

# Parametrische Statistik

Prof. Dr. W. Bischof und Prof. Dr. F. Pukelsheim

Version: 14.01.2020



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Beschreibende Statistik und Mathematische Statistik</b>	<b>9</b>
1.1 Deskriptive Statistik und induktive Statistik . . . . .	10
1.2 Empirische Kennzahlen und Boxplots . . . . .	10
1.3 Empirische Verteilung . . . . .	14
1.4 Quantile, Erwartungswert und Varianz . . . . .	15
1.5 Grundannahme der Mathematischen Statistik . . . . .	30
1.6 Statistische Räume und Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	32
1.7 Tschebychev-Ungleichung . . . . .	32
1.8 Schwaches Gesetz der großen Zahlen, mit Markov-Bedingung .	33
1.9 Schwaches Gesetz der großen Zahlen im u.i.v. Fall . . . . .	34
1.10 Lemmata zur stochastischen Unabhängigkeit . . . . .	34
1.11 Kolmogorov-Ungleichung . . . . .	35
1.12 Starkes Gesetz der großen Zahlen mit Kolmogorov-Bedingung .	36
1.13 Borel-Gesetz der großen Zahlen . . . . .	38
1.14 Borel-0-1-Gesetz . . . . .	39
1.15 Kolmogorov-Gesetz der großen Zahlen im u.i.v. Fall . . . . .	39
1.16 Chinchin-Gesetz der großen Zahlen im u.i.v. Fall . . . . .	41
1.17 Varianzschätzer . . . . .	41
1.18 Konvergenz der empirischen Verteilungsfunktion . . . . .	42
1.19 Satz von Glivenko-Cantelli . . . . .	42
1.20 Stochastische Ordnung . . . . .	43
1.21 Satz von Kolmogorov-Smirnov . . . . .	44
1.22 Unendlicher und endlicher Stichprobenumfang . . . . .	45
1.23 Statistiken und Verteilungsfamilien . . . . .	45
<b>Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 1</b>	<b>47</b>
<b>2 Normalverteilungsmodelle</b>	<b>65</b>
2.1 Erwartungswertvektor und Streuungsmatrix . . . . .	66
2.2 Rechenregeln für Erwartungswertvektor und Streuungsmatrix .	70
2.3 Kovarianzmatrix von Zufallsvektoren . . . . .	70

2.4	Existenz der Streuungsmatrix . . . . .	71
2.5	Träger der Verteilung . . . . .	71
2.6	Multinomialverteilung . . . . .	72
2.7	Multivariate Normalverteilung . . . . .	73
2.8	Hauptsatz zur multivariaten Normalverteilung . . . . .	76
2.9	Stochastische Unabhängigkeit und Dichten . . . . .	82
2.10	Stoch. Unabh. und Unkorreliertheit bei multivariater Normalvtlg. . . . .	83
2.11	Affine Transformationen der multivariaten Normalverteilung . . . . .	85
2.12	Verteilung von Stichprobendurchschnitt und -varianz . . . . .	87
2.13	Faltungslemma . . . . .	89
2.14	Studentsche $t$ -Verteilung . . . . .	90
2.15	Satz von Student . . . . .	91
2.16	Fishersche $F$ -Verteilung . . . . .	92
2.17	Erwartungswerte und Varianzen kontinuierlicher Verteilungen . . . . .	92
2.18	Einstichprobenproblem mit Normalverteilungsannahme . . . . .	93
2.19	Zweistichprobenproblem mit Normalverteilungsannahme . . . . .	94
<b>Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 2</b>		<b>97</b>
<b>3 Dominierte Verteilungsfamilien u. Maximum-Likelihood-Schätzer</b>		<b>117</b>
3.1	Satz von Radon/Nikodym . . . . .	119
3.2	Nullmengen und Dominiiertheit . . . . .	120
3.3	Dominierte Verteilungsfamilien . . . . .	120
3.4	Parametrische Verteilungsfamilien . . . . .	121
3.5	Wechsel des dominierenden Maßes . . . . .	121
3.6	Äquivalente Maße und Äquivalenz von Verteilungsfamilien . . . . .	122
3.7	Charakterisierung der Dominiiertheit . . . . .	123
3.8	Totalvariationsmetrik . . . . .	123
3.9	Stetige Parametrisierung und Dominiiertheit . . . . .	124
3.10	Totalvariationsmetrik und Dichten . . . . .	125
3.11	Lemma von Scheffé . . . . .	125
3.12	Klassische Verteilungsfamilien . . . . .	126
3.13	Existenz produktmessbarer Dichten . . . . .	127
3.14	Likelihood-Funktion . . . . .	128
3.15	Maximum-Likelihood-Schätzer . . . . .	129
3.16	Beispiele von Maximum-Likelihood-Schätzern . . . . .	130
3.17	Bijektive Reparametrisierung . . . . .	134
3.18	Nicht dominierte Familien . . . . .	135
3.19	Verbesserung der Tschebychev-Ungleichung . . . . .	135
3.20	Drei-Sigma-Regel . . . . .	138
3.21	Suffiziente Statistiken . . . . .	143

**Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 3 147**

**4 Einseitige Tests in einpar. Vtlgsfam. mit isot. Dichtequotienten 165**

4.1 Statistische Tests . . . . . 167

4.2 Gaußtests: Ein- und zweiseitige Problemstellungen . . . . . 167

4.3 Randomisierte Tests . . . . . 168

4.4 Konvexität der Menge aller Tests . . . . . 170

4.5 Gütefunktion eines Tests . . . . . 170

4.6 Gaußtests: Verfahren und Gütefunktionen . . . . . 171

4.7  $\alpha$ -Niveau Tests . . . . . 177

4.8 Zwei Beispiele für  $\alpha$ -Niveau Gauß-Tests . . . . . 178

4.9 Gleichmäßig-optimaler  $\alpha$ -Niveau Test . . . . . 180

4.10 Grundproblem der Testtheorie . . . . . 180

4.11 Der Dichtequotient als Quotient beliebiger Dichten . . . . . 181

4.12 Existenz und Eindeutigkeit des Dichtequotienten . . . . . 181

4.13 Neyman/Pearson-Fundamentallemma . . . . . 183

4.14 Einseitiger Binomialtest . . . . . 188

4.15 Einseitiger Gauß-Test . . . . . 189

4.16 Einseitiger  $\chi^2$ -Test . . . . . 190

4.17 Familien mit isotonem Dichtequotient . . . . . 191

4.18  $\alpha$ -ähnliche Tests . . . . . 192

4.19 Optimalität einseitiger Tests . . . . . 193

4.20 Stochastisch geordnete Verteilungsfamilien . . . . . 196

4.21 Stochastische Ordnung bei isotonem Dichtequotienten . . . . . 196

4.22 Einseitiger  $\chi^2$ -Test zum Prüfen der Varianz im N.vtlgs.modell . 197

4.23 Einseitiger F-Test zum Vgl. zweier Varianzen im N.vtlgs.modell 198

4.24 Einseitiger  $t$ -Test zum Prüfen des Erw.werts im N.vtlgs.modell 200

4.25  $\chi^2$ -Test zum Vergleich von  $k$  Erw.werten im N.vtlgs.modell . . 202

