i}(x) dx , \tag{1.1.13}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0} C(x)\rho(x)[u(x, t_0 + \Delta t) - u(x, t_0)] dx \\
&= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt \int_{\Omega_0} C(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx .
\end{aligned} \tag{1.1.14}$$

Somit ergibt (1.1.11)

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt \int_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(0)}+\Delta x_1} dx_1 \int_{x_2^{(0)}}^{x_2^{(0)}+\Delta x_2} dx_2 \int_{x_3^{(0)}}^{x_3^{(0)}+\Delta x_3} dx_3 \mathcal{F}(x, t) = 0 \tag{1.1.15}$$

mit

---

<sup>1</sup> Auch „Fouriersches Gesetz“ genannt.

$$\mathcal{F}(x, t) = C(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \kappa(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) \right) - F(x, t) .$$

Bedenken wir nun, daß in (1.1.15) die Größen  $t_0$ ,  $x_i^{(0)}$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta x_i$  beliebig sind, so kann dies offensichtlich nur so gelten, indem  $\mathcal{F}$  identisch verschwindet. Dies ergibt unmittelbar

$$C\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \kappa \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = F \quad (1.1.16)$$

– die **Wärmeleitungsgleichung**.

Für den Fall eines homogenen Materials sind  $C$ ,  $\rho$ ,  $\kappa$  konstant, und mit  $k = \kappa/C\rho$  erhalten wir eine Gleichung vom Typ (1.1.5). In jedem Fall aber ist die Gleichung linear. Nichtlinear wird sie z.B. dann, wenn berücksichtigt wird, daß die spezifische Wärme  $C$ , die Dichte  $\rho$  oder die thermische Leitbarkeit  $\kappa$  selbst von der Temperatur  $u(x, t)$  abhängen.

*In diesem Zusammenhang ist es gut, auf die traditionsbedingt zweideutige Verwendung des Wortes „homogen“ hinzuweisen. Verwendet für die Gleichung (1.1.5) oder (1.1.16) bedeutet es einfach, daß die rechte Seite verschwindet, d.h. daß keine äußeren Wärmeerzeuger oder -verbraucher anwesend sind. Aber für das leitende Medium verwendet bedeutet es, daß die charakterisierenden Funktionen  $C$ ,  $\rho$ ,  $\kappa$  nicht von  $x \in \mathbb{R}^n$  abhängen (konstante Koeffizienten).*

**1.1.3 Aufgabe.** *Man zeige, daß die Form (1.1.16) der Wärmeleitungsgleichung von der Wahl des Cartesischen Koordinatensystems unabhängig ist.*

*(Hinweis: Das neue Koordinatensystem werde durch  $x = a + Rx'$  eingeführt, wobei  $a$  ein gegebener Vektor aus  $\mathbb{R}^3$  ist und  $R$  eine gegebene orthogonale  $3 \times 3$ -Matrix.)*

**Lösung.** Sei

$$x = a + Rx' \quad , \quad R = (r_{ij}) \quad , \quad a = (a_i) \quad (1.1.17)$$

die gegebene Transformation der Koordinaten. In den neuen Koordinaten werden die Massendichte, die spezifische Wärme, die thermische Leitbarkeit, die Temperatur und die äußere Quellenverteilung durch neue Funktionen  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{\kappa}$ ,  $\hat{u}$  und  $\hat{F}$  beschrieben, die sich aus den alten auf die folgende, natürliche Weise ergeben:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(x') &= \rho(x) \quad , \quad \hat{C}(x') = C(x) \quad , \quad \hat{\kappa}(x') = \kappa(x) \quad , \\ \hat{u}(x', t) &= u(x, t) \quad , \quad \hat{F}(x', t) = F(x, t) \quad . \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Die erwähnte Unabhängigkeit von der Wahl der Cartesischen Koordinaten bedeutet nun, daß  $\hat{u}$  der folgenden Gleichung genügen muß:

$$\hat{C}\hat{\rho} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \left( \hat{\kappa} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x'_i} \right) = \hat{F} \quad . \quad (1.1.19)$$

Diese Gleichung hätten wir offensichtlich erhalten, wenn wir die Herleitung im „gestrichenen“ Koordinatensystem vorgenommen hätten. Die positive Antwort auf unsere Fragestellung bedeutet also, daß unser Modell insofern widerspruchsfrei ist, als es *von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist* – eine wichtige Eigenschaft physikalischer Modelle.

Die Kettenregel für die partiellen Ableitungen liefert mit (1.1.17)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial \hat{u}(x', t)}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial \hat{u}(x', t)}{\partial x'_j} r_{ij}$$

(man bedenke, daß wegen der Orthogonalität von  $R$   $x' = R^T x - R^T a$  gilt!). Ähnlicherweise ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \kappa(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \right) = \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x'_k} \left( \hat{\kappa}(x') \frac{\partial \hat{u}(x', t)}{\partial x'_j} \right) r_{ij} r_{ik} .$$

Substituieren wir dies in (1.1.16), so erhalten wir unter Berücksichtigung der Identitäten (1.1.18)

$$\begin{aligned} \hat{C} \hat{\rho} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} &= \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x'_k} \left( \hat{\kappa}(x') \frac{\partial \hat{u}(x', t)}{\partial x'_j} \right) \sum_i r_{ij} r_{ik} \\ &= \hat{C} \hat{\rho} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x'_k} \left( \hat{\kappa} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x'_k} \right) = \hat{F} . \end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, daß wegen der Orthogonalität der Matrix  $R$  gilt

$$\sum_i r_{ij} r_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & , j \neq k \\ 1 & , j = k \end{cases} .$$

Sind die Funktionen  $\rho$ ,  $C$ ,  $\kappa$  konstant, so lautet (1.1.5) in neuen Koordinaten

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - k \Delta_{x'} \hat{u} = \hat{f} , \quad f = \frac{\hat{F}}{C\rho} , \quad k = \frac{\kappa}{C\rho} .$$

Insbesondere ist stets

$$\Delta_x u = \Delta_{x'} \hat{u} , \tag{1.1.20}$$

d.h. *der Laplacesche Operator ist invariant unter einem Wechsel der Cartesischen Koordinaten.*

**1.1.4 Beispiel.** (Schwingungen einer Membran) Wir betrachten kleine Schwingungen einer Membran, welche im undeformierten Zustand in der  $x_1, x_2$ -Ebene liegt. Die Durchbiegung (oder Auslenkung) der Membran bei der Deformation geschieht in  $x_3$ -Richtung und ist durch die Funktion

$$u = u(x, t) = u(x_1, x_2, t)$$

gegeben. Die Form der Membran ist also durch den Graphen der Funktion  $u$  beschrieben (siehe Abb. 1.1.2).

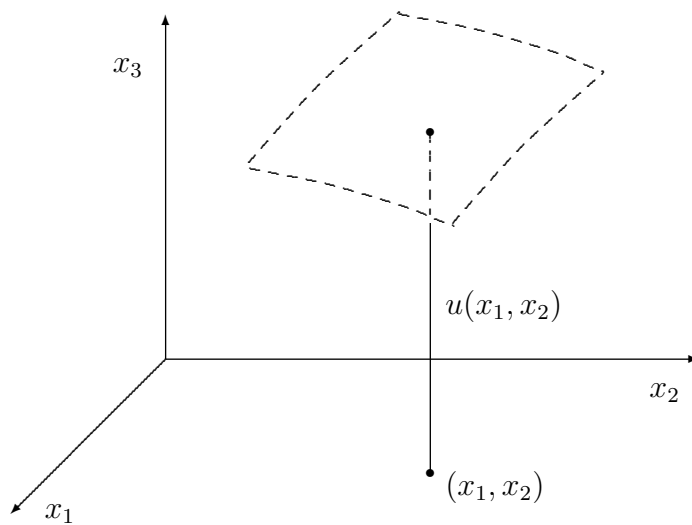


Abbildung 1.1.2

Die Verschiebung in  $x_1, x_2$ -Richtung wird hier vernachlässigt. Die Differentialgleichung für  $u$  erhalten wir diesmal aus einem anderen Erhaltungsgesetz, nämlich dem *Impulserhaltungsgesetz* (auch das *zweite Newtonsche Gesetz* genannt):

*Die Veränderung des Impulses eines jeden Teils der Membran ist gleich der Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte.*

Wir betrachten hier ein kleines Stück Membran, das durch  $u$  auf dem Gebiet

$$x_i < \xi_i < x_i + dx_i$$

bestimmt ist (Abb. 1.1.3). „Klein“ bedeutet hier zunächst, daß die Massendichte  $\rho = \rho(\xi_1, \xi_2)$  auf dem Stück annähernd als konstant und gleich  $\rho(x)$  angenommen werden kann – auch in den deformierten Lagen der Membran.

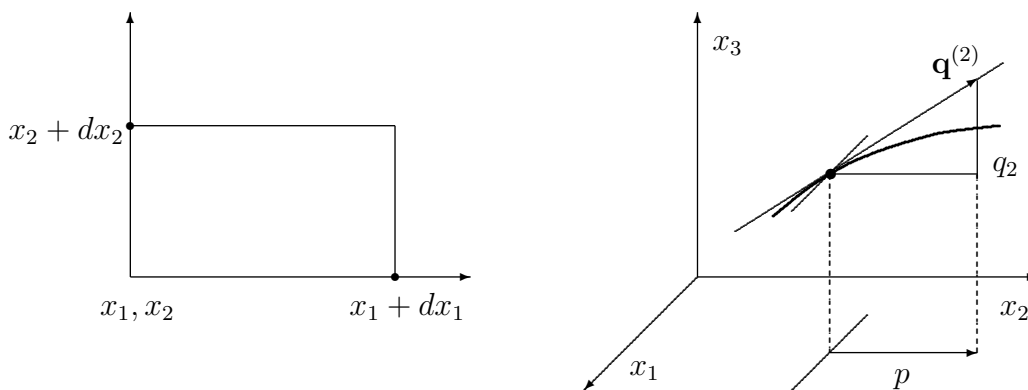


Abbildung 1.1.3

Abbildung 1.1.4

Der *Impuls* (= Masse  $\times$  Geschwindigkeit) ist dann gleich

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx_1 dx_2 \quad . \quad (1.1.21)$$

Nun zu den einwirkenden Kräften! Einfacher zu erfassen sind evtl. äußere Kräfte (z.B. die Schwere durch das eigene Gewicht oder sonstige Lasten). Wir betrachten solche Kräfte, die in  $x_3$ -Richtung einwirken und durch eine *Kräftedichte*  $F = F(x_1, x_2)$  gegeben sind als

$$F dx_1 dx_2 \quad . \quad (1.1.22)$$

So ist z.B. die Kräftedichte der Schwere

$$F = -\rho g$$

( $g$  die Erdbeschleunigung  $9.81 \text{ m/sec}^2$ ).

