

Adaptive Frame-Verfahren für nicht-lineare elliptische Operatorgleichungen

Jens Kappel

Philipps-Universität Marburg

In den vergangenen Jahren haben sich Wavelets in verschiedenen Bereichen als sehr nützliches mathematisches Hilfsmittel erwiesen. Im Rahmen der Behandlung elliptischer Operatorgleichungen $\mathcal{L}u = f$ auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konnten adaptive numerische Verfahren mit optimaler Konvergenzordnung entwickelt werden. Die zur Diskretisierung der Operatorgleichung erforderliche Konstruktion einer Wavelet-Basis auf Ω bleibt jedoch weiterhin problembehaftet, da vorhandene Ansätze oftmals zu technischen Schwierigkeiten wie z.B. relativ hohen Konditionszahlen führen.

Eine Alternative zur Verwendung von Wavelet-Basen sind so genannte Wavelet-Frames, d.h. Wavelet-Systeme, die eine i.A. nicht eindeutige Darstellung erlauben und deren Konstruktion vergleichsweise einfach ist. Für lineare elliptische Operatorgleichungen sind hiermit ermutigende Ergebnisse erzielt worden (z.B. [4, 5]).

Der Vortrag beschäftigt sich mit der Übertragung dieses Frame-Ansatzes auf nicht-lineare elliptische Operatorgleichungen der Form $\mathcal{L}u + \mathcal{G}(u) = f$. Ihre Diskretisierung mit Hilfe von Wavelet-Frames führt auf ein biinfinites nicht-lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{f},$$

dessen eindeutige Lösung im Bild von \mathbf{A} durch eine gedämpfte Richardson-Iteration approximiert werden kann. Im Mittelpunkt des Vortrages steht dabei die numerische Auswertung der Nichtlinearität $\mathbf{G}(\mathbf{u})$. Es wird skizziert, dass es die Verwendung eines speziellen Wavelet-Frames ermöglicht, die für Wavelet-Basen vorhandenen Ansätze von Cohen, Dahmen und DeVore ([2, 3]) sowie Barinka ([1]) auf Wavelet-Frames zu übertragen. Dies führt auf ein adaptives Wavelet-Frame-Verfahren zur Approximation der Lösung \mathbf{u} , dessen Optimalität nachgewiesen werden kann.

Literatur

- [1] A. Barinka, *Fast computation tools for adaptive wavelet schemes*, Ph.D. thesis, RWTH Aachen, 2005.
- [2] A. Cohen, W. Dahmen, and R. DeVore, *Adaptive wavelet schemes for nonlinear variational problems*, SIAM J. Numer. Anal. **41** (2003), no. 5, 1785–1823.
- [3] ———, *Sparse evaluation of compositions of functions using multiscale expansions*, SIAM J. Math. Anal. **35** (2003), no. 2, 279–303.
- [4] S. Dahlke, M. Fornasier, and T. Raasch, *Adaptive frame methods for elliptic operator equations*, Adv. Comput. Math. **27** (2007), no. 1, 27–63.
- [5] R. Stevenson, *Adaptive solution of operator equations using wavelet frames*, SIAM J. Numer. Anal. **41** (2003), no. 3, 1074–1100.