Michael Skrzipek

Modul 61710

Approximation und Rekonstruktion

LESEPROBE

Fakultät für
Mathematik und Informatik

FernUniversität in Hagen

Der Inhalt dieses Dokumentes darf ohne vorherige schriftliche Erlaubnis durch die FernUniversität in Hagen nicht (ganz oder teilweise) reproduziert, benutzt oder veröffentlicht werden. Das Copyright gilt für alle Formen der Speicherung und Reproduktion, in denen die vorliegenden Informationen eingeflossen sind, einschließlich und zwar ohne Begrenzung Magnetspeicher, Computerausdrucke und visuelle Anzeigen. Alle in diesem Dokument genannten Gebrauchsnamen, Handelsnamen und Warenbezeichnungen sind zumeist eingetragene Warenzeichen und urheberrechtlich geschützt. Warenzeichen, Patente oder Copyrights gelten gleich ohne ausdrückliche Nennung. In dieser Publikation enthaltene Informationen können ohne vorherige Ankündigung geändert werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Grundlegende Fragestellungen

Unter Approximation versteht man die Ersetzung eines mathematischen Objektes durch ein anderes, „nahe gelegenes“ und in einem gewissen Sinne „einfacheres“. Dies wird durch der Übersetzung des Begriffes „approximare“ [lat.] durch nähern, sich nähern zum Ausdruck gebracht. Hierbei ist insbesondere zu spezifizieren, was „nahe gelegen“ meint. In der Regel möchte man außerdem

- die Approximation berechnen und deren „Qualität“ bewerten können,
- gewisse Eigenschaften des Ausgangsobjekts erhalten oder auf diese zurückschließen können,
- die Approximation als Ersatzobjekt benutzen, die zudem für die benötigten Zwecke praktikabler sein soll als das Ausgangsobjekt.

Die genaue Formulierung dieser Ziele hängt von den konkreten Problemstellungen ab und ist natürlich im mathematischen Sinne präzise zu formulieren. Viele naturwissenschaftlich/technische Fragestellungen führen über mathematische Modelle zu solchen Approximationsproblemen, die dann beispielsweise mit numerischen oder Optimierungsverfahren näherungsweise gelöst werden können. Anwendungsprobleme müssen hierzu in ein mathematisches Problem (Modell) umformuliert werden. Je nachdem, welche Aspekte von Relevanz sind, können verschiedene Ansätze sinnvoll sein.

Grundsätzlich lässt sich sagen, je genauer man einzelne Phänomene modellieren möchte, desto komplizierter werden in der Regel die sie beschreibenden Modelle und die dazu gehörenden mathematischen Formeln sowie die dazu passenden Lösungsverfahren. Daher ist stets die *benötigte* Güte einer Approximation zu berücksichtigen. Für ein Sprachsignal, bei dem es primär auf dessen Verständlichkeit ankommt, reicht eine relativ einfache Approximation mit dem Ziel durch Datenreduktion große Mengen solcher Datenpakete in Echtzeit zu übertragen, wie beim Festnetztelefon oder Handy.

Demgegenüber erfordert das Ziel, eine möglichst große Klangtreue zu erhalten, etwa bei Musikaufnahmen, einen erheblich größeren Aufwand. Beim Kompressionsformat MP3 werden hierzu beispielsweise nur vom menschlichen Gehör wahrnehmbare Frequenzen berücksichtigt, was eine Bandbreitenbegrenzung des Signals durch Tiefpassfilterung bedeutet. Hierauf kommen wir im Kapitel 7 zurück. Aber auch weitere Dinge, wie psychoakustische Merkmale des menschlichen Gehörs und technische Restriktionen, werden hierbei berücksichtigt. Entsprechendes lässt sich auch auf andere Einsatzbereiche, etwa im multimedialen Bereich bei Bildern und Filmsequenzen, sowie weiteren naturwissenschaftlich/technischen Anwendungen, etwa in der Medizin, der Luft- und Raumfahrttechnik,… übertragen.

Gerade der Umstieg von analoger zur digitalen Technologie und die dadurch bedingten Paradigmenwechsel haben hierbei völlig neue Möglichkeiten der Herangehensweise sowohl in der Modellbildung als auch in den Lösungsansätzen für die Modellprobleme und deren Realisierungen ermöglicht.