Delikater ist die Beschreibung innerer Spannkraften. Unsere Membran betrachten wir auch im undeformierten Zustand als gespannt. Auf einen Teil der Membran wirkt die Spannkraft durch seine Ränder, hier sind es Kurven (die *Kontaktlinien* genannt), ein.

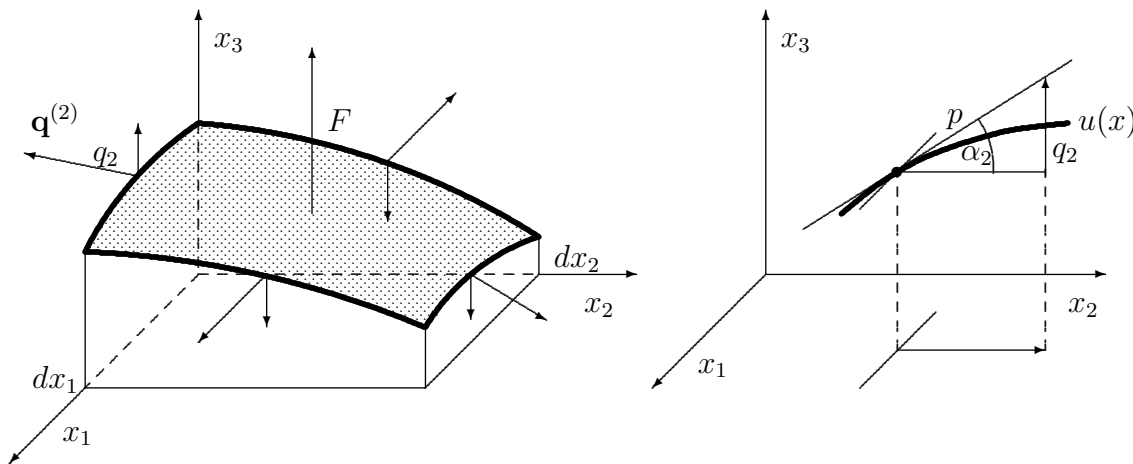


Abbildung 1.1.5

Abbildung 1.1.6

Die Spannkraft wird ebenfalls durch eine Art Dichte beschrieben; diesmal ist es eine Liniendichte (d.h. Kraft pro *Längeneinheit*), da die Spannkraft über die Kontaktlinien übertragen werden. Die Kraft auf ein kleines, zur  $x_i$ -Achse orthogonales Stück der Kontaktlinie (Abb. 1.1.4, 1.1.5) berechnen wir mit

$$\mathbf{q}^{(i)} dx^{(i)} \quad , \quad dx^{(1)} = dx_2 \quad , \quad dx^{(2)} = dx_1 \quad ,$$

wobei  $\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{q}^{(i)}(x_1, x_2, t)$  stets tangential zur Membran liegt <sup>1)</sup>. Ganz genau bezeichnet  $\mathbf{q}^{(i)} dx^{(i)}$  die Kraft, mit welcher die positive Seite des Bogens auf die negative einwirkt.

Wir nehmen zusätzlich an, daß unsere Membran homogen und isotrop gespannt ist. Das heißt, daß in der undeformierten Lage der Vektor  $\mathbf{q}^{(i)}$  die Richtung der  $x_i$ -Achse hat und daß gilt

$$|\mathbf{q}^{(1)}| = |\mathbf{q}^{(2)}| \quad . \quad (1.1.23)$$

Durch die kleine Deformation ändert sich die Spannungskraft nur wenig: Sie bleibt orthogonal zum Randbogen gerichtet (und liegt natürlich tangential zur Membranfläche). Auch die Gültigkeit von (1.1.23) nehmen wir hier als unverändert an. Bezeichnen wir mit  $q_i$  die  $x_3$ -Komponente von  $\mathbf{q}^{(i)}$  (Abb. 1.1.4), so ist die gesamte  $x_3$ -Komponente der Spannungskraft auf das deformierte rechteckige Stück Membran gleich

$$[q_1(x_1 + dx_1, x_2, t) - q_1(x_1, x_2, t)] dx_2 + [q_2(x_1, x_2 + dx_2, t) - q_2(x_1, x_2, t)] dx_1 \quad .$$

Dieser Ausdruck läßt sich mit Hilfe der Taylor-Formel so annähern (je kleiner  $dx_1, dx_2$ , desto besser):

$$\left( \frac{\partial q_1(x, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2(x, t)}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad . \quad (1.1.24)$$

Das schon zitierte Erhaltungsgesetz des Impulses ergibt schließlich zusammen mit den Formeln (1.1.21), (1.1.22) und (1.1.24)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial t} dx_1 dx_2 \right) = \left( \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 + F dx_1 dx_2$$

oder

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + F \quad .$$

Die Deformation ist klein, also muß der Winkel  $\alpha_i$  (Abb. 1.1.6) auch klein sein, daher ist annähernd  $\sin \alpha_i \approx \partial u / \partial x_i$ . Dadurch ist

$$q_i = p \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad , \quad i = 1, 2 \quad ,$$

wobei die Konstante  $p > 0$  als die innere Spannung der Membran gedeutet wird. Nun ergibt sich (1.1.6) mit

$$n = 2 \quad , \quad c = \sqrt{p/\rho} \quad , \quad f = F/p \quad .$$

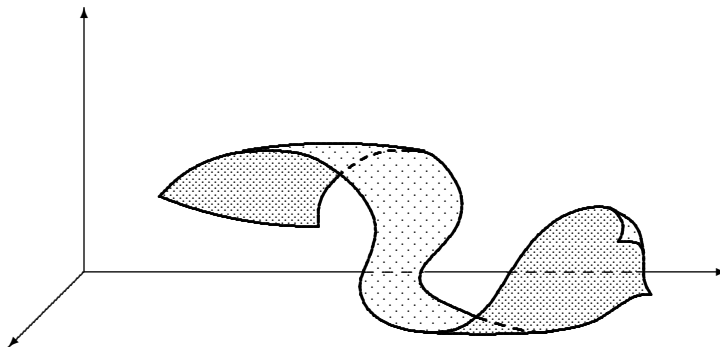
---

<sup>1</sup> Hier kommt klar zum Ausdruck, daß es sich um eine *Membran* handelt und nicht um eine dünne *Platte*. Die Spannungskräfte der Membran werden lediglich durch die *Dehnung* hervorgerufen, auf eine *Biegung* antwortet sie nicht.

Wie schon vorher gesagt, wird eine Person, welche ausschließlich an die heutige mathematische Denkweise gewöhnt ist, die Herleitungen, wie sie in den Beispielen 1.1.2 und 1.1.4 stehen, nur schwer akzeptieren können. Es kommen zunächst die „technischen“ Fragen wie: Wann darf in (1.1.13) oder (1.1.14) unter dem Integralzeichen abgeleitet werden? Oder: Unter welchen genauen Bedingungen an  $\mathcal{F}$  kann von (1.1.15) auf (1.1.16) geschlossen werden? Solche Fragen klären sich, indem den Funktionen  $\rho$ ,  $C$ ,  $\kappa$ ,  $u$  zusätzliche Glattheitseigenschaften abverlangt werden. Am zweckmäßigsten ist es, dies zu tun, indem die Gleichung (1.1.16) unter gegebenen Funktionen  $\rho$ ,  $C$ ,  $\kappa$  nach  $u$  gelöst und dann der Herleitungsweg noch einmal gemacht wird.

Viel schlimmer dagegen steht es mit den Vorgängen in Beispiel 1.1.4. Hier kommt eine neue Schwierigkeit hinzu, die darin besteht, daß gewisse Größen wie z.B. das betrachtete Stück Membran oder die Auslenkung  $u(x, t)$  der Membran als „sehr“ (= infinitesimal) klein angenommen und in diesem Zusammenhang etliche Näherungen im Sinne der Taylor-Formel gemacht werden.

Dies wirkt um so schmerzhafter, da hier offenbar mit rein mathematischen Objekten manipuliert wird. In der Tat enthält die Herleitung in Beispiel 1.1.4 neben der üblichen Umsetzung physikalischer Prinzipien in die Sprache der Mathematik auch eine gleichzeitige „Linearisierung“. Das heißt, daß die Problemstellung des Beispiels 1.1.4 einen wesentlich höheren „Nichtlinearitätsgrad“ aufweist als die von Beispiel 1.1.2. Dort können, wie wir schon sagten, Nichtlinearitäten durch evtl. Abhängigkeit von  $\kappa$  oder  $C$  von  $u$  auftreten, das Medium selbst wird im Prozeß nicht deformiert. In Beispiel 1.1.4 dagegen geschieht der ganze Prozeß auf einer nicht-ebenen Mannigfaltigkeit (der Fläche der Membran). Unsere Herleitung enthält also heuristisch eine Näherungsprozedur, wobei insbesondere durch die Kleinheit der Größen  $u$ ,  $\partial u/\partial x_1$ ,  $\partial u/\partial x_2$  die (ebenen) Cartesischen Koordinaten für die Beschreibung der Schwingung ausgereicht haben. (Für eine Deformation wie etwa



wären sie wohl nutzlos.) In der Tat ist hier eine strengere Herleitung möglich <sup>2)</sup>, wobei sich ein sehr kompliziertes nicht-lineares partielles Differentialgleichungssystem ergibt. Seine Linearisierung <sup>3)</sup> führt dann wieder zu (1.1.6).

Für uns ist es wichtig festzuhalten, daß auch solch grobe Überlegungen wie hier in Beispiel 1.1.4 zum richtigen Ergebnis führen. Hier einige Übungen in diesem Stoff:

**\* 1.1.5 Aufgabe.** *Man leite die Gleichungen für die folgenden Prozesse her:*

- a) *Wärmeleitung in einer dünnen ebenen Platte .*
- b) *Kleine Schwingungen einer dünnen Saite .*
- c) *Longitudinale Schwingungen eines elastischen homogenen Stabes.*

**Hinweise.** Zu a), b): Man lehne sich an die Beispiele 1.1.2 bzw. 1.1.4 an, wobei die Anzahl der räumlichen Dimensionen entsprechend verringert wird.

