ZUR KONSISTENZ VON ZWEI SCHÄTZERN FÜR ZEIT-KONTINUIERLICHE STOCHASTISCHE PROZESSE

Eugen Grycko[1], Werner Kirsch[2], Tobias Mühlenbruch[3]

[1,2,3] Department of Mathematics and Computer Science
University of Hagen
Universitätsstrasse 1
D-58084 Hagen, GERMANY

1. Einleitung

Einige mathematisch gut erforschte Aspekte von statistischen Verfahren beziehen sich auf Situationen, wo der Datensatz als eine Realisierung von Sequenzen von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen aufgefasst werden kann. Eine Verallgemeinerung dieser Voraussetzung mag dahin gehen, dass stochastische Abhängigkeitsstrukturen erlaubt werden; in diesem Zusammenhang bietet die Stationarität des die Daten erzeugenden Prozesses eine natürliche Voraussetzung für die Untersuchung von statistischen Verfahren.

Im Kurs "Stochastische Prozesse" hatten Sie eine Gelegenheit, mathematische Begriffsbildungen und Sachverhalte kennen zu lernen, die für die Konstruktion und Untersuchung von Prozessen mit kontinuierlichem Zeitparameter relevant sind. Im Sinne einer fortgeschrittenen Analyse von statistischen Verfahren bietet es sich an, Situationen zuzulassen, wo die Observable eine Trajektorie eines stochastischen Prozesses ist, also eine Funktion einer reellen Variablen.

Für den Einstieg in solche Betrachtungen werden Stationarität und α-Mixing-Eigenschaft von stochastischen Prozessen in Abschnitt 2 eingeführt. In den Abschnitten 3 und 4 widmen wir uns der Schätzung des Erwartungswertes und der Varianz und zeigen die schwache Konsistenz von zwei entsprechenden Schätzern.

2. Stationarität und α-Mixing in Kontinuierlicher Zeit

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

2.1 Lemma:
Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$. Setze

$$\alpha := \sup\{|P(A_1 \cap A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2)| \; |A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}.$$

Für $j = 1, 2$ sei $Y_j : \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{A}_j$-messbare Zufallsvariable mit

$$\mathbb{E}\big(|Y_j|^4\big) < \infty \qquad (j = 1, 2),$$

wobei $\mathbb{E}$ den Erwartungswert bezeichnet. Dann gilt für die Kovarianz:

$$|\mathrm{cov}(Y_1, Y_2)| \leq 8 \cdot \big(1 + \mathbb{E}(|Y_1|^4) + \mathbb{E}(|Y_2|^4)\big) \cdot \alpha^{1/2}.$$

Beweis: Folgt aus Lemma 3, p. 365, in [3].

Sei $\big(X_t\big)_{t \in \mathbb{R}}$ ein Pfad-stetiger stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2.2 Definition:
$\big(X_t\big)_{t \in \mathbb{R}}$ heißt stationär, wenn für jede monotone Sequenz $t_1 < \ldots < t_n$ und jedes $h > 0$ die Verteilungen von $\big(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\big)$ und von $\big(X_{t_1+h}, \ldots, X_{t_n+h}\big)$ unter P identisch sind.

Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir zwei Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}_{-\infty}^{t} := \sigma\big((X_s)_{s \leq t}\big) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{A}_{t}^{\infty} := \sigma\big((X_s)_{s \geq t}\big).$$

2.3 Definition:
$\big(X_t\big)_{t \in \mathbb{R}}$ heißt α-mixing, wenn es eine stetige Funktion $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ gibt mit

$$|P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)| \leq \alpha(h) \tag{2.1}$$

für alle $A \in \mathcal{A}_{-\infty}^{t}, B \in \mathcal{A}_{t+h}^{\infty}, t \in \mathbb{R}, h > 0$ und derart, dass gilt:

$$\lim_{h \to \infty} \alpha(h) = 0. \tag{2.2}$$

3. Ein Schwach Konsistenter Schätzer für den Erwartungswert

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\big(X_t\big)_{t\in\mathbb{R}}$ ein stationärer, Pfadstetiger stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$\mu_4 := \mathbb{E}\big(|X_t|^4\big) < \infty \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{3.1}$$

Sei $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion derart, dass (2.1) und (2.2) erfüllt sind, d.h. der Prozess $\big(X_t\big)_{t\in\mathbb{R}}$ ist α-mixing. Setze

$$a := \mathbb{E}\big(X_t\big) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{3.2}$$

für den gemeinsamen Erwartungswert der X_t.