Doch bevor wir uns mit den „moderneren“ Approximationstechniken befassen, benötigen wir neben einigen Grundlagen auch ein grundlegendes Verständnis über die Möglichkeiten und Grenzen von Approximationen, Methoden, diese zu berechnen, und Aussagen zu deren „Güte“. Um diese messen zu können, braucht man einen Abstandsbegriff. Wir erinnern hierzu an folgende Definition

Definition 1.1.1. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}\,(=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\}$ heißt *Norm*, falls

1. $\|x\| \geq 0$, wobei $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ (Nullelement in X) (Definitheit),
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ (Homogenität), wobei $|\cdot|$ die Betragsfunktion bezeichne,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

für alle $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt. Ein Raum X, versehen mit einer Norm, heißt *normierter linearer Raum*. Sofern klar ist, welche Norm zugrunde gelegt wird, schreiben wir statt $(X, \|\cdot\|)$ kurz X.

Soll betont werden, welcher Raum zugrunde liegt, benutzen wir die Bezeichnung $\|\cdot\|_X$ und analog $\|\cdot\|_M$, wenn verdeutlicht werden soll, bzgl. welcher Menge M die Norm gebildet wird. Weitere Indizes zur Unterscheidung verschiedener Normen erklären sich aus deren Definitionen und aus dem Zusammenhang, wo sie auftreten.

Weiterhin sei an die Ungleichung $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ für alle $x, y \in X$ (umgekehrte („inverse“) Dreiecksungleichung) erinnert.

Beispiel 1.1.2. Seien $1 \leq p < \infty$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall[1]. Dann ist $L_p(I) := \{f : I \to \mathbb{R}$ meßbar, $|f|^p$ integrierbar$\}$ ein linearer Raum. Auf diesem kann man vermöge

$$\|f\|_{L_p(I)} := \|f\|_p := \left(\int_I |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} , \quad f \in L_p(I) ,$$

eine Norm, die L_p-Norm, definieren. Man beachte, dass hier zwei Funktionen $f, g \in L_p(I)$ als „gleich“ oder „äquivalent“ angesehen werden, wenn sie sich nur auf einer Menge vom Maß Null voneinander unterscheiden, d.h. $\|f - g\|_p = 0$. Man sagt auch, dass f und g „fast überall“ (f.ü.) in I gleich sind [20, S. 88, Beispiel 9.11]. In diesem Sinne bedeutet hier $\|f\|_p = 0$ nicht, dass f die Nullfunktion auf I ist, sondern dass $f = 0$ fast überall auf I gilt. ✠

Da durch die Abbildung $d, d(x, y) := \|x - y\|$, für alle $x, y \in X$, eine Metrik definiert wird, ist jeder normierte lineare Raum ein metrischer Raum.

Aufgabe 1.1.3. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto \|x\|$ für alle $x \in X$ stetig ist. ⊠

Lösung auf Seite 11

Eine erste Konkretisierung der hier betrachteten Fragestellungen liefert uns folgende

Definition 1.1.4 (Approximationsproblem)**.** Gegeben sei ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$, sowie eine nichtleere Teilmenge $V \subset X$. Ein Element $v^\star \in V$ heißt *Bestapproximation*, *bestapproximierendes Element* oder *Proximum* an ein gegebenes Element $x \in X$, falls

$$\|x - v^\star\| \leq E_V(x) := \inf_{v \in V} \|x - v\| .$$

Hierbei bezeichnet $E_V(x)$ den minimalen Abstand zwischen dem Element $x \in X$ zur Menge V bzw. zu dessen Elementen und beschreibt den kleinstmöglichen Fehler, den man bei der Approximation von x durch Elemente aus V bzgl. der Norm $\|\cdot\|$ macht, und heißt daher auch *Fehler der Bestapproximation* von V an x.

[1] $\pm\infty$ sind als Randpunkte des Intervalls zugelassen.

Die Menge V heißt *Existenzmenge*, falls es zu jedem $x \in X$ mindestens eine Bestapproximation $v^\star \in V$ gibt. Sie heißt *Čebyšev-Menge*[2], falls es zu jedem $x \in X$ genau ein Proximum aus V gibt.

Man beachte, dass X nicht vollständig (also kein Banachraum[3]) sein muß im folgendem Sinne:

Definition 1.1.5 (Vollständigkeit eines Raumes)**.** Ein normierter linearer Raum X heißt vollständig, falls jede konvergente Folge aus X ein Grenzelement in X besitzt. In diesem Falle nennt man X einen *Banachraum*.

