Marcinkiewicz-Zygmund, Riesz-Thorin und die Heisenberggruppe

Frank Filbir
Institut für Biomathematik und Biometrie
Helmholtz-Zentrum München
filbir@helmholtz-muenchen.de

Die Ungleichung von Marcinkiewicz-Zygmund lautet folgendermaßen

$$c\Big(\int_0^{2\pi}|P(x)|^p\,d\mu(x)\Big)^{1/p}\leq\Big(\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}|P(x_k)|^p\Big)^{1/p}\leq C\,\Big(\int_0^{2\pi}|P(x)|^p\,d\mu(x)\Big)^{1/p},$$

wobei P ein trigonometrisches Polynom vom Höchstgrad n, $d\mu(x)=\frac{1}{2\pi}dx$, $1\leq p\leq\infty$, $m\geq 2n$ und $x_k=\frac{2\pi}{m+1}k,\ k=0,\dots m$ ist. Diese Ungleichung spielt eine zentrale Rolle bei der Untersuchung von Interpolationsprozessen, der Herleitung von Quadraturformeln etc. Sie wurde daher in vielerlei Hinsicht verallgemeinert. So wurden diese Ungleichungen für verschiedene orthogonale Polynomsysteme und andere orthogonale Systeme studiert. Gewöhnlich beweist man hierbei zunächst den L^1- und den L^∞-Fall. Die Fälle $1<p<\infty$ folgen dann aus dem Interpolationssatz von Riesz-Thorin.
Moment..... ! Stimmt das überhaupt? Kann man den Interpolationssatz so einfach anwenden? Tatsächlich lauert hier Gefahr! Der Vortrag befasst sich mit der Frage, wie man das Resultat auf die L^p-Räume, $1<p<\infty$, erweitern kann.