Berechnung sphärischer Mittelwerte

Torsten Görner
Universität Osnabrück

Moderne bildgebende Verfahren wie die Computertomographie oder die fotoakustische Tomographie sind aus der biomedizinischen Forschung nicht mehr wegzudenken. Während die gewöhnliche Radontransformation ein Modell der zweidimensionalen Computertomographie ist, werden wir die sphärische Radontransformation oder mit anderen Worten den sphärischen Mittelwertoperator untersuchen, welcher unter passenden Zusatzannahmen ein geeignetes Modell für die dreidimensionale fotoakustische Tomographie ist. Wir betrachten die folgende Aufgabenstellung. Für stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definieren wir den sphärischen Mittelwertoperator $\mathcal{M} : C(\mathbb{R}^d) \to C(\mathbb{R}^{d+1})$ durch

$$(\mathcal{M}f)(\mathbf{y}, r) := \frac{1}{\omega_{d-1}} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\mathbf{y} + r\mathbf{x}) \mathrm{d}\sigma(\mathbf{x}).$$

Dieser Operator ordnet Funktionen ihre Mittelwerte über $(d-1)$-dimensionale Sphären $\mathbb{S}^{d-1} := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\|_2 = 1\right\}$ zu. Unser Ziel ist die Herleitung und Bewertung verschiedener Möglichkeiten zur effizienten und approximativen Berechnung der Mittelwerte von stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, die durch Abtastwerte auf einem Gitter gegeben sind. Eine naheliegende Variante ist die Verwendung einer Quadraturformel zur numerischen Lösung des Integrals, wobei wir die Funktion f durch eine Treppenfunktion approximieren. Schwerpunkt dieses Vortrages ist eine weitere Variante, die wir mit Mitteln der Fourieranalysis entwickeln. Dabei verwenden wir als zentrale Aussage, dass die Mittelwerte einer Fourierreihe durch Multiplikation der Fourierkoeffizienten mit Besselfunktionen berechnet werden können, das heißt es gilt

$$(\mathcal{M}f)(\mathbf{y}, r) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_{\mathbf{z}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \mathcal{J}_{\frac{d}{2}-1}\left(2\pi r |\mathbf{z}|\right)}{\left(\pi r |\mathbf{z}|\right)^{\frac{d}{2}-1}} \cdot \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}}, \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}_{\mathbf{z}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \mathbf{z} \cdot \mathbf{x}}, \quad \hat{f}_{\mathbf{z}} \in \mathbb{C}.$$

Um eine solche Reihendarstellung zu erhalten, werden wir die Funktion durch ihre trigonometrische Interpolante, deren Koeffizienten uns die diskrete Fouriertransformation liefert, approximieren. Eine effiziente Implementierung dieser Variante der Berechnung sphärischer Mittelwerte kann durch Verwendung der Softwarebibliotheken NFFT[1] und Sparse FFT[2, 3] erhalten werden. Im letzten Teil des Vortrags vergleichen wir die hergeleiteten Algorithmen bezüglich ihrer Approximationsgüte und Laufzeiten. Dazu nutzen wir Ergebnisse aus theoretischen Betrachtungen und zahlreichen numerischen Tests.

Literatur

[1] J. Keiner, S. Kunis, and D. Potts. Using NFFT3 - a software library for various nonequispaced fast Fourier transforms. *ACM Trans. Math. Software*, 36:Article 19, 1 – 30, 2009.

[2] I. Melzer. Schnelle Fourier-Transformation für dünne Daten. Diplomarbeit, Technische Universität Chemnitz, 2010.

[3] L. Ying. Sparse Fourier transform via butterfly algorithm. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(3):1678–1694, 2009.