Ebenso muß V kein Unterraum sein. Sofern Verwechselungsgefahr ausgeschlossen ist, schreiben wir auch $E_n(x)$ statt $E_V(x)$ bzw. $E_{V_n}(x)$. Das n bedeutet je nach Kontext, dass V ein n-dimensionaler Teilraum von X ist, oder bei Folgen $(V_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Unterräumen oder Teilmengen von X kennzeichnet es den Bestapproximationsfehler bzgl. V_n.

Beispiele 1.1.6. Oft auftretende Fälle sind:

1. $X = C(I)$, der Raum der auf einem Intervall $I := [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, stetigen Funktionen, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, versehen mit der Maximumsnorm (auch Čebyšev-Norm genannt) $\|\cdot\|_\infty$,

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)| , \quad f \in C[a, b] ,$$

und $V = \Pi_n$, der Vektorraum der algebraischen Polynome vom Höchstgrad n, $\dim \Pi_n = n + 1$. Mit den (algebraischen) *Monomen* m_ν,

$$m_\nu(t) := t^\nu , \quad \nu \in \mathbb{N}_0 ,$$

kann gezeigt werden, dass $m_0, \dots , m_n$ eine Basis von Π_n bilden, also $\Pi_n = \operatorname{span}\{m_\nu,\ \nu = 0, \dots , n\}$.

2. $X = C_T$, der Raum der stetigen T-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, versehen mit der L_2-Norm über ein Intervall der Länge T, und der Vektorraum V der T-periodischen trigonometrischen Polynome vom Höchstgrad n, also $V = \mathcal{T}_n^T := \operatorname{span}\{1, \sin\omega\cdot, \cos\omega\cdot, \dots , \sin n\omega\cdot, \cos n\omega\cdot\}$, $\dim \mathcal{T}_n^T = 2n + 1$ mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$. (Für $T = 2\pi$ bzw. $\omega = 1$ schreiben wir $\mathcal{T}_n$ statt $\mathcal{T}_n^{2\pi}$.) In Analogie zum vorherigen Beispiel nennt man die Funktionen η_ν,

$$\eta_\nu(t) := \left\{ \begin{array}{lll} \sin(\mu\omega t) , & \text{falls} & \nu = 2\mu + 1 , \\ \cos(\mu\omega t) , & \text{falls} & \nu = 2\mu , \end{array} \right\} \quad \mu, \nu \in \mathbb{N}_0 ,$$

(trigonometrische) *Monome*, also $\mathcal{T}_n^T = \operatorname{span}\{\eta_\nu,\ \nu = 0, \dots , 2n\}$.

Wird ein (algebraisches bzw. trigonometrisches) Polynom p als Linearkombination der (algebraischen bzw. trigonometrischen) Monome dargestellt, so nennt man dies die *Monomdarstellung* von p. ✠

Die sich hieraus ergebenden Fragen sind beispielsweise

- Gibt es zu einem gegebenem $x \in X$ ein Proximum $v^\star \in V$?
- Falls es eine Bestapproximation gibt, ist diese eindeutig?

[2] Čebyšev, Pafnuti Lwowitsch (4.7.$^{jul.}$/ 16.5.$^{greg.}$1821-26.11.$^{jul.}$/ 8.12.$^{greg.}$1894), russischer Mathematiker, andere Schreibweisen: Čebyšëv,Tschebyschow, Tschebyschef, Tschebyscheff, Tschebyschew usw.

[3] Banach, Stefan (30.3.1892-31.8.1945), polnischer Mathematiker.

- Kann man solche bestapproximierende Elemente charakterisieren?
- Wie kann man Proxima berechnen?
- Kann man den Fehler $E_V(x)$ ohne Kenntnis von $v^\star$ a priori abschätzen?
- Betrachtet man Folgen von geschachtelten Teilmengen $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots$[4], welche qualitativen und quantitativen Aussagen kann man über $E_{V_n}(x)$ machen? Gilt beispielsweise $\lim_{n\to\infty} E_{V_n}(x) = 0$ für alle $x \in X$ und wenn ja, mit welcher Ordnung konvergiert $E_{V_n}(x)$ gegen 0? Antworten zu Fragen dieser Art sind *asymptotische* Aussagen. Hier schließen sich weitere Fragen an.
  - Kann man beispielsweise anstatt eine Folge von Bestapproximierenden $(v_n^\star)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zu ermitteln, stattdessen eine etwa numerisch „einfacher“ zu berechnende Folge von Funktionen bestimmen bzw. charakterisieren, deren Fehlerverhalten sich asymptotisch (d.h. für $n \to \infty$) in der Größenordnung wie $E_{V_n}(x)$ verhält?
  - Umgekehrt kann man sich fragen: Kann man Funktionsklassen $Y \subseteq X$ durch die so genannte *asymptotische Approximationsordnung* φ charakterisieren, also für die gilt

$$Y = Y_\varphi := \left\{ x \in X \ : \ 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{E_n(x)}{\varphi(n)} < \infty \right\}$$

    für eine „geeignet“ gewählte Funktion $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$? Fragen dieser Art werden wir im Kapitel 4 behandeln. Dort werden wir φ mittels der Landau-Symbole beschreiben, die wir im Anhang 9.2 definieren.