Zu c): Der Stab sei zylinderförmig (Abb. 1.1.7)

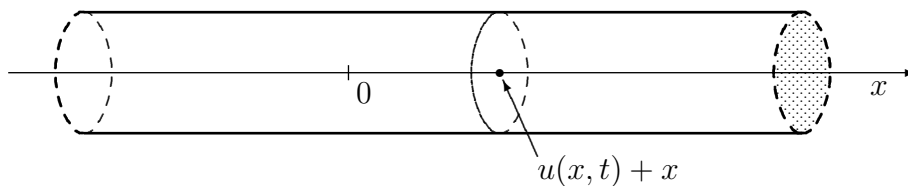


Abbildung 1.1.7

längs der  $x$ -Achse gelegt. „Longitudinal“ heißt, daß die Deformationen so erfolgen, daß sich der ganze ebene Querschnitt in der  $x$ -Richtung verschiebt, ohne seine Form zu verlieren. Mit  $u(x, t)$  bezeichne man die Verschiebung des Querschnitts, der sich beim nicht-deformierten Zustand an der Stelle  $x$  befand. Die Spannungskraft im Stab sei durch das Hooksche Gesetz gegeben:

$$E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad E > 0 \text{ (Elastizitätsmodul)}, \quad (1.1.25)$$

d.h. die Kraft ist der Dehnung proportional.

<sup>2</sup> Eine strengere Herleitung würde allerdings auch mehr Vorkenntnisse in der Geometrie, insbesondere der Differentialgeometrie verlangen.

<sup>3</sup> Hier bedeutet „Linearisierung“ einen gut definierten mathematischen Vorgang; vgl. z.B. §1.4 im Kurs MATHEMATISCHE METHODEN DER PHYSIK UND TECHNIK I.



## 1.2 Einige weitere Gleichungen der Mathematischen Physik

Wir geben hier ohne Herleitung einige weitere Gleichungen der Mathematischen Physik an. Einfachheitshalber benutzen wir den Gradientenoperator

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T, \quad (1.2.1)$$

so daß mit den formellen Bezeichnungen der Vektorrechnung für ein Funktionentripel  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$  gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1.2.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^T = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (1.2.3)$$

Wir setzen weiterhin

$$\Delta \mathbf{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)^T, \quad (1.2.4)$$

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u). \quad (1.2.5)$$

Sei durch eine vektorwertige Funktion  $\mathbf{x}, t \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  ein Strömungsbild im Raum beschrieben, d.h.  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  sei die Geschwindigkeit eines Fluides (Flüssigkeit oder Gas) an der Stelle  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$ . Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.2.6)$$

Dagegen besagt die Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad (1.2.7)$$

daß die Strömung keine Wirbel aufweist. Das letztere ist ein System von drei partiellen Differentialgleichungen mit drei unbekannt Funktionen  $v_1, v_2, v_3$ . Es ist eine einfache Tatsache aus der Analysis<sup>4</sup>, daß bei (1.2.7) eine Funktion  $\Phi$  (das *Potential* genannt) existiert, so daß gilt

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi. \quad (1.2.8)$$

Gelten also gleichzeitig (1.2.6) und (1.2.7), so ist

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi = 0 \quad (1.2.9)$$

– die Laplacesche Gleichung. Dies ist ein Beispiel, wie die Einführung eines Potentials die Anzahl von Unbekannten reduzieren kann.

Die sog. **Eulersche Gleichung** für *ideale Fluide* („ideal“ heißt, daß innere Reibungskräfte vernachlässigt werden) lautet

---

<sup>4</sup> Siehe z.B. W.I. Smirnow, Lehrgang der Höheren Mathematik II, Berlin 1981, S.380 oder H.Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 2, Stuttgart 1981, S.516.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \text{grad } \rho + \mathbf{f} . \quad (1.2.10)$$

Hier ist  $\mathbf{v}$  die Geschwindigkeit,  $\rho$  die Dichte,  $p$  der Druck und  $\mathbf{f}$  die vorgegebene Außenkraftdichte, jeweils abhängig von  $\mathbf{x}$ ,  $t$ . Die Abhängigkeit  $p = p(\rho)$  ist vorgegeben.

Die **Kontinuitätsgleichung** lautet für dasselbe Fluid

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 . \quad (1.2.11)$$

Mit Hilfe der Kettenregel ist offenbar

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \text{grad } \rho = \frac{1}{\rho} \text{grad } p ,$$

so daß sich im Fall eines *homogenen inkompressiblen* Fluides ( $\rho = \text{const.}$ ) ergibt

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{f} , \quad (1.2.12)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 . \quad (1.2.13)$$

Sind im Fluid auch innere Reibungskräfte zu berücksichtigen, so gilt statt (1.2.12)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} , \quad (1.2.14)$$

wobei  $\nu > 0$  die Zähigkeit (Viskosität) des Fluides darstellt. Das Paar (1.2.14), (1.2.13) heißt **Navier-Stokessche Gleichungen**. Bei (1.2.10), (1.2.12) und (1.2.14) treten Nichtlinearitäten durch den Term

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = v_1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3}$$

auf. Diese Nichtlinearitäten sind schwerwiegender Natur, so daß einige grundlegende Probleme für Navier-Stokessche Gleichungen noch immer auf ihre Lösung warten. Aus der Theorie der Fluide erwähnen wir noch die **Gleichung von Korteweg-de Vries**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 , \quad (1.2.15)$$

welche im Zusammenhang mit Wellen an der Wasseroberfläche vorkommt.

Ein linear-elastischer Körper wird durch die **Lamésche Gleichung** beschrieben:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad } \text{div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} . \quad (1.2.16)$$

Hierbei sind  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  die Auslenkung zur Zeit  $t$  des Punktes, der ursprünglich in  $\mathbf{x}$  war,  $\rho$  die Massendichte,  $\mathbf{f}$  die äußere Kraftdichte und  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$  Konstanten, die die elastischen Eigenschaften der Materie wiedergeben.

Kleine Deformationen einer ursprünglich ebenen dünnen elastischen Platte werden durch die **biharmonische Gleichung**

$$\Delta^2 u = 0 \quad (1.2.17)$$

beschrieben.

Das elektromagnetische Feld im Vakuum wird durch zwei vektorwertige Funktionen beschrieben:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) && \text{(elektrisches Feld) ,} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) && \text{(magnetisches Feld) .} \end{aligned}$$

Im Vakuum genügen diese Felder den folgenden **Maxwellschen Gleichungen**:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 && , \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 && , \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} && , \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && , \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

wobei  $c > 0$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet.

**\* 1.2.1 Aufgabe.** *Man zeige, daß jedes zweimal stetig differenzierbare  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  aus (1.2.18) in jeder Komponente der Wellengleichung (1.1.3) genügt.*

In den Gleichungen, die wir bisher zitiert haben, waren alle Lösungen stets *reellwertig*. In der Quantenmechanik kommt die **Schrödingergleichung**

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\mathbf{x}) \psi \quad (1.2.19)$$

vor, hier ist  $\hbar > 0$  die Plancksche Konstante,  $m > 0$  die Masse des Teilchens und  $V = V(\mathbf{x})$  das Potential der einwirkenden Kräfte. Die gesuchte Funktion  $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$  ist komplex und genügt stets der Bedingung

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 dx = 1 && , \quad (1.2.20)$$

was damit zu tun hat, daß

$$\int_{\Omega} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 dx$$

als *Wahrscheinlichkeit* interpretiert wird, mit welcher das durch  $\psi$  beschriebene Teilchen innerhalb von  $\Omega$  zu finden ist.

**\* 1.2.2 Aufgabe.** *Man versuche zu zeigen, daß die Bedingung (1.2.20), wenn sie z.B. zum Zeitpunkt  $t = 0$  erfüllt ist, bei einer Lösung von (1.2.19) stets automatisch erfüllt bleibt.*

Das relativistische Analogon zur Schrödingergleichung, die **Klein-Gordon-Gleichung**, lautet

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - V)^2 \psi = (-\hbar^2 c^2 \Delta + m^2 c^4) \psi . \quad (1.2.21)$$

Hiermit schließen wir unsere kurze Übersicht einiger wichtigerer Gleichungen der Mathematischen Physik. Wir glauben, den Leser von der zentralen Rolle der in (1.1.1) – (1.1.6) auftretenden Gleichungen überzeugt zu haben.

### 1.3 Rand- und Anfangsbedingungen

Daß auch bei partiellen Differentialgleichungen die **Anfangsbedingungen** eine wichtige, zur Eindeutigkeit der Lösung führende Rolle spielen können, haben wir schon im Abschnitt 1.0 erfahren. Aber auch **Randbedingungen** können eine ebenso wichtige Rolle spielen. Betrachten wir zum Beispiel die Laplacesche Gleichung (1.1.1) oder (1.1.4) in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , in ihrer Bedeutung für die stationäre Wärmeleitung. In einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  hat diese Gleichung unendlich viele Lösungen, aus denen diejenige zu bestimmen ist, welche zusätzlich eine gegebene Randbedingung erfüllt. Ist z.B. die Temperatur am Rande  $\partial\Omega = \Gamma$ <sup>5)</sup> von  $\Omega$  vorgegeben, so ist  $u$  zu suchen, welches

$$u(x) = g(x) \quad \text{für } x \in \Gamma \quad (1.3.1)$$

erfüllt, wobei  $g$  die gegebene Temperaturverteilung auf  $\Gamma$  ist. Diese Randbedingung heißt **Dirichletsche Randbedingung**. Die Aufgabe, die Lösung von (1.1.1) oder (1.1.4) zu bestimmen, welche die Randbedingung (1.3.1) erfüllt, heißt das **Dirichletsche Randwertproblem**. Eine weitere interessante Randbedingung ist die Vorgabe

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = h(x) \quad , \quad x \in \Gamma \quad , \quad (1.3.2)$$

wobei  $\partial u / \partial \nu$  die *Richtungsableitung orthogonal zu  $\Gamma$*  bedeutet. Wie wir später sehen werden, beschreibt (1.3.2) einen gegebenen Wärmetransport (Zufuhr oder Abfuhr) durch den Rand. Dies ist die Neumannsche Randbedingung. Das entsprechende Problem heißt das **Neumannsche Randwertproblem**.

Die Randbedingung (und das entsprechende Problem) kann auch *gemischt* sein.