4.26 F-Test zum Vergleich von  $k$  Erw.werten im N.vtlgs.modell . . . 203

4.27  $p$ -Wert . . . . . 204

**Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 4 207**

**5 Einparam. exponentielle Verteilungsfam. und zweiseitige Tests 219**

5.1 Zweiseitige Testprobleme . . . . . 221

5.2 Unverfälschte  $\alpha$ -Niveau Tests . . . . . 221

5.3 Zweiseitige Testprobleme in einparametrischen Verteilungsfamilien . . . . . 221

5.4 Lokal-unverfälschte  $\alpha$ -ähnliche Tests . . . . . 222

5.5  $L^1$ -differenzierbare Verteilungsfamilien . . . . . 222

5.6 Differenzierbarkeit der Gütefunktionen . . . . . 223

5.7	Faustregel für die $L^1$ -Ableitung . . . . .	225
5.8	Restriktionsmenge . . . . .	226
5.9	Verallgemeinertes Fundamentallemma . . . . .	226
5.10	Schwache Folgenkompaktheit . . . . .	228
5.11	Existenzsatz . . . . .	229
5.12	Zweiseitiger Gauß-Test zum Prüfen eines Erwartungswerts . . .	229
5.13	Exponentielle Verteilungsfamilien . . . . .	231
5.14	Beispiele für exponentielle Verteilungsfamilien . . . . .	232
5.15	Analytische Eigenschaften exponentieller Familien . . . . .	233
5.16	Isotonie der Gütefunktion in einseitigen Tests . . . . .	236
5.17	Optimalität zweiseitiger Tests in expon. Verteilungsfamilien . .	238
5.18	Opt. zweiseitiger Test bei symm. Verteilung der Teststatistik .	242
5.19	Optimaler zweiseitiger Binomial-Test . . . . .	242
<b>Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 5</b>		<b>245</b>
<b>6</b>	<b>Schätzbereiche und Punktschätzungen</b>	<b>259</b>
6.1	Schätzprobleme . . . . .	261
6.2	Bereichsschätzer . . . . .	261
6.3	Gütefunktion für beispielhafte Bereichsschätzer . . . . .	262
6.4	$\alpha$ -Niveau Bereichsschätzer . . . . .	264
6.5	Zusammenhang zwischen Bereichsschätzern und Tests . . . . .	266
6.6	Konfidenzintervalle für $\mu$ im Normalverteilungsmodell . . . . .	268
6.7	Konfidenzschranken . . . . .	269
6.8	Konfidenzintervalle . . . . .	270
6.9	Punktschätzer . . . . .	273
6.10	Erwartete quadratische Abweichung . . . . .	273
6.11	Erwartungstreue . . . . .	274
6.12	Konkurrierende Optimalitätskonzepte . . . . .	274
6.13	Biaskorrektur . . . . .	276
6.14	UMVU-Schätzer . . . . .	276
6.15	Orthogonalitätskriterium . . . . .	277
6.16	UMVU-Schätzer in exponentiellen Familien . . . . .	279
6.17	UMVU-Schätzer im Normalverteilungsmodell . . . . .	281
6.18	Cramér/Rao-Ungleichung . . . . .	282
6.19	Motivation für $L^2$ -differenzierbare Verteilungsfamilien . . . . .	283
6.20	$L^2$ -differenzierbare Familien . . . . .	284
6.21	Differenzierbarkeitshierarchie . . . . .	285
6.22	Informationsungleichung in $L^2$ -differenzierbaren Familien . . . .	286
6.23	$L^2$ -Differenzierbarkeit und Exponentialität . . . . .	287

**Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 6 289****7 Spezielle Testprobleme 305**

7.1	Zweistichproben-Binomialtest (Exakter Test von Fisher) . . . . .	306
7.2	Singuläre multivariate Normalverteilung . . . . .	313
7.3	Asymptotische Normalität der Multinomialverteilung . . . . .	314
7.4	$\chi^2$ -Test zum Prüfen der Erfolgswsk.n einer Multinomialvtlg. . . . .	318
7.5	$\chi^2$ -Test zum Prüfen der stoch. Unabh. zweier Klassifikationen . . . . .	321
7.6	$\chi^2$ -Test zum Prüfen der Symmetrie einer Vierfeldertafel . . . . .	326
7.7	$\chi^2$ -Test zum Vergleich zweier Multinomialverteilungen . . . . .	327
7.8	Kolmogorov/Smirnov-Test . . . . .	329
7.9	Cramér/von Mises-Test . . . . .	332
7.10	Normal-Scores-Test zum Prüfen einer Normalvertlgsann. . . . .	334
7.11	Approx. der mittleren Ordnungsstat. unter Normalvtlgsann. . . . .	336
7.12	QQ-Plots . . . . .	340

**Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 7 345****8 Einführung in die Statistiksoftware R 357**

8.1	Installation und Entwicklungsumgebung . . . . .	359
8.2	Hilfesystem . . . . .	360
8.3	Zusatzpakete . . . . .	360
8.4	Die erste R-Sitzung . . . . .	361
8.5	Funktionen . . . . .	362
8.6	Vektoren . . . . .	365
8.7	Selektionen aus einem Vektor . . . . .	367
8.8	Funktionen und Operatoren für Vektoren . . . . .	370
8.9	Gleichheit von Vektoren . . . . .	374
8.10	Fehlende Werte . . . . .	375
8.11	Matrizen . . . . .	377
8.12	Listen . . . . .	379
8.13	Datensätze (data frames) . . . . .	383
8.14	Faktoren und Tabellen . . . . .	389
8.15	Programmstrukturen . . . . .	395
8.16	Ein- und Ausgabe . . . . .	397
8.17	Grafiken . . . . .	402
8.18	Verteilungen und Simulation . . . . .	410
8.19	Deskriptive Statistik . . . . .	415
8.20	Tests, Konfidenzintervalle und Punktschätzungen . . . . .	423

**Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 8 427**