Ergänzend zu Beispiel 1.1.2 bemerken wir, dass $(L_p(I), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum ist [19, S. 109, Satz 130.5]. Versehen wir hingegen den Raum $C(I)$ der auf I stetigen Funktionen, $f : I \to \mathbb{R}$ mit dieser Norm, so ist $(C(I), \|f\|_p)$ jedoch *kein* Banachraum. Vielmehr liefert dessen Vervollständigung gerade den Raum $L_p(I)$.

Wenn wir Folgen von Bestapproximierenden $(v_n^\star \in V_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in geschachtelten Teilräumen $V_n \subset V_{n+1} \subset X$, $n \in \mathbb{N}_0$, betrachten, kann es daher sein, dass $v^\star := \lim_{n\to\infty} v_n^\star \notin X$ liegt, falls X nicht vollständig ist. Daher sollten bei asymptotischen Aussagen auch Fragen zur Konvergenz betrachtet werden.

Beispiel 1.1.7. Sind $p = 1,\ I = [a, b] = [0, 2]$, $X = (C(I), \|\cdot\|_1)$,

$$v_n(t) = \begin{cases} t^n\,, & 0 \le t \le 1\,, \\ 1\,, & 1 \le t \le 2\,, \end{cases}$$

so ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge[5] in X: $\|v_n - v_m\|_1 = \int_0^1 |t^n - t^m|\,dt \le \frac{2}{n+1} \to 0$ für $n \le m$ und $n \to \infty$. Konvergiert v_n gegen eine stetige Funktion v für $n \to \infty$, so gilt einerseits

$$\int_0^1 |v(t)|\,dt \quad \le \quad \int_0^1 |v(t) - t^n + t^n|\,dt \le \int_0^1 |v(t) - t^n|\,dt + \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty\,,$$

[4] Hier bezeichnen die Indizes nur Numerierungen der Teilmengen, nicht notwendigerweise die Dimension eventueller Vektorräume.

[5] Die v_n sind an dieser Stelle nicht notwendigerweise Bestapproximierende aus einem passenden V_n, sondern beliebige Elemente aus X. Als V_n kann man beispielsweise den Teilraum der stetigen Funktionen wählen, die stückweise auf $[0, 1] \cup [1, 2]$ stetig zusammengesetzte Polynome vom Höchstgrad n sind („polynomiale Splines“).

also müßte v aus Stetigkeitsgründen in $[0, 1)$ verschwinden. Andererseits gilt

$$\int_1^2 |v(t) - 1| \, dt \quad = \quad \int_1^2 |v(t) - v_n| \, dt \leq \|v - v_n\|_1 \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty \, ,$$

so dass ebenso wegen der Stetigkeit $v(t) = 1$ für $t \in (1, 2]$ gelten müsste. Somit erhalten wir zwar v in der Form

$$v(t) = \begin{cases} 0 \, , & 0 \leq t < 1 \, , \\ 1 \, , & 1 < t \leq 2 \, , \end{cases}$$

und einer Unstetigsstelle in $t = 1$, ist aber kein Element aus X, obwohl $v_n \in X$ gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. ✠

Fragestellungen wie diese sind nicht nur von akademischem Interesse, sondern kommen in zahlreichen Anwendungen vor, in denen weitergehende Strukturen und Eigenschaften von X und V bekannt sind, so dass man hier detailliertere Antworten erwarten kann.

Sofern wir nicht anderes schreiben, betrachten wir im Folgenden hauptsächlich die Approximation reellwertiger Funktionen in einer reellen Variablen und wählen V als einen endlich dimensionalen Teilraum von X. Hierzu gibt es eine sehr weit entwickelte Theorie, die hier nicht in voller Breite dargestellt werden kann. Die Theorie im Komplexen oder im Mehrdimensionalen erfordert weitergehende, zum Teil auch andere Techniken und können daher bestenfalls exemplarisch nur kurz angerissen werden.