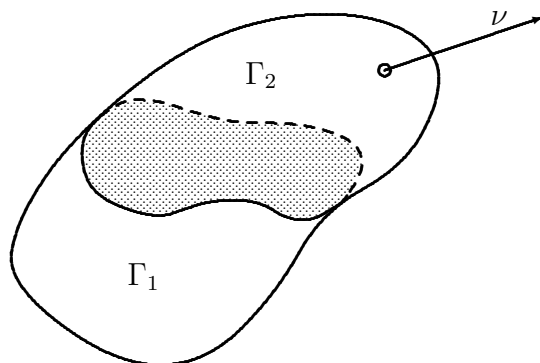


Abbildung 1.3.1

Eine solche Randbedingung lautet (siehe Abb. 1.3.1)

<sup>5)</sup> Im allgemeinen bezeichnen wir den Rand eines Gebietes  $\Omega$  mit  $\partial\Omega$ .

$$u(x) = g(x) \quad , \quad x \in \Gamma_1 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = h(x) \quad , \quad x \in \Gamma_2 \quad . \quad (1.3.3)$$

Hier wird schweigend unterstellt, daß  $\Omega$  einen „vernünftigen“ Rand besitzt, und zwar in  $\mathbb{R}^3$  eine Fläche und in  $\mathbb{R}^2$  eine Kurve.<sup>6)</sup>

Sind die Prozesse nicht-stationär, d.h. zeitabhängig (Wellengleichung, Wärmeleitungsgleichung), so können  $g$ ,  $h$  auch von der Zeit abhängen. Es kommen dann auch die **Anfangsbedingungen** hinzu, die den Zustand des Kontinuums in einem Zeitpunkt (etwa zu Beginn des Prozesses) beschreiben. Es ist dann natürlich die Lösung in einem  $n + 1$ -dimensionalen Gebiet

$$\Omega \times (0, \infty) = \{(x, t)^T ; x \in \Omega, t > 0\} \quad (1.3.4)$$

oder auch

$$\Omega \times \mathbb{R} = \{(x, t)^T ; x \in \Omega, t \in \mathbb{R}\} \quad (1.3.5)$$

zu suchen. Bei der Wärmeleitungsgleichung lautet die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad , \quad x \in \Omega \quad , \quad (1.3.6)$$

während für die Wellengleichung zusätzlich

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad , \quad x \in \Omega \quad (1.3.7)$$

vorgegeben wird. Dieser Unterschied erklärt sich plausibel aus der Tatsache, daß in (1.1.5) lediglich die erste, in (1.1.6) aber die zweite Zeitableitung vorkommt. So entsteht ein **Rand-Anfangswertproblem**. Ist  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , fallen die Randbedingungen weg und wir sprechen von einem **Anfangswertproblem**.

Aus der experimentellen Erfahrung erwarten wir, daß die oben zitierten Rand- bzw. Anfangsbedingungen jeweils den physikalischen Prozess determinieren. Genauer gesagt wird bei stationären Fällen das Randwertproblem, bei nicht-stationären Fällen das Rand-Anfangswertproblem eindeutig lösbar sein. Die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösungen dieser Probleme (unter geeigneten Bedingungen an die Koeffizienten der Gleichung) zu beweisen, die Lösungen zu konstruieren und ihre Eigenschaften zu untersuchen – das sind die zentralen Aufgaben der Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Die Randbedingung (1.3.1) ((1.3.2)) bzw. die Anfangsbedingungen (1.3.6) ((1.3.7)) sind **homogen** für  $g = 0$  ( $h = 0$ ) bzw.  $u_0 = 0$  ( $u_1 = 0$ ), sonst sind sie **inhomogen**. Diese Bedingungen sind *linear* wie die Gleichungen selbst; wir sagen, daß die soeben formulierten Rand- bzw. Rand-Anfangswertprobleme **linear** sind. Die Konsequenz der Linearität ist wiederum das **Superpositionsprinzip**: Sind  $u_1, \dots, u_s$  etwa Lösungen der jeweiligen Rand-Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} - k\Delta u_i &= f_i && \text{in } \Omega \times (0, \infty) \quad , \\ u_i &= g_i && \text{in } \Gamma \times (0, \infty) \quad , \\ u_i(x, 0) &= u_{i0}(x) \quad , && x \in \Omega \quad , \end{aligned}$$

<sup>6)</sup> Die *positive* Richtung der Normalen  $\nu$  zeigt von  $\Omega$  nach außen.

so ist die „Superposition“, d.h. die lineare Kombination

$$u = \sum_{i=1}^s \alpha_i u_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},$$

Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= \sum_{i=1}^s \alpha_i f_i && \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u &= \sum_{i=1}^s \alpha_i g_i && \text{in } \Gamma \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= \sum_{i=1}^s \alpha_i u_{i0}(x), && x \in \Omega. \end{aligned}$$

**1.3.1 Aufgabe.** Man finde die stationäre Temperaturverteilung in einer zur  $x_2, x_3$ -Ebene parallelen homogenen Wand der Dicke  $d$ , wenn  $u_1$  bzw.  $u_2$  die konstanten Temperaturen auf den beiden Seiten der Wand sind (Abb. 1.3.2, 1.3.3). Man nehme an, daß in der Wand die Temperatur nur von  $x_1$  abhängt.

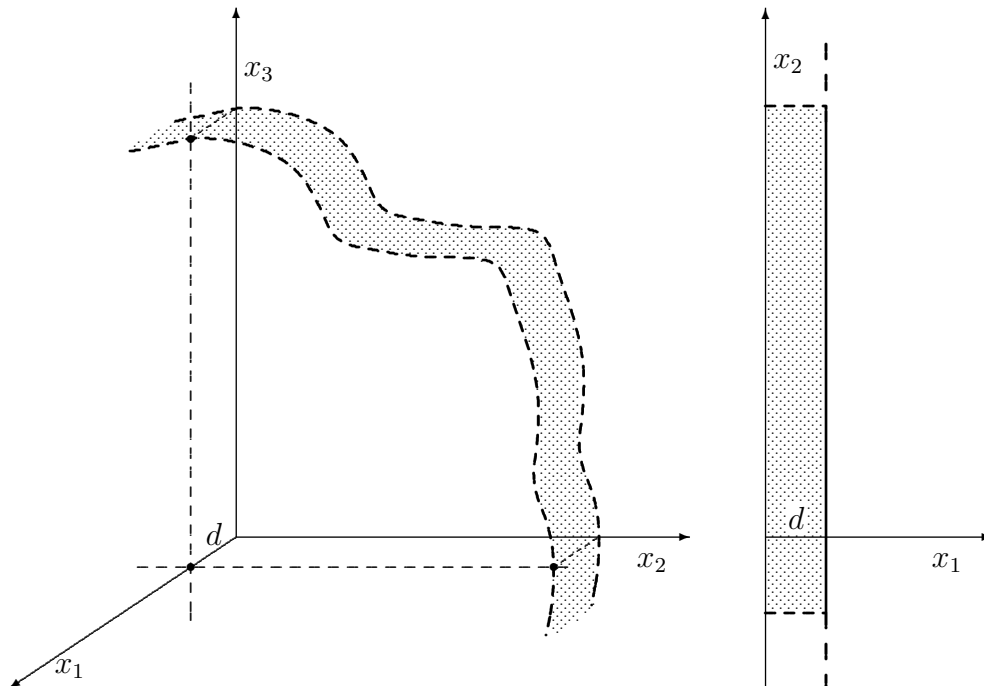


Abbildung 1.3.2  
Abbildung 1.3.3

**Lösung.** Da in (1.1.1) die  $x_2, x_3$ -Abhängigkeit wegfällt, bleibt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0 \quad , \quad \text{d.h.} \quad u = C_1 + C_2 x_1$$

übrig, wobei  $C_1, C_2$  zu bestimmen sind durch die Randbedingungen, die ebenfalls von  $x_2, x_3$  unabhängig sind:

$$u(0) = u_1 \quad , \quad u(d) = u_2 \quad .$$

Es ergibt sich

$$u(x_1) = u_1 + \frac{(u_2 - u_1)}{d} x_1 \quad .$$

Diese Aufgabe zeigt, daß bei gewissen Symmetrien der Ränder und Randbedingungen die Anzahl von unabhängigen Variablen verringert werden kann bis zu  $n = 1$ , wobei dann gewöhnliche Differentialgleichungen entstehen. Daß die hier gewonnene, von  $x_2, x_3$  unabhängige Lösung tatsächlich die *einzig*e ist, muß erst bewiesen werden. Dies tun wir später.

**1.3.2 Aufgabe.** *Wie sieht die Differentialgleichung für die stationäre Wärmeleitung aus, wenn die Temperaturverteilung symmetrisch um die  $x_3$ -Achse ist ?*

(Hinweis: Man führe die Zylinderkoordinaten  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ ,  $x_3 = x_3$  ein und benutze die dadurch entstandene Koordinatentransformation.)

**Lösung.** Es ist (siehe Abb. 1.3.4)

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \tan \varphi = x_2/x_1 \quad .$$

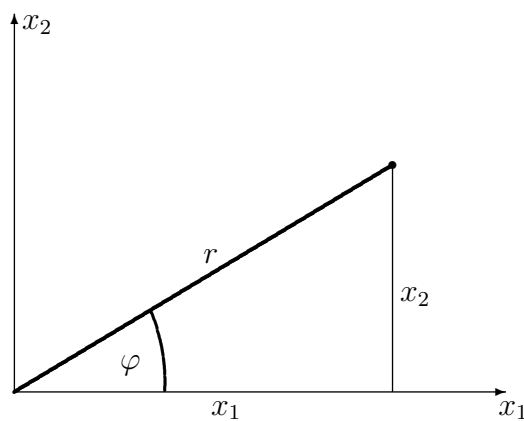


Abbildung 1.3.4

Setzen wir hier

$$\hat{u}(r, \varphi, x_3) = u(x_1, x_2, x_3) \quad , \quad (1.3.8)$$



so ist nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} , \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} , \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\sin 2\varphi}{r} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} , \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} \cos^2 \varphi + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} - \frac{\sin 2\varphi}{r} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi} .\end{aligned}$$

Formal können wir dies so festhalten:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} . \quad (1.3.9)$$

War  $u$  etwa auf  $\Omega = \{x; x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, a \leq x_3 \leq b\}$  definiert, so wird  $\hat{u}$  auf

$$\hat{\Omega} = \{(r, \varphi, x_3); 0 < r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, a \leq x_3 \leq b\}$$

definiert sein. War  $u$  auf  $\Omega$  zweimal stetig differenzierbar, so gilt offenbar dasselbe für  $\hat{u}$  auf  $\hat{\Omega}$ , dabei ist offenbar auch

$$u(r, 0, x_3) = u(r, 2\pi, x_3), \quad 0 < r \leq R, \quad a \leq x_3 \leq b . \quad (1.3.10)$$

Dieselbe Gleichung gilt auch für alle ersten und zweiten Ableitungen von  $\hat{u}$ . Wie wir später sehen werden, liefert ein auf  $\hat{\Omega}$  zweimal stetig differenzierbares  $\hat{u}$  über (1.3.8) ein auf  $\Omega \setminus (\{0\} \times [a, b])$  zweimal stetig differenzierbares  $u$ , falls  $\hat{u}$  und seine ersten und zweiten Ableitungen (1.3.10) genügen. Noch delikater wird es, wenn wir  $u$  auf ganz  $\Omega$  betrachten wollen. Solche Schwierigkeiten sind durch die Singularität der Zylinderkoordinaten bedingt. Man nimmt sie jedoch in Kauf, da sie eine ganz wesentliche Reduktion der Anzahl der Variablen liefern können. Darüber später etwas mehr.