Ein natürlicher Schätzer $\widehat{a}(T)$ für a ist gegeben durch:

$$\widehat{a}(T) := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T X_t \, dt \qquad (T > 0), \tag{3.3}$$

wobei das Integral in (3.3) pfadweise erklärt ist.

Der Satz von Fubini impliziert für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}\big(\widehat{a}(T)\big) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \mathbb{E}\big(X_t\big) \, dt = a \qquad (T > 0), \tag{3.4}$$

d.h. der Schätzer $\widehat{a}(T)$ ist erwartungstreu für $T > 0$.

3.1 Satz:
Der Schätzer $\widehat{a}(T)$ ist schwach konsistent für $T \to \infty$, d.h. es gilt:

$$\lim_{T\to\infty} P\big(\,|\widehat{a}(T) - a| \geq \varepsilon\big) = 0 \qquad (\varepsilon > 0).$$

Beweis: Sei o.B.d.A. $a = 0$. Vermöge der Tschebyschevschen Ungleichung reicht es aus, die Gültigkeit von

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{Var}\big(\widehat{a}(T)\big) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\big(\widehat{a}(T)^2\big) = 0 \tag{3.5}$$

für die Varianzen von $\widehat{a}(T)$ zu zeigen.

$[\cdot]$ bezeichne die Gauß-Klammer.

Setze

$$\Delta_T := \frac{T}{[2T]} \qquad (T > 1).$$

Die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung (vgl. [1], p. 78, Exercise 4) impliziert:

$$\begin{aligned}\left(\int\limits_{(j-1)\Delta_T}^{j\Delta_T} X_t\,dt\right)^4 &= \int\limits_{(j-1)\Delta_T}^{j\Delta_T}\int\limits_{(j-1)\Delta_T}^{j\Delta_T}\int\limits_{(j-1)\Delta_T}^{j\Delta_T}\int\limits_{(j-1)\Delta_T}^{j\Delta_T} X_{t_1}X_{t_2}X_{t_3}X_{t_4}\,dt_1dt_2dt_3dt_4 \\ &\le \int\limits_{(j-1)\Delta_T}^{j\Delta_T} X_t^4\,dt\end{aligned}$$

für $j = 1, 2, \ldots$; es folgt mit dem Satz von Fubini:

$$\mathbb{E}\left(\left(\int\limits_{(j-1)\Delta_T}^{j\Delta_T} X_t\,dt\right)^4\right) \le \Delta_T \cdot \mu_4 \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

für $T > 1$. Mit Lemma 2.1 und Ungleichung (2.1) erhalten wir:

$$\left|\operatorname{cov}\left(\int\limits_{(j-1)\Delta_T}^{j\Delta_T} X_t\,dt, \int\limits_{(k-1)\Delta_T}^{k\Delta_T} X_t\,dt\right)\right| \le 8\cdot(1+2\cdot\mu_4)\cdot\alpha\big((k-j)\Delta_T\big)^{1/2} \tag{3.7}$$

für $k > j$. Wegen

$$\widehat{a}(T) = \frac{1}{T}\cdot\sum_{j=1}^{[2T]}\int\limits_{(j-1)\Delta_T}^{j\Delta_T} X_t\,dt$$

folgt

$$\operatorname{Var}\left(\widehat{a}(T)\right) \le \frac{1}{T^2}\sum_{j=1}^{[2T]}\operatorname{Var}\left(\int\limits_{(j-1)\Delta_T}^{j\Delta_T} X_t\,dt\right)$$

$$+ \quad \frac{2}{T^2} \cdot \sum_{j<k}^{[2T]} \left| \operatorname{cov}\left(\int\limits_{(j-1)\Delta_T}^{j\Delta_T} X_t\,dt, \int\limits_{(k-1)\Delta_T}^{k\Delta_T} X_t\,dt \right) \right|$$

Die Stationarität von $\big(X_t\big)_{t\in\mathbb{R}}$ und (3.7) implizieren jetzt

$$\operatorname{Var}\big(\widehat{a}(T)\big) \le \frac{[2T]}{T^2} \cdot \operatorname{Var}\big(\int\limits_0^{\Delta_T} X_t\,dt\big) + \frac{16 \cdot (1 + 2 \cdot \mu_4) \cdot [2T]}{T^2} \cdot \sum_{j=0}^{[2T]-1} \alpha\big(j\Delta_T\big)^{1/2}$$

und somit wegen (2.2) die Gültigkeit von (3.5).

4. Ein Schwach Konsistenter Schätzer für die Varianz

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\big(X_t\big)_{t\in\mathbb{R}}