Ziel ist es, dass neben den klassischen Resultaten moderne Approximationsmethoden beschrieben werden, wie sie der Technik, etwa in der Signalverarbeitung bei Kompressions- und Rekonstruktionsverfahren auftreten.

Die Approximation durch algebraische oder trigonometrische Polynome spielt nicht nur historisch eine dominierende Rolle. Sie ist auch heute noch beispielsweise in der Numerik unverzichtbar für das Grundverständnis von Approximationsmethoden und wird daher auch hier eingehend betrachtet. Jedoch bringt die Benutzung von Polynomen in den Anwendungen auch Nachteile mit sich, die wir aufzeigen wollen und Alternativen angeben.

1.2 Grundlagen aus der Funktionalanalysis

In diesem Kapitel stellen wir einige Grundlagen aus der Funktionalanalysis bereit, die sowohl für die theoretischen Untersuchungen als auch für die Konstruktion von Approximationsverfahren benötigt werden. Ein zentraler Begriff ist hierbei der des Operators.

Definition 1.2.1. Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte lineare Räume. Eine Abbildung $T : X \to Y$ nennt man Operator. Er heißt *linear*, falls

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y \, , \quad \text{für alle} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \; x, y \in X$$

gilt. Im Falle eines Endomorphismus ($X = Y$) spricht man von einem linearen Operator *in* X, ist $Y = \mathbb{K}$, so heißt T ein *lineares Funktional auf* X.

Offenbar bildet ein linearer Operator T das Nullelement $x = 0 \in X$ in $Tx = 0 \in Y$ ab. Im Falle $X = \mathbb{K}^n$, $Y = \mathbb{K}^m$ kann T durch eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m,n}$ beschrieben werden: $T : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Beispiele 1.2.2.

1. Die *Bernstein*[6]*-Grundpolynome*[7] $b_{\nu,n} \in \Pi_n$, $b_{\nu,n}(t) := \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu}$, $\nu = 0, \dots, n$, vgl. Abb. 1.1, bilden eine Basis von Π_n.

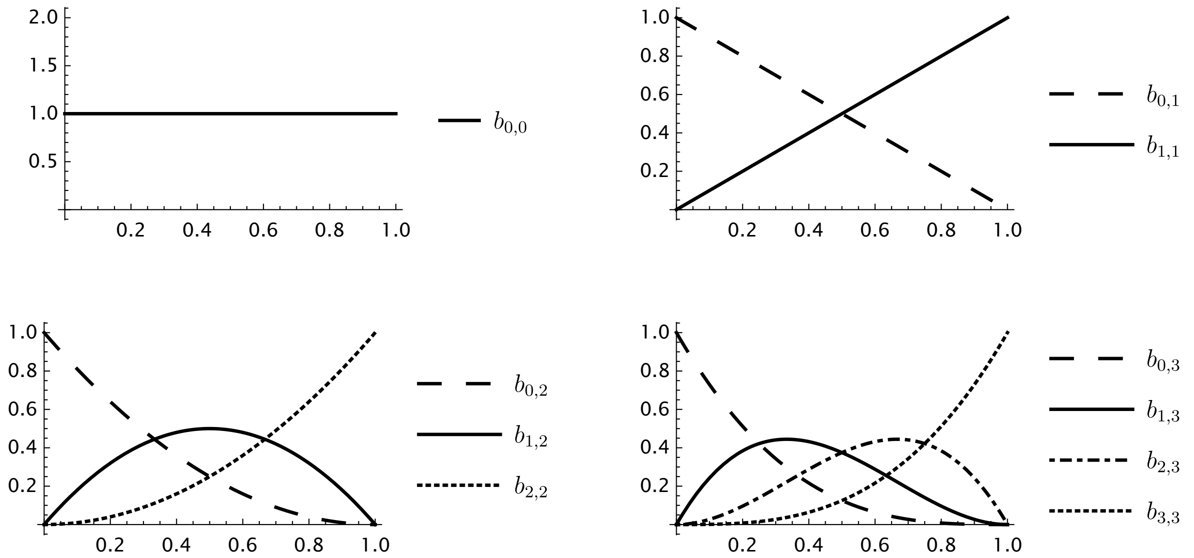

Abbildung 1.1. Bernstein-Grundpolynome $b_{\nu,n}$, $\nu = 0, \dots, n$, $n = 0, 1, 2, 3$.