**1.3.3 Aufgabe.** *Man löse das stationäre Wärmeleitungsproblem in der Ebene:*

$$-k\Delta u = f, \quad f = \text{const.} \quad (1.3.11)$$

auf

$$\Omega = \{(x, y)^T; R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2\}, \quad 0 < R_1 < R_2$$

mit

$$\Gamma_{1,2} = \{(x, y)^T; x^2 + y^2 = R_{1,2}\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_1, \quad (1.3.12)$$

$$u = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_2 . \quad (1.3.13)$$

**Lösung.** Hier sind das Gebiet und die Randbedingungen rotationssymmetrisch um den Ursprung, so daß wir die ebenen Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

– eine Einschränkung der Zylinderkoordinaten aus Aufgabe 1.3.2 – einführen und annehmen, daß die durch

$$u(x, y) = \hat{u}(r)$$

definierte Funktion lediglich von  $r$  abhängt.<sup>7)</sup> Die Formel (1.3.9) liefert nun

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\hat{u}}{dr} \right) = -a, \quad a = \frac{f}{k} = \text{const.} \quad (1.3.14)$$

Die Randbedingung auf  $\Gamma_1$  ergibt (warum?)

$$\frac{d\hat{u}}{dr}(R_1) = 0, \quad (1.3.15)$$

während auf  $\Gamma_2$  gilt

$$\hat{u}(R_2) = 0. \quad (1.3.16)$$

So entstand ein einfaches Randwertproblem (1.3.14) – (1.3.16) für eine gewöhnliche Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned} r \frac{d\hat{u}}{dr} &= -\frac{ar^2}{2} + C_1, \\ \hat{u}(r) &= -\frac{ar^2}{4} + C_1 \ln r + C_2; \end{aligned}$$

$C_1, C_2$  sind Integrationskonstanten. Die Randbedingungen (1.3.15) bzw. (1.3.16) ergeben nun

$$C_1 = \frac{1}{2} a R_1^2, \quad C_2 = \frac{a R_2^2}{4} - \frac{1}{2} a R_1^2 \ln R_2.$$

Damit ist

$$u(x, y) = -\frac{a(x^2 + y^2)}{4} + \frac{1}{4} a R_1^2 \ln(x^2 + y^2) + \frac{a R_2^2}{4} - \frac{1}{2} a R_1^2 \ln R_2,$$

so daß hier offensichtlich ist, daß  $u$  auf  $\Omega$  zweimal stetig differenzierbar ist.

**\* 1.3.4 Aufgabe.** Für die Kreisscheibe mit Radius  $R$  um den Ursprung in  $\mathbb{R}^2$  löse man das Dirichletsche bzw. Neumannsche Randwertproblem für die Laplacesche Gleichung  $-\Delta u = f$ :

$$\begin{aligned} a) \quad f &= 0, \quad g = axy, \\ b) \quad f &= 0, \quad h = a(x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (a = \text{const.})$$

<sup>7</sup> Wir schreiben deshalb sofort kürzer  $\hat{u}(r)$  statt  $\hat{u}(r, \varphi)$ .

## 1.4 Die Formel von D'Alembert

Hier werden wir das Anfangswertproblem für die Wellengleichung in einer Dimension ( $n = 1$ ) betrachten (vgl. Aufgabe (1.1.5b)). Es lautet

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad (1.4.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.4.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.4.3)$$

Setzen wir

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = v, \quad (1.4.4)$$

so ist

$$\frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (1.4.5)$$

Die Gleichung (1.4.1) ist offenbar äquivalent mit dem System (1.4.4), (1.4.5). Die letztere Gleichung ist besonders einfach. Sie ist ein Spezialfall der Gleichung (1.0.12) und könnte wie dort beschrieben gelöst werden. Noch einfacher ist aber, sie direkt zu lösen, indem man ausnutzt, daß  $v$  entlang einer jeden Geraden

$$x + ct = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

konstant ist. In der Tat ist

$$\frac{d}{dt} v(\alpha - ct, t) = -c \frac{\partial v(\alpha - ct, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(\alpha - ct, t)}{\partial t} = 0.$$

Also existiert eine Funktion  $\tilde{v}$  auf  $\mathbb{R}$ , so daß

$$v(x, t) = \tilde{v}(x + ct) \quad (1.4.6)$$

(es ist ja  $\tilde{v}(x) = v(x, 0)$ ). Auch umgekehrt: Für jedes stetig differenzierbare  $\tilde{v}$  löst die durch (1.4.6) definierte Funktion  $v$  die Gleichung (1.4.5). Ist  $\Phi$  irgendeine Stammfunktion von  $\tilde{v}/2$ , so kann (1.4.4) so geschrieben werden:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [u(x, t) - \Phi(x + ct)] + \frac{\partial}{\partial x} [u(x, t) - \Phi(x + ct)] = 0.$$

Ist also  $u$  Lösung von (1.4.4), so schließen wir wie bei (1.4.5), daß es eine Funktion  $\Psi$  auf  $\mathbb{R}$  gibt, so daß gilt:

$$u(x, t) - \Phi(x + ct) = \Psi(x - ct)$$

oder

$$u(x, t) = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct). \quad (1.4.7)$$

Auch umgekehrt liefert für beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $\Phi$  und  $\Psi$  die Formel (1.4.7) eine klassische Lösung von (1.4.1), wie man sich nach dem Differenzieren sofort überzeugt. Deshalb sagen wir, daß (1.4.7) die *allgemeine Lösung* der Wellengleichung (1.4.1) liefert.

**\*\* 1.4.1 Aufgabe.** Die Gleichungen (1.4.1) und (1.0.7) sind eng miteinander verbunden. Wie?

Auf der Geraden  $x + ct = \alpha$  (Abb. 1.4.1)

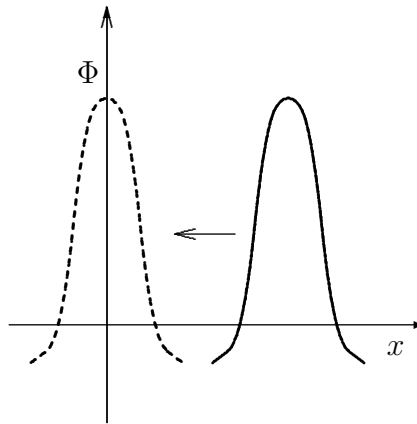
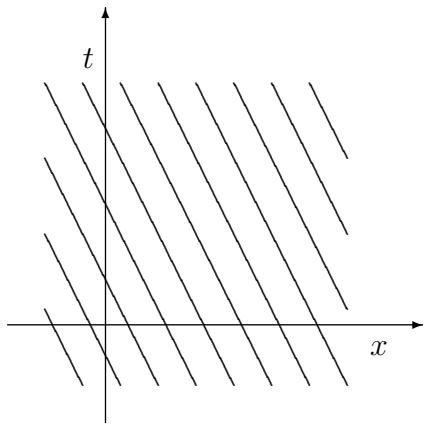


Abbildung 1.4.1  
Abbildung 1.4.2

ist die Funktion  $(x, t) \rightarrow \Phi(x+ct)$  konstant, der Graph der Funktion  $x \rightarrow \Phi(x+ct)$  bewegt sich, ohne sich zu deformieren, nach links mit der Geschwindigkeit  $c$ . Wir sagen: „ $\Phi(x+ct)$  ist eine nach links gerichtete Welle“. Analog ist  $\Psi(x-ct)$  eine „nach rechts gerichtete Welle“. Jede solche Welle ist eine Lösung der Gleichung (1.4.1), die durch diese für sie charakteristischen wellenartigen Lösungen ihren Namen erhalten hat. Nun besagt (1.4.7):

*Jede Lösung der Wellengleichung (1.4.1) ist eine Summe („Superposition“) einer nach links und einer nach rechts gerichteten Welle.*

Die Geraden  $x + ct = \alpha$  und  $x - ct = \alpha$  heißen **Charakteristiken** der Wellengleichung. Offenbar gehen durch jeden Punkt  $(x_0, t_0)^T$  stets zwei Charakteristiken (Abb. 1.4.3), welche einen „Lichtkegel“<sup>8)</sup> des Punktes  $(x_0, t_0)^T$  bilden (das schraffierte Gebiet in Abb. 1.4.3). Der Teil mit  $t > t_0$  heißt der **Konus der Zukunft**, während der mit  $t < t_0$  der **Konus der Vergangenheit** ist.

<sup>8)</sup> Die Bezeichnung „Lichtkegel“ kommt daher, daß in optischen Anwendungen (z.B. (1.2.18)) die Konstante  $c$  die Bedeutung der Lichtgeschwindigkeit hat.

