Schnelle Fourier-Transformation für dünne Daten

Ines Melzer
Universität Osnabrück

Die Auswertung eines trigonometrischen Polynoms, gegeben durch seine Fourier-Koeffizienten an endlich vielen Abtaststellen ist eine grundlegende Aufgabe der numerischen Mathematik. Für ein trigonometrisches Polynom vom Grad $N = 2^L$, $L \in \mathbb{N}$, und äquidistante Abtaststellen kann dies mit der schnellen Fourier-Transformation (FFT) in $\mathcal{O}(N \log N)$ Gleitkommaoperation realisiert werden. Sind aber nun weiterhin viele der gegebenen Fourier-Koeffizienten Null und ist die Anzahl der Abtaststellen klein, so zieht die FFT daraus keinen wesentlichen weiteren Vorteil, siehe auch [1]. Des Weiteren ist die FFT nur für äquidistante Abtaststellen im Zeit- und Frequenzbereich anwendbar. Wir betrachten jedoch im d-dimensionalen, $d \geq 2$, beliebige Abtaststellen

$$\widetilde{\Omega} = \{\boldsymbol{\xi}_k : k = 1, \ldots, M_2\} \subset [0, N]^d, \quad M_2 = \mathcal{O}(N^{d-1}),$$

$$\widetilde{X} = \{\mathbf{x}_j : j = 1, \ldots, M_1\} \subset [0, N]^d, \quad M_1 = \mathcal{O}(N^{d-1}),$$

die auf $(d-1)$-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeiten gegeben sind. Ziel ist die Auswertung der Funktion

$$u : [0, N]^d \to \mathbb{C}, \qquad u(\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}_k \in \widetilde{\Omega}} f_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \boldsymbol{\xi}_k \cdot \mathbf{x}/N}, \tag{1}$$

die durch ihre auf den Abtaststellen $\boldsymbol{\xi}_k \in \widetilde{\Omega}$ gegebenen Fourier-Koeffizienten $f_k \in \mathbb{C}$ definiert ist, in den Abtaststellen $\widetilde{X}$. Die direkte Auswertung der Funktion u bedarf $\mathcal{O}(N^{2d-2})$ viele Gleitkommaoperationen. Für die Entwicklung einer schnelleren Methode zur Auswertung der Funktion u betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall und entwickeln auf der Grundlage von [2] mit dem sogenannten Butterflyschema einen schnellen approximativen Algorithmus, der die Funktion (1) in den gewünschten Stellen in $\mathcal{O}(N \log N)$ Gleitkommaoparationen auswertet. Dazu nutzen wir aus, dass sich der Fourier-Kern $e_N : [a_0, a_1] \times [b_0, b_1] \to \mathbb{C}$, $e_N(x, \xi) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \xi x/N}$, unter der Zulässigkeitsbedingung $(a_1 - a_0)(b_1 - b_0) \leq N$ durch eine geeignete Interpolation mit festen Frequenzen $\beta_s \in [b_0, b_1]$, $s = 0, \ldots, p-1$, als Niedrigrangapproximation

$$\left| \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \xi x/N} - \sum_{s=0}^{p-1} f_s \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \beta_s x/N} \right| \leq \varepsilon$$

darstellen lässt. Wir übertragen das Verfahren auf den d-dimensionalen Fall und erhalten die Komplexität $\mathcal{O}(N^{d-1} \log N)$. Des Weiteren betrachten wir neben der arithmetischen Komplexität die Fehlerabschätzung und die numerische Stabilität verschiedener Varianten.

Literatur

[1] M. Frigo and S. G. Johnson. Pruned FFTs. http://www.fftw.org/pruned.html.

[2] L. Ying. Sparse Fourier transform via butterfly algorithm. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(3):1678–1694, 2009.