Der n-te *Bernstein-Operator* $B_n : C[0,1] \to \Pi_n$ ist definiert durch $B_n f(t) = \sum_{\nu=0}^n f\left(\frac{\nu}{n}\right) b_{\nu,n}(t)$. Dieser Operator ordnet einer Funktion $f \in C[0,1]$ ein algebraisches Polynom $B_n f \in \Pi_n$ zu. Die Notation $B_n f(t)$ ist hierbei als $(B_n f)(t)$ zu verstehen: Das Polynom $p := B_n f \in \Pi_n$ wird an der Stelle t ausgewertet, also der Wert $p(t)$ berechnet. Insbesondere gilt für das Monom m_0, $m_0(t) := 1$, $t \in \mathbb{K}$, trivialerweise $m_0 \in C[0,1]$ sowie $B_n m_0 \in \Pi_n$. Aufgrund des Binomischen Lehrsatzes erhalten wir

$$B_n m_0(t) = \sum_{\nu=0}^n b_{\nu,n}(t) = (t + (1-t))^n = 1 = m_0(t)\,,\ t \in \mathbb{K}\,.$$

Beim Bernstein-Operator wird f an $n+1$ Stellen $\frac{\nu}{n}$, $\nu = 0, \dots, n$, abgetastet/ausgewertet und mit nichtnegativen Gewichten $b_{\nu,n}$ versehen, deren Summe für jedes $t \in \mathbb{K}$ den Wert 1 ergibt. Eine naheliegende Frage ist daher, wie „gut" die Approximation von f durch dessen Näherung $B_n f$ ist, welche Größenordnung $\|f - B_n f\|$ hat und wie das asymptotische Verhalten von $B_n f$ bzw. $\|f - B_n f\|$ für $n \to \infty$ ist für eine auf $C[0,1]$ definierte Norm.

2. Für $f \in C[a,b]$, $a < b$, ist I, $If := \int_a^b f(t)\,dt$, ein lineares Funktional. Zu vorgegeben paarweise verschiedenen Stützstellen $t_1, \dots, t_n \in [a,b]$ und Gewichten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, ist eine Quadraturformel $Q_n : C[a,b] \to \mathbb{R}$, $Q_n f := \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu f(t_\nu)$, ebenfalls ein lineares Funktional

[6] Bernstein, Sergei Natanowitsch (22.2.$^{jul.}$/5.3.^{greg}1880-26.10.1968) russischer Mathematiker; andere Schreibweise: Sergej Natanovič Bernštejn.

[7] In der Literatur wird statt „Grundpolynom" oft auch der Ausdruck „Basispolynom" benutzt um anzudeuten, dass diese Polynome Basiselemente von Π_n sind. Da in diesem Text jedoch nicht immer polynomiale Teilräume zugrunde liegen, benutzen wir stattdessen den Ausdruck „Grundpolynom".

auf $C[a, b]$. Eine zentrale Frage der numerischen Integration ist die Untersuchung von Quadraturformeln im Hinblick darauf, wie „gut“ Q_n das Funktional I approximiert, also wie sich das Fehlerfunktional $I - Q_n$ bzw. dessen (Operator-)Norm (siehe die nachfolgende Definition 1.2.3, 2.) und analog der Quadraturfehler $If - Q_n f$ sich für $n \to \infty$ qualitativ verhalten.

✠

Definition 1.2.3. Seien X, Y normierte lineare Räume, $T : X \to Y$ ein Operator.

1. T heißt beschränkt, falls es ein $M > 0$ gibt mit $\|Tx\| \leq M\|x\|$ für alle $x \in X$.

2. Ist T beschränkt, so heißt das kleinstmögliche M, für das $\|Tx\| \leq M\|x\|$ für alle $x \in X$ gilt, *(Operator-)Norm* von T und wird mit $\|T\|$ bezeichnet.

3. T heißt *stetig* in $x^\star \in X$, wenn für jede Folge $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x^\star$ (Konvergenz in X) gilt $\lim_{\nu\to\infty} Tx_\nu = Tx^\star$ (Konvergenz in Y).