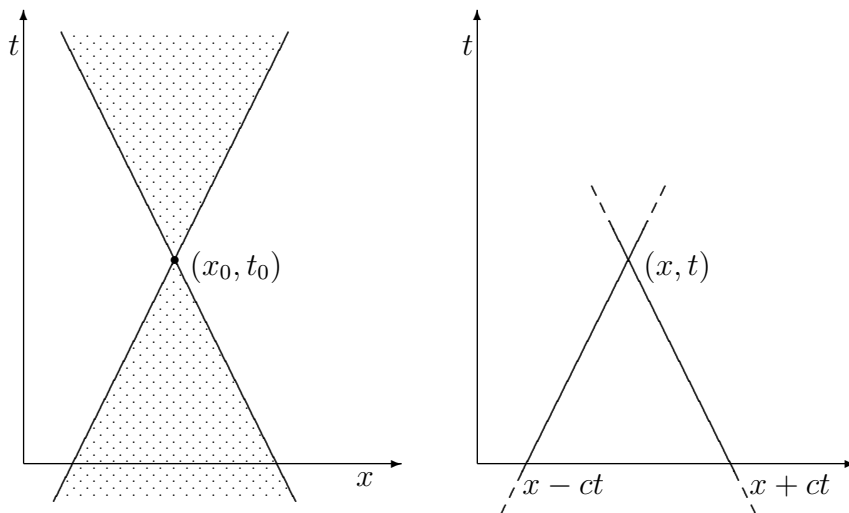


Abbildung 1.4.3

Abbildung 1.4.4

Aus (1.4.2), (1.4.3) folgt

$$\Phi(x) + \Psi(x) = u_0(x)$$

$$c(\Phi'(x) - \Psi'(x)) = u_1(x)$$

und

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left[ u_0(x) + \frac{1}{c} \int_0^x u_1(\xi) d\xi - C \right] ,$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \left[ u_0(x) - \frac{1}{c} \int_0^x u_1(\xi) d\xi + C \right] ,$$

wobei  $C$  eine Konstante ist. Setzen wir das in (1.4.7) ein, so ergibt sich

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x - ct) + u_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi) d\xi . \quad (1.4.8)$$

Diese Funktion löst das Anfangswertproblem (1.4.1) – (1.4.3). Unsere Herleitung zeigt aber, daß jede (1.4.1) – (1.4.3) lösende Funktion die Form (1.4.8) haben muß, d.h. *unser Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar für jedes zweimal stetig differenzierbare  $u_0$  und jedes einmal stetig differenzierbare  $u_1$ .*

Die Formel (1.4.8) heißt die **D'Alembertsche Formel**. Man beachte, daß die nach rechts bzw. nach links gerichteten Wellen  $\Phi$  bzw.  $\Psi$  in (1.4.7) durch  $u$  nicht eindeutig bestimmt sind.

Schauen wir uns die D'Alembertsche Formel genauer an, so bemerken wir, daß der Wert der Lösung in  $(x, t)$  nur von den Anfangsbedingungen  $u_0, u_1$  auf dem Intervall

$(x - ct, x + ct)$  abhängt – die Werte von  $u_0, u_1$  außerhalb dieses Intervalls sind für  $u(x, t)$  unerheblich.

Dies hat eine unmittelbare Interpretation: Die Wellen breiten sich mit der Geschwindigkeit  $c$  aus, und im Zeitintervall  $(0, t)$  können keine „Störungen“ aus den Punkten  $x'$  mit  $|x' - x| > ct$  den Punkt  $x$  erreichen. Das Intervall  $(x - ct, x + ct)$  nennt man deshalb das **Abhängigkeitsgebiet** des Punktes  $(x, t)^T$ . Die Punkte  $x - ct$  und  $x + ct$  auf der  $x$ -Achse sind durch die Charakteristiken in  $(x, t)^T$  bestimmt. Zusammen mit der  $x$ -Achse bilden sie das **charakteristische Dreieck** (Abb. 1.4.4) des Punktes  $(x, t)$ .

Um eine weitere Eigenschaft dieser Wellenausbreitung kennenzulernen, nehmen wir an, daß die Anfangsbedingungen  $u_0, u_1$  auf einem Intervall  $(x_1, x_2)$  z.B. positiv und sonst gleich null sind. Für  $x_3 > x_2$  (Abb. 1.4.5) und für Zeiten  $t$  mit  $0 < t < t_1 = (x_3 - x_2)/c$  verschwinden die Anfangsbedingungen im Abhängigkeitsgebiet des Punktes  $(x_3, t)^T$ , und daher ist  $u(x_3, t) = 0$ .

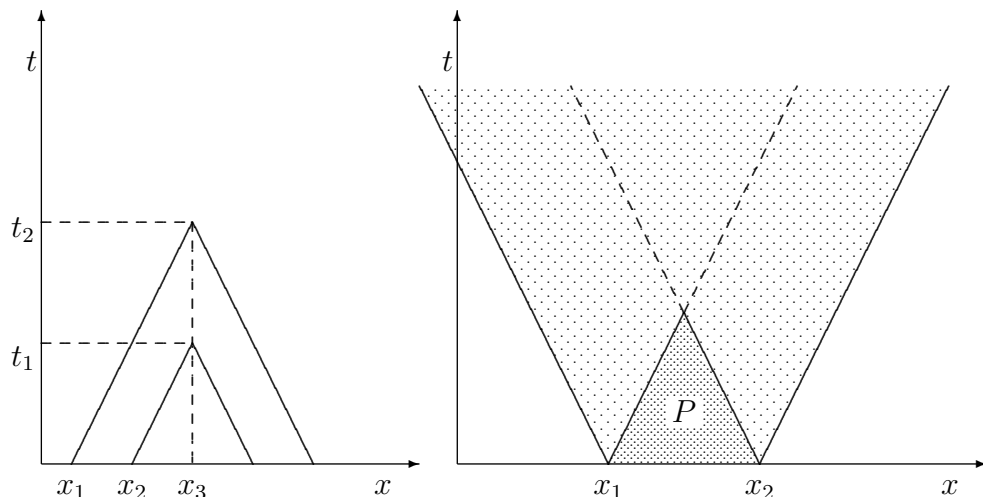


Abbildung 1.4.5

Abbildung 1.4.6

Für  $t > t_1$  dagegen hat das Abhängigkeitsgebiet von  $(x_3, t)^T$  einen nichtleeren Durchschnitt mit  $(x_1, x_2)$ , und nach (1.4.8) (man bedenke, daß  $u_1, u_0$  auf  $(x_1, x_2)$  positiv und sonst Null sind) gilt  $u(x_3, t) \neq 0$ . Diese Tatsache hat eine einfache Interpretation: Die „Störung“ auf dem Intervall  $(x_1, x_2)$  breitet sich längs der Charakteristik aus und kommt nach der Zeit  $t_1$  im Punkt  $x_3$  an, und zwar als eine nach rechts gerichtete Welle. Wir sagen, daß der Punkt  $x_3$  im Zeitpunkt  $t_1$  von der *Vorderfront der Welle* erreicht wird.

Im Intervall  $(t_2, \infty)$  ist  $u(x_3, t)$  wieder konstant. All dies liest sich einfach aus (1.4.8) ab. Ähnliches geschieht, wenn sich  $x_3$  links von  $(x_1, x_2)$  befindet. Dieses Phänomen heißt **Wellendiffusion**.

Die Werte der Anfangsbedingungen auf  $(x_1, x_2)$  beeinflussen die Lösung lediglich im Gebiet, das durch die linke Charakteristik in  $(x_1, 0)^T$  und die rechte Charakteristik in  $(x_2, 0)^T$  bestimmt ist (Abb. 1.4.6). Deshalb heißt dieses Gebiet das **Einflußgebiet** des Intervalls  $(x_1, x_2)$ . Ähnlich beeinflussen die Werte der Anfangsbedingungen im Punkt  $x$  die Lösung lediglich im Konus der Zukunft, genommen im Punkt  $(x, 0)^T$  (Abb. 1.4.7).

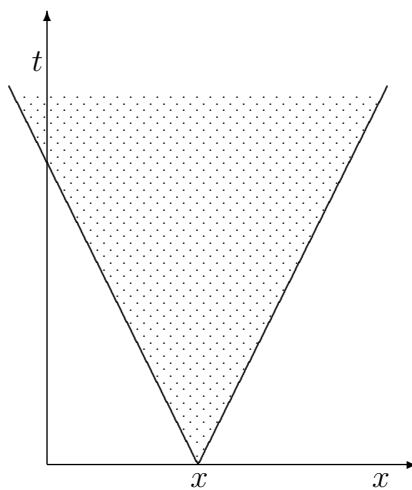


Abbildung 1.4.7

Betrachten wir den Fall, wo die Anfangsbedingungen nur auf dem Intervall  $(x_1, x_2)$  bekannt sind. Aus unseren Überlegungen folgt, daß die Lösung des Anfangswertproblems lediglich auf dem durch die Charakteristiken definierten Dreieck  $P$  (Abb. 1.4.6) definiert und durch (1.4.8) gegeben ist.

Für ein beliebiges  $T > 0$ ,  $|t| < T$  und  $x \in \mathbb{R}$  folgt aus (1.4.8) unmittelbar die Abschätzung

$$|u(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x)| + T \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_1(x)| . \quad (1.4.9)$$

Hieraus kann man vielerlei schließen. Sind die beiden Suprema auf der rechten Seite endlich, so folgt, daß *eine kleine Änderung der Anfangsbedingungen eine kleine Änderung der Lösung verursacht*. Genauer: Seien  $u$ ,  $v$  die Lösungen zu den Anfangsbedingungen  $u_0$ ,  $u_1$  bzw.  $v_0$ ,  $v_1$ ; dann ist für  $|t| < T$  und alle  $x$

$$|u(x, t) - v(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_0(x) - v_0(x)| + T \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_1(x) - v_1(x)| . \quad (1.4.10)$$

Dies nennt man die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsbedingungen oder kürzer **Korrektheit** des Anfangswertproblems. Fragen nach der Korrektheit werden in allen Anfangs- oder Randwertproblemen gestellt; ihre Bedeutung für die Anwendungen liegt auf der Hand.

Wie wir gesehen haben, ist die durch (1.4.8) definierte Funktion  $u$  zweimal stetig differenzierbar und genügt der Wellengleichung, wenn  $u_0$  zweimal und  $u_1$  einmal stetig differenzierbar ist. Ersetzen wir hier das Wort „stetig“ jeweils durch „stückweise stetig“, so wird die durch (1.4.8) gewonnene Funktion  $u$  der Wellengleichung überall genügen außer auf den Charakteristiken, die von den Sprungstellen zum Zeitpunkt Null ausgehen. Auf diesen Charakteristiken weisen die Ableitungen von  $u$  ebenfalls Sprünge auf. Eine solche Funktion nennen wir eine **schwache Lösung** unserer Gleichung, während diejenige, die zweimal stetig differenzierbar ist, **klassische Lösung** genannt wird.

