

Parametrische Statistik

Prof. Dr. W. Bischof und Prof. Dr. F. Pukelsheim

Version: 14.01.2020

Inhaltsverzeichnis

1 Beschreibende Statistik und Mathematische Statistik	9
1.1 Deskriptive Statistik und induktive Statistik	10
1.2 Empirische Kennzahlen und Boxplots	10
1.3 Empirische Verteilung	14
1.4 Quantile, Erwartungswert und Varianz	15
1.5 Grundannahme der Mathematischen Statistik	30
1.6 Statistische Räume und Wahrscheinlichkeitsräume	32
1.7 Tschebychev-Ungleichung	32
1.8 Schwaches Gesetz der großen Zahlen, mit Markov-Bedingung .	33
1.9 Schwaches Gesetz der großen Zahlen im u.i.v. Fall	34
1.10 Lemmata zur stochastischen Unabhängigkeit	34
1.11 Kolmogorov-Ungleichung	35
1.12 Starkes Gesetz der großen Zahlen mit Kolmogorov-Bedingung .	36
1.13 Borel-Gesetz der großen Zahlen	38
1.14 Borel-0-1-Gesetz	39
1.15 Kolmogorov-Gesetz der großen Zahlen im u.i.v. Fall	39
1.16 Chinchin-Gesetz der großen Zahlen im u.i.v. Fall	41
1.17 Varianzschätzer	41
1.18 Konvergenz der empirischen Verteilungsfunktion	42
1.19 Satz von Glivenko-Cantelli	42
1.20 Stochastische Ordnung	43
1.21 Satz von Kolmogorov-Smirnov	44
1.22 Unendlicher und endlicher Stichprobenumfang	45
1.23 Statistiken und Verteilungsfamilien	45
Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 1	47
2 Normalverteilungsmodelle	65
2.1 Erwartungswertvektor und Streuungsmatrix	66
2.2 Rechenregeln für Erwartungswertvektor und Streuungsmatrix .	70
2.3 Kovarianzmatrix von Zufallsvektoren	70

2.4	Existenz der Streuungsmatrix	71
2.5	Träger der Verteilung	71
2.6	Multinomialverteilung	72
2.7	Multivariate Normalverteilung	73
2.8	Hauptsatz zur multivariaten Normalverteilung	76
2.9	Stochastische Unabhängigkeit und Dichten	82
2.10	Stoch. Unabh. und Unkorreliertheit bei multivariater Normalvtlg.	83
2.11	Affine Transformationen der multivariaten Normalverteilung	85
2.12	Verteilung von Stichprobendurchschnitt und -varianz	87
2.13	Faltungslemma	89
2.14	Studentsche t -Verteilung	90
2.15	Satz von Student	91
2.16	Fishersche F -Verteilung	92
2.17	Erwartungswerte und Varianzen kontinuierlicher Verteilungen	92
2.18	Einstichprobenproblem mit Normalverteilungsannahme	93
2.19	Zweistichprobenproblem mit Normalverteilungsannahme	94
Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 2		97
3 Dominierte Verteilungsfamilien u. Maximum-Likelihood-Schätzer		117
3.1	Satz von Radon/Nikodym	119
3.2	Nullmengen und Dominiiertheit	120
3.3	Dominierte Verteilungsfamilien	120
3.4	Parametrische Verteilungsfamilien	121
3.5	Wechsel des dominierenden Maßes	121
3.6	Äquivalente Maße und Äquivalenz von Verteilungsfamilien	122
3.7	Charakterisierung der Dominiiertheit	123
3.8	Totalvariationsmetrik	123
3.9	Stetige Parametrisierung und Dominiiertheit	124
3.10	Totalvariationsmetrik und Dichten	125
3.11	Lemma von Scheffé	125
3.12	Klassische Verteilungsfamilien	126
3.13	Existenz produktmessbarer Dichten	127
3.14	Likelihood-Funktion	128
3.15	Maximum-Likelihood-Schätzer	129
3.16	Beispiele von Maximum-Likelihood-Schätzern	130
3.17	Bijektive Reparametrisierung	134
3.18	Nicht dominierte Familien	135
3.19	Verbesserung der Tschebychev-Ungleichung	135
3.20	Drei-Sigma-Regel	138
3.21	Suffiziente Statistiken	143

Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 3 147

4 Einseitige Tests in einpar. Vtlgsfam. mit isot. Dichtequotienten 165

4.1 Statistische Tests 167

4.2 Gaußtests: Ein- und zweiseitige Problemstellungen 167

4.3 Randomisierte Tests 168

4.4 Konvexität der Menge aller Tests 170

4.5 Gütefunktion eines Tests 170

4.6 Gaußtests: Verfahren und Gütefunktionen 171

4.7 α -Niveau Tests 177

4.8 Zwei Beispiele für α -Niveau Gauß-Tests 178

4.9 Gleichmäßig-optimaler α -Niveau Test 180

4.10 Grundproblem der Testtheorie 180

4.11 Der Dichtequotient als Quotient beliebiger Dichten 181

4.12 Existenz und Eindeutigkeit des Dichtequotienten 181

4.13 Neyman/Pearson-Fundamentallemma 183

4.14 Einseitiger Binomialtest 188

4.15 Einseitiger Gauß-Test 189

4.16 Einseitiger χ^2 -Test 190

4.17 Familien mit isotonem Dichtequotient 191

4.18 α -ähnliche Tests 192

4.19 Optimalität einseitiger Tests 193

4.20 Stochastisch geordnete Verteilungsfamilien 196

4.21 Stochastische Ordnung bei isotonem Dichtequotienten 196

4.22 Einseitiger χ^2 -Test zum Prüfen der Varianz im N.vtlgs.modell . 197

4.23 Einseitiger F-Test zum Vgl. zweier Varianzen im N.vtlgs.modell 198

4.24 Einseitiger t -Test zum Prüfen des Erw.werts im N.vtlgs.modell 200

4.25 χ^2 -Test zum Vergleich von k Erw.werten im N.vtlgs.modell . . 202

4.26 F-Test zum Vergleich von k Erw.werten im N.vtlgs.modell . . . 203

4.27 p -Wert 204

Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 4 207

5 Einparam. exponentielle Verteilungsfam. und zweiseitige Tests 219

5.1 Zweiseitige Testprobleme 221

5.2 Unverfälschte α -Niveau Tests 221

5.3 Zweiseitige Testprobleme in einparametrischen Verteilungsfamilien 221

5.4 Lokal-unverfälschte α -ähnliche Tests 222

5.5 L^1 -differenzierbare Verteilungsfamilien 222

5.6 Differenzierbarkeit der Gütefunktionen 223

5.7	Faustregel für die L^1 -Ableitung	225
5.8	Restriktionsmenge	226
5.9	Verallgemeinertes Fundamentallemma	226
5.10	Schwache Folgenkompaktheit	228
5.11	Existenzsatz	229
5.12	Zweiseitiger Gauß-Test zum Prüfen eines Erwartungswerts . . .	229
5.13	Exponentielle Verteilungsfamilien	231
5.14	Beispiele für exponentielle Verteilungsfamilien	232
5.15	Analytische Eigenschaften exponentieller Familien	233
5.16	Isotonie der Gütefunktion in einseitigen Tests	236
5.17	Optimalität zweiseitiger Tests in expon. Verteilungsfamilien . .	238
5.18	Opt. zweiseitiger Test bei symm. Verteilung der Teststatistik .	242
5.19	Optimaler zweiseitiger Binomial-Test	242
Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 5		245
6	Schätzbereiche und Punktschätzungen	259
6.1	Schätzprobleme	261
6.2	Bereichsschätzer	261
6.3	Gütefunktion für beispielhafte Bereichsschätzer	262
6.4	α -Niveau Bereichsschätzer	264
6.5	Zusammenhang zwischen Bereichsschätzern und Tests	266
6.6	Konfidenzintervalle für μ im Normalverteilungsmodell	268
6.7	Konfidenzschranken	269
6.8	Konfidenzintervalle	270
6.9	Punktschätzer	273
6.10	Erwartete quadratische Abweichung	273
6.11	Erwartungstreue	274
6.12	Konkurrierende Optimalitätskonzepte	274
6.13	Biaskorrektur	276
6.14	UMVU-Schätzer	276
6.15	Orthogonalitätskriterium	277
6.16	UMVU-Schätzer in exponentiellen Familien	279
6.17	UMVU-Schätzer im Normalverteilungsmodell	281
6.18	Cramér/Rao-Ungleichung	282
6.19	Motivation für L^2 -differenzierbare Verteilungsfamilien	283
6.20	L^2 -differenzierbare Familien	284
6.21	Differenzierbarkeitshierarchie	285
6.22	Informationsungleichung in L^2 -differenzierbaren Familien	286
6.23	L^2 -Differenzierbarkeit und Exponentialität	287

Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 6 289**7 Spezielle Testprobleme 305**

7.1	Zweistichproben-Binomialtest (Exakter Test von Fisher)	306
7.2	Singuläre multivariate Normalverteilung	313
7.3	Asymptotische Normalität der Multinomialverteilung	314
7.4	χ^2 -Test zum Prüfen der Erfolgswsk.n einer Multinomialvtlg.	318
7.5	χ^2 -Test zum Prüfen der stoch. Unabh. zweier Klassifikationen	321
7.6	χ^2 -Test zum Prüfen der Symmetrie einer Vierfeldertafel	326
7.7	χ^2 -Test zum Vergleich zweier Multinomialverteilungen	327
7.8	Kolmogorov/Smirnov-Test	329
7.9	Cramér/von Mises-Test	332
7.10	Normal-Scores-Test zum Prüfen einer Normalvertlgsann.	334
7.11	Approx. der mittleren Ordnungsstat. unter Normalvtlgsann.	336
7.12	QQ-Plots	340

Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 7 345**8 Einführung in die Statistiksoftware R 357**

8.1	Installation und Entwicklungsumgebung	359
8.2	Hilfesystem	360
8.3	Zusatzpakete	360
8.4	Die erste R-Sitzung	361
8.5	Funktionen	362
8.6	Vektoren	365
8.7	Selektionen aus einem Vektor	367
8.8	Funktionen und Operatoren für Vektoren	370
8.9	Gleichheit von Vektoren	374
8.10	Fehlende Werte	375
8.11	Matrizen	377
8.12	Listen	379
8.13	Datensätze (data frames)	383
8.14	Faktoren und Tabellen	389
8.15	Programmstrukturen	395
8.16	Ein- und Ausgabe	397
8.17	Grafiken	402
8.18	Verteilungen und Simulation	410
8.19	Deskriptive Statistik	415
8.20	Tests, Konfidenzintervalle und Punktschätzungen	423

Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 8 427