4. T heißt *stetig* auf X, wenn T stetig ist für alle $x \in X$.

Man beachte, dass in der Ungleichung $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ drei eventuell verschiedene Normen vorkommen: Die Norm in X bzw. Y sowie die Operatornorm. Um letztere für beschränkte lineare Operatoren zu berechnen, kann man sich die folgenden Beziehungen zunutze machen (Beweis als Übung):

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| .$$

Sofern Verwechselungen ausgeschlossen sind, werden wir die Schreibweise für die verschiedenen Normen nicht gesondert unterscheiden. Werden X, Y mit derselben Norm versehen, beispielweise durch $\|\cdot\|_p$, werden wir für die Operatornorm dieselbe Normbezeichnung verwenden, also in diesem Falle $\|T\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

Der folgende Satz sagt aus, dass ein *linearer* Operator bereits dann auf X stetig ist, wenn er in einem Element $x \in X$ stetig ist oder wenn er beschränkt ist, d.h. in diesem Falle sind insbesondere die Begriffe „Beschränktheit“ und „Stetigkeit“ identisch.

Satz 1.2.4. *Seien X, Y normierte lineare Räume, $L : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann gilt:*

1. *L ist genau dann stetig auf X, wenn er in einem Element $x \in X$ stetig ist.*

2. *L ist genau dann stetig auf X, wenn er beschränkt ist.*

Beweis.

Zu 1.: Ist L auf X stetig, so insbesondere auch in dem Element $x \in X$. Ist umgekehrt L in einem Element $x \in X$ stetig und $y \in X$ beliebig, so wähle man eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, mit $y_n \to y$, $n \to \infty$. Für die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n := y_n - y + x$, gilt $x_n \to x$, $n \to \infty$. Aufgrund der Linearität von L und der Stetigkeit in x erhalten wir

$$Ly_n = L(x_n + y - x) = Lx_n + Ly - Lx \to Lx + Ly - Lx = Ly, \quad n \to \infty,$$

also die Stetigkeit in y. Da y beliebig war, folgt somit die Stetigkeit von L auf ganz X.

Zu 2.: Der lineare Operator L sei stetig. Angenommen, er sei unbeschränkt. Dann existiert eine Folge $(x_n \in X)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $\|Lx_n\| > n\|x_n\|$, $n \in \mathbb{N}$. Für $y_n := \frac{x_n}{n\|x_n\|} \in X, n \in \mathbb{N}$ gilt $\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$, sowie

$$\|Ly_n\| = \frac{\|Lx_n\|}{n\|x_n\|} > 1, \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Da L in $0 \in X$ stetig ist, gilt $Ly_n \to L0 = 0 \in Y$. Dies ist aber ein Widerspruch, die Annahme ist also falsch und L ist somit beschränkt.

Sei umgekehrt L beschränkt mit einer Schranke $M > 0$. Für eine Nullfolge $(x_n \in X)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt aus $\|Lx_n\| \leq M\|x_n\|$ auch $Lx_n \to 0 = L0 \in Y$. Also ist L in $0 \in X$ und wegen der bereits bewiesenen ersten Aussage auf ganz X stetig.

□

Aus Satz 1.2.4 erhalten unmittelbar das folgende Korollar:

Korollar 1.2.5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.2.4 gilt: Ein* linearer *Operator $L : X \to Y$ ist genau dann* stetig, *wenn er beschränkt ist.*

Beispiele 1.2.6.

1. Seien I eine kompakte Menge mit $t_1, \dots, t_m \in I$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ sowie $f \in C(I)$. Dann ist L,

$$Lf := \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu f(t_\nu)\,,$$

ein stetiges lineares Funktional mit

$$\|L\| = \sum_{\nu=1}^{m} |\alpha_\nu| = \|\alpha\|_1\,, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T\,.$$

2. Seien I ein kompaktes Intervall, $w \in C(I)$ und $Lf := \int_I f(t)w(t)\,dt$. Dann ist L ein lineares Funktional auf $(C(I), \|\cdot\|)$ mit

$$\|L\| = \int_I |w(t)|\,dt \;= \|w\|_{L_1(I)}.$$

✠

Im Falle $Y = \mathbb{K}$ nennt man den Operator L auch ein *Funktional*. Man kann zeigen, dass gilt:
Sei X ein normierter linearer Raum. Die Menge der beschränkten linearen Funktionale $L : X \to \mathbb{K}$ bildet einen Dualraum X'. Mittels der Operatornorm wird dieser zu einem normierten Raum. Ist X vollständig, so auch X' [20, S. 96, Satz 10.4]. Letztere Aussage ist wieder bei den Betrachtungen asymptotischer Aussagen nützlich.