Die Formeln (1.4.9) und (1.4.10) ermöglichen es, eine Verbindung schwacher Lösungen mit den klassischen herzustellen. Sei z.B.  $u$  eine schwache Lösung,  $u_0''$ ,  $u_1'$  seien stückweise stetig und auf  $\mathbb{R}$  beschränkt. Dann existieren für jedes  $\varepsilon > 0$  Funktionen  $u_{0,\varepsilon}$ ,  $u_{1,\varepsilon}$  mit (Beweis!)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_{0,\varepsilon}(x) - u_0(x)| < \varepsilon, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_{1,\varepsilon}(x) - u_1(x)| < \varepsilon,$$

für welche  $u_{0,\varepsilon}''$  und  $u_{1,\varepsilon}'$  stetig sind. Dann ist aber nach (1.4.10) für die entsprechende (klassische!) Lösung  $u_\varepsilon(x, t)$

$$|u(x, t) - u_\varepsilon(x, t)| \leq \varepsilon(1 + T)$$

für  $|t| < T$  und  $x \in \mathbb{R}$ . Das heißt: *Die schwache Lösung entsteht als Limes klassischer Lösungen, wobei möglicherweise gewisse Glattheitseigenschaften verloren gehen.*

Dies ist vielleicht die beste Beschreibung der schwachen Lösung, die man sich für die Zukunft merken sollte.

Die Lösung des Anfangswertproblems für die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \tag{1.4.11}$$

mit homogenen Anfangsbedingungen (d.h.  $u_0 \equiv 0$ ,  $u_1 \equiv 0$ ) ist durch die Formel gegeben

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \tag{1.4.12}$$

gegeben. Den Beweis überlassen wir dem Leser.



**1.4.2 Aufgabe.** Eine unendlich lange Saite wird in  $t = 0$  ausgelenkt – wie in (Abb. 1.4.8) gezeigt –

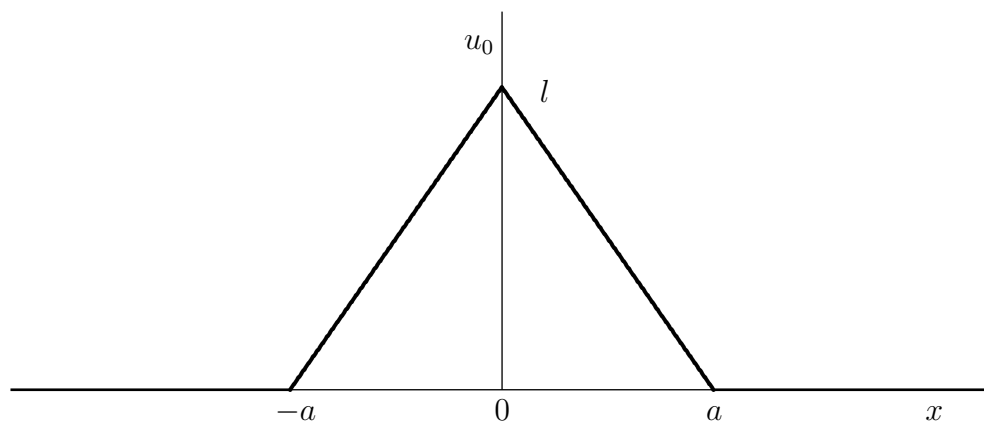


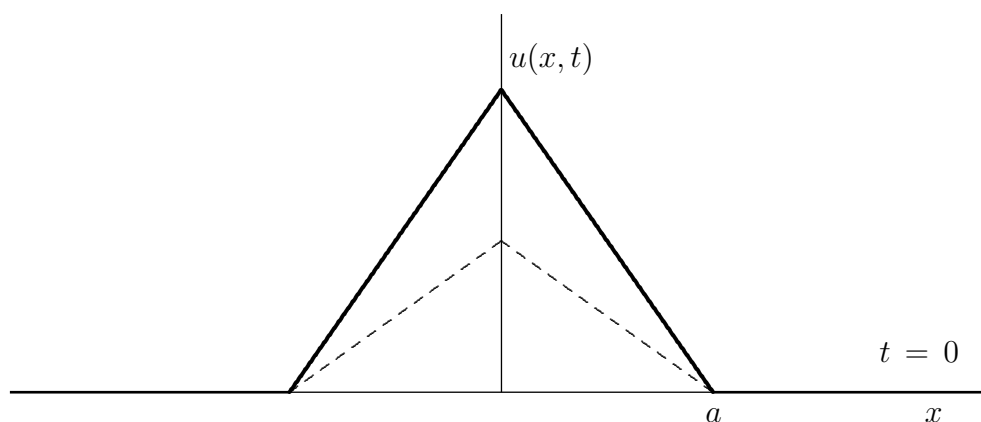
Abbildung 1.4.8

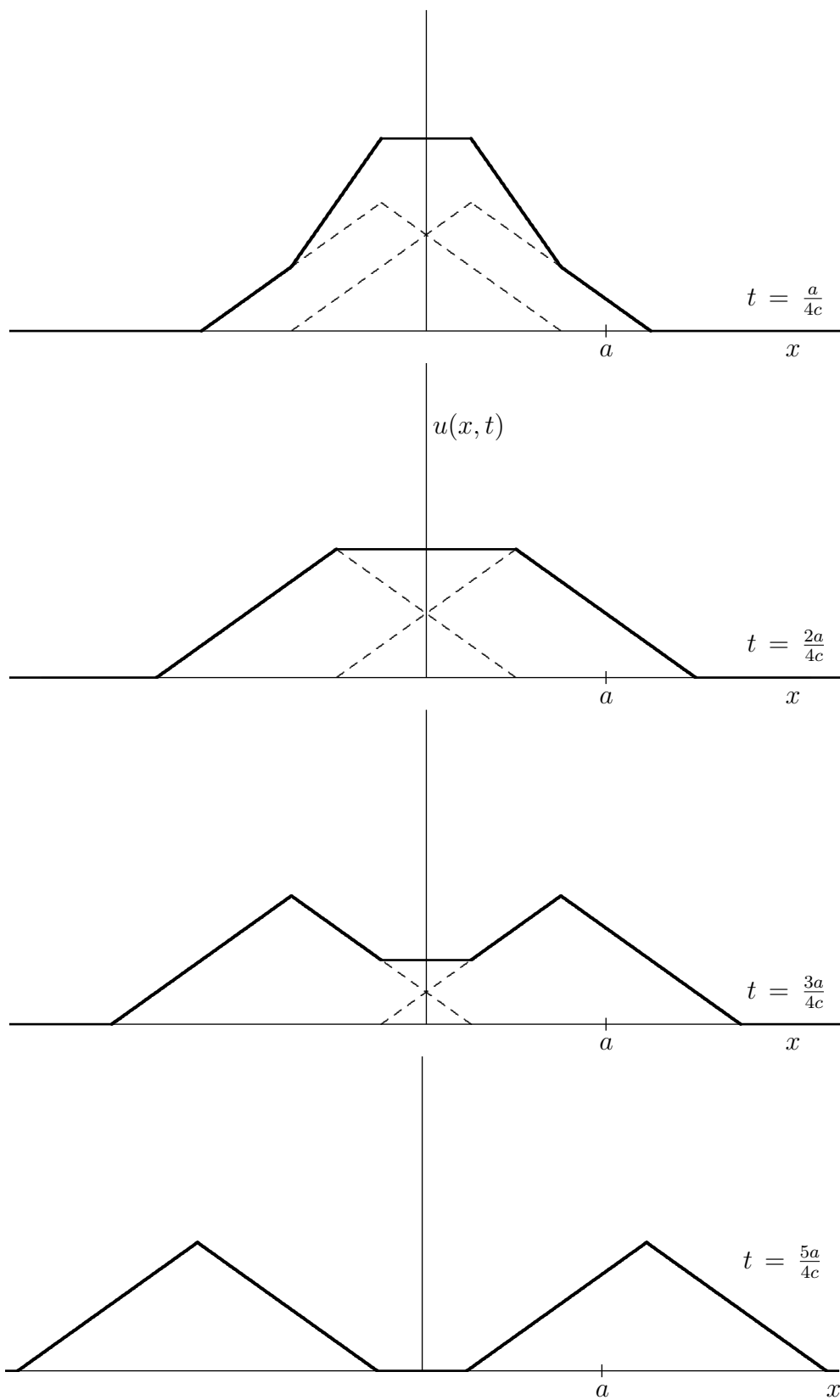
und dann losgelassen. Man zeichne die Form der Saite für  $t = t_k = ka/4c$ ,  $k = 1, 2, 3, 5$ .

**Lösung.** „Losgelassen“ bedeutet, daß  $u_1$  identisch verschwindet, während  $u_0$  durch Abb. 1.4.8 dargestellt ist. Nun liefert (1.4.8)

$$u(x, t) = \frac{1}{2}u_0(x - ct) + \frac{1}{2}u_0(x + ct) .$$

In  $t = 0$  stimmt die linke Welle  $u_0(x + ct)/2$  mit der rechten  $u_0(x - ct)/2$  überein. In  $t > 0$  wird die rechte (linke) Welle undeformiert nach recht (links) um  $ct$  versetzt; so ergeben sich die folgenden Bilder:





**1.4.3 Aufgabe.** Man löse das Anfangswertproblem für die Gleichung (1.4.11) mit

$$c = 2 \quad , \quad f(x, t) = \frac{1}{4}xt \quad , \quad u_0 = x^2 \quad , \quad u_1 = x \quad .$$

**Lösung.** Nach dem Superpositionsprinzip liefern (1.4.8) und (1.4.12)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left[ (x - 2t)^2 + (x + 2t)^2 \right] + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \xi \, d\xi + \int_0^t d\tau \int_{x-2(t-\tau)}^{x+2(t-\tau)} \frac{1}{4} \xi \tau \, d\xi \\ &= x^2 + 4t^2 + xt + x \int_0^t \tau(t - \tau) \, d\tau = x^2 + 4t^2 + xt + \frac{xt^3}{6} \quad . \end{aligned}$$

\* **1.4.4 Aufgabe.** Man löse das Anfangswertproblem (1.4.11) mit

$$a) \quad c = 1 \quad , \quad f = e^x \quad , \quad u_0 = \sin x \quad , \quad u_1 = x + \cos x \quad ,$$

$$b) \quad f = \frac{1}{c^2} \sin \omega x \quad , \quad u_0 \equiv u_1 \equiv 0 \quad ,$$

$$c) \quad f \equiv 0 \quad , \quad u_0 \equiv 0 \quad , \quad u_1 \equiv 1 \quad .$$



## Lösungen der zusätzlichen Aufgaben

**1.0.1 Lösung.** Sei  $y = y(x_1, x_2)$  eine zweimal stetig differenzierbare Lösung von (1.0.6), die auf ganz  $\mathbb{R}^2$  definiert ist. Dann ist  $z = \partial y / \partial x_1$  stetig differenzierbar, und es gilt

$$\frac{dz}{dx_1} + x_1 z = 0 .$$

Für jedes  $x_2$  ist dies eine gewöhnliche Differentialgleichung mit der (einzigen) Lösung

$$z(x_1, x_2) = z(0, x_2) e^{-x_1^2/2} ,$$

d.h.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial y}{\partial x_1}(0, x_2) e^{-x_1^2/2} .$$

Hieraus folgt

$$y(x_1, x_2) = \frac{\partial y}{\partial x_1}(0, x_2) \int_0^{x_1} e^{-\xi^2/2} d\xi + y(0, x_2)$$

und damit auch der Beweis der Behauptung.