Lemma 1.2.7. *Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, V ein linearer Teilraum von X sowie $L \in X'$ mit $\|L\| = 1$ und $Lv = 0$ für alle $v \in V$. Dann gilt $E_V(x) \geq |Lx|$ für alle $x \in X$.*

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} |Lx| &= |Lx - \underbrace{Lv}_{=0}| = |L(x-v)| \\ &\leq \underbrace{\|L\|}_{=1} \|x-v\| = \|x-v\| \end{aligned}$$

für alle $x \in X,\ v \in V$ folgt die Behauptung unmittelbar. □

In den Beispielen 1.2.2 haben wir einige Möglichkeiten aufgezeigt, wie man Approximationsverfahren konstruieren kann. Der dabei auftretende Parameter n charakterisiert im gewissen Maße die Dimension des Raumes V; für wachsendes n wird man daher erwarten, dass V zunehmend „dichter" in X liegt und so bessere Approximationen erhalten werden können, die im Idealfall gegen f konvergieren. Dies formulieren wir etwas genauer:

Definition 1.2.8. Ein *Approximationsverfahren* in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist eine Folge $(L_n : X \to X)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Operatoren mit der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} \|x - L_n x\| = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in X\,.$$

Die Differenz $x - L_n x$ wird als n-ter *Approximationsfehler* bezeichnet.

Wir behandeln im Folgenden *lineare* Approximationsverfahren, d.h. dass die Operatoren L_n linear sind. Unter diesen sind besonders die *positiven* linearen Operatoren von Interesse:

Definition 1.2.9. Ein linearer Operator $L : X \to X$, $X \in \{C[a,b], C_T\}$, $T > 0$, $a < b \in \mathbb{R}$, heißt *positiv*, wenn für alle $f, g \in X$ mit $f(t) \leq g(t)$ folgt $Lf(t) \leq Lg(t)$. Hierbei ist $Lf(t)$ zu interpretieren als $(Lf)(t)$ für alle $t \in [a,b]$ bzw. $t \in [0,T]$.

Positive lineare Operatoren übertragen also Monotonierelationen vom Originalraum auf den Bildraum. Man überlegt sich, dass für solche Operatoren L und $g, h \in X$ auch die Implikation $|g(t)| \leq h(t)$ für alle $t \Rightarrow |Lg|(t) \leq Lh(t)$ für alle t gilt, $t \in [a,b]$ bzw. $t \in [0,T]$.

Satz 1.2.10. *Ein positiver linearer Operator $L : X \to X$, $X \in \{C[a,b], C_T\}$, $T > 0$, $a < b \in \mathbb{R}$, ist stets beschränkt mit $\|L\|_\infty = \|Lm_0\|_\infty$, wobei $m_0(t) := 1$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Wir beweisen den Satz für $X = C[a,b]$: Der Fall $X = C_T$ verläuft analog, wenn man die Supremumsnorm über das Intervall $[0,T)$ zugrunde legt.

Für $f \in C[a,b]$ gilt $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ und wegen der Übertragung der Monotonierelation auf den Bildraum auch

$$-L|f|(t) \leq Lf(t) \leq L|f|(t)$$

für alle $t \in [a,b]$. Mit $|f(t)| \leq \|f\|_\infty = \|f\|_\infty m_0(t)$ erhalten wir wegen der Positivität von L

$$L|f|(t) \leq L(\|f\|_\infty m_0)(t) = \|f\|_\infty\, Lm_0(t)$$

und somit

$$\|Lf\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |Lf(t)| \leq \|f\|_\infty \|Lm_0\|_\infty\,.$$

Daher gilt

$$\|L\|_\infty = \max_{f\neq 0} \frac{\|Lf\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \|Lm_0\|_\infty\,.$$

Wegen $Lm_0 \in C[a,b]$ ist $\|Lm_0\|_\infty < \infty$. Aus der Linearität und Beschränktheit von L folgt $\|Lf\|_\infty \leq \|L\|_\infty \|f\|_\infty$ für alle $f \in X$, also insbesondere auch $\|Lm_0\|_\infty \leq \|L\|_\infty \|m_0\|_\infty = \|L\|_\infty$. Somit erhalten wir insgesamt $\|L\|_\infty = \|Lm_0\|_\infty$. □

Beispiel 1.2.11. Der n-te Bernstein-Operator B_n ist positiv und linear. Aufgrund von Beispiel 1.2.2, 1., gilt $B_n m_0 = m_0$ und daher $\|B_n\|_\infty = \|B_n m_0\|_\infty = 1$. Somit ist $\|B_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ für alle $f \in C[a,b],\ n \in \mathbb{N}_0$. ✠