**1.1.5 Lösung.** a) Die Platte liege auf der  $x_1, x_2$ -Ebene und ihre Dicke sei  $h$ ;  $h$  sei so klein, daß die Temperatur  $u$  nur von  $x_1$  und  $x_2$  abhängt. Die in einem ebenen Gebiet  $\Omega$  erhaltene Wärme wird wieder durch

$$W = W(\Omega, t) = \int_{\Omega} C(x) \rho(x) u(x, t) dx \quad ^1)$$

gegeben, wobei jetzt  $x \in \mathbb{R}^2$  genommen wird. Ist  $\Phi_i$  ein auf der  $x_i$ -Achse senkrecht stehendes Intervall, so ist die im Zeitintervall  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  durch  $\Phi_i$  geflossene Wärme gleich

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt \int_{\Phi_i} q_i(x, t) dx^{(i)}$$

( $dx^{(i)}$  = Lebesguesches Maß auf  $\Phi_i$ , d.h.  $dx^{(i)} = dx_2$ ,  $dx^{(2)} = dx_1$ ). Man nimmt nun das Rechteck

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega; x_i^{(0)} < x_i < x_i^{(0)} + \Delta x_i\} ,$$

berandet durch

---

<sup>1</sup>  $C(x), \rho(x), q_i(x)$  haben analoge Bedeutungen wie im räumlichen Fall.

$$\begin{aligned}\Phi_i^- &= \{x \in \Omega; x_i = x_i^{(0)}, x_j^{(0)} \leq x_j \leq x_j^{(0)} + \Delta x_j, j \neq i\}, \\ \Phi_i^+ &= \{x \in \Omega; x_i = x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_j^{(0)} \leq x_j \leq x_j^{(0)} + \Delta x_j, j \neq i\}, \\ & i = 1, 2.\end{aligned}$$

Das Erhaltungsgesetz der Wärme lautet

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega_0} C(x)\rho(x)u(x, t_0 + \Delta t) dx - \int_{\Omega_0} C(x)\rho(x)u(x, t_0) dx \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt \left[ \int_{\Phi_i^+} q_i(x, t) dx^{(i)} - \int_{\Phi_i^-} q_i(x, t) dx^{(i)} \right] + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} dt \int_{\Omega_0} F(x, t) dx.\end{aligned}$$

Das Gesetz  $q_i(x, t) = \kappa(x)\partial u(x, t)/\partial x_i$  führt dann auch hier zu

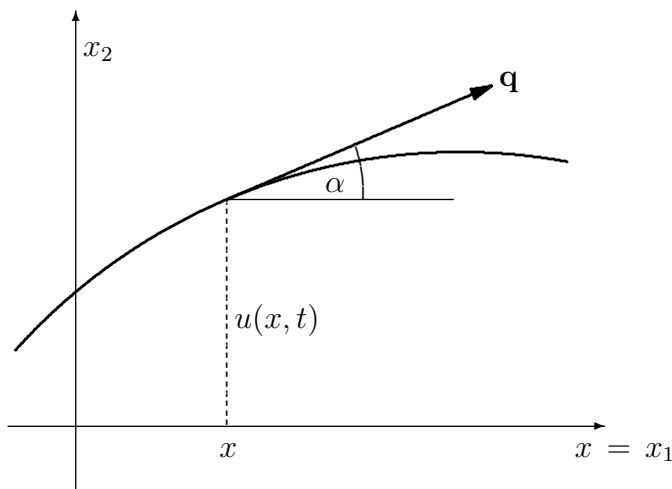
$$C\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \kappa \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = F.$$

Sind  $C, \rho, \kappa$  konstant, so ergibt sich wieder

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = f,$$

nur ist hier der Laplaceoperator zweidimensional:  $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ .

b) Die  $x$ -Achse beschreibe die undeformierte Lage der Saite;  $u(x, t)$  sei die Auslenkung der Saite,  $\mathbf{q}(\zeta, t)$  die Kraft, mit welcher der Teil  $x > \zeta$  der Saite auf den Teil  $x < \zeta$  einwirkt,  $F$  die äußere Kraftdichte (die Kraft wirkt orthogonal zur  $x$ -Achse auf die Saite ein),  $\rho$  die Massendichte der Saite (die Masse einer Längeneinheit) – siehe die folgende Abbildung.



Ähnlich wie bei der Membran nimmt man an, daß die Kraft  $\mathbf{q}$  zum Graphen von  $x \rightarrow u(x, t)$  tangential liegt.

Die  $x_2$ -Komponente des Impulses des kleinen Stücks der Saite, das mit dem Intervall  $(x, x + dx)$  bestimmt ist, ist angenähert gleich

$$\rho dx \frac{\partial u}{\partial t} .$$

Das Newtonsche Gesetz liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho dx \frac{\partial u}{\partial t} \right) = q_2 \Big|_{x+dx} - q_2 \Big|_x + F dx \approx \frac{\partial}{\partial x} q_2 dx + F dx .$$

Auch hier setzen wir voraus, daß sich durch die Deformation nur die Richtung von  $\mathbf{q}$  ändert, und auch die nur geringfügig. Also ist

$$q_2 = p \sin \alpha \approx p \tan \alpha = p \frac{\partial u}{\partial x} ,$$

wobei  $p$  die Spannkraft in der Saite ist. Es ergibt sich schließlich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

mit  $c = (p/\rho)^{1/2}$ ,  $f = F/\rho$ . Dies ist die Wellengleichung.

c) Sei  $u(x, t)$  die Verschiebung des Querschnitts in  $x$ -Richtung,  $q(\zeta, t)$  die Kraft (in der  $x$ -Richtung), mit welcher der Teil  $x > \zeta$  des Stabes auf den Teil  $x < \zeta$  einwirkt, und  $F$  eine eventuelle Kraft (in  $x$ -Richtung) auf eine Längeneinheit des Stabes. Das Newtonsche Impulsgesetz ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho dx \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} q dx + F dx$$

( $\rho$  ist hier, ähnlich wie bei der Saite, die Längendichte der Masse). Daraus folgt

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial q}{\partial x} + F .$$

Das Hooksche Gesetz liefert nun

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

mit  $c = (E/\rho)^{1/2}$ ,  $f = F/\rho$ .

**1.2.1 Lösung.** Es ist nach (1.2.18) z.B.

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$$

und auch

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} .$$

Hieraus folgt sofort

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 .$$

**1.2.2 Lösung.** Es ist nach (1.2.19)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, t)|^2 dx &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(x, t)} \psi(x, t) dx \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V\right) \psi(x, t)} \psi(x, t) dx + \frac{1}{i\hbar} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(x, t)} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V\right) \psi(x, t) dx \\ &= -\frac{\hbar}{2mi} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(x, t)} \Delta \psi(x, t) dx - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \overline{\psi(x, t)} \psi(x, t) dx \right) . \end{aligned}$$

Berechnen wir z.B. durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(x, t)} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x_1^2} dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\psi(\infty, x_2, x_3, t)} \frac{\partial \psi(\infty, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} dx_2 dx_3 \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\psi(-\infty, x_2, x_3, t)} \frac{\partial \psi(-\infty, x_2, x_3, t)}{\partial x_1} dx_2 dx_3 \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \overline{\psi(\infty, x_2, x_3, t)}}{\partial x_1} \psi(\infty, x_2, x_3, t) dx_2 dx_3 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \overline{\psi(-\infty, x_2, x_3, t)}}{\partial x_1} \psi(-\infty, x_2, x_3, t) dx_2 dx_3 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \overline{\psi(x, t)}}{\partial x_1^2} \psi(x, t) dx . \end{aligned}$$

Die ganze Betrachtung hat – von der Schreibweise der uneigentlichen Integrale einmal abgesehen – einen stark heuristischen Charakter. Insbesondere ist schweigend vorausgesetzt worden, daß

$$P(t) = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, t)|^2 dx$$



stets endlich und nach  $t$  differenzierbar ist.

Dies suggeriert, daß alle  $\mathbb{R}^2$ -Integrale oben verschwinden, und es ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(x,t)} \Delta \psi(x,t) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\Delta \psi(x,t)} \psi(x,t) dx \quad ,$$

was dann impliziert, daß  $P'(t) \equiv 0$  gilt; also ist  $P(t)$  konstant. Nun kann durch Multiplizieren von  $\psi$  mit einer Konstanten (Linearität) erreicht werden, daß stets (1.2.20) gilt.

Ein tieferes Studium der Gleichung (1.2.19) zeigt tatsächlich, daß die obigen formel-  
len Manipulationen streng begründet werden können.

### 1.3.4 Lösung.

- a)  $u = axy$ , da  $\Delta(axy) = a\Delta(xy) = 0$ .
- b) Für jede Konstante  $C$  gilt offensichtlich

$$\Delta C(x^2 - y^2) = 0 \quad .$$

Nun ist

$$\left. \frac{\partial}{\partial \nu} C(x^2 - y^2) \right|_{r=R} = \left. \frac{d}{dr} (Cr^2 \cos 2\varphi) \right|_{r=R} = 2CR \cos 2\varphi \quad .$$

Soll dies für  $r = R$  mit  $h = a(x^2 - y^2)$  übereinstimmen, so muß  $C = aR/2$  sein. Also

$$u = \frac{aR}{2}(x^2 - y^2) + C' \quad .$$

### 1.4.4 Lösung.

- a)  $u(x,t) = \sin(x+t) + xt - (1 - \cosh t)e^x \quad ,$
- b)  $u(x,t) = (1 - \cos \omega ct) \sin \omega x / \omega^2 c^2 \quad ,$
- c)  $u(x,t) = t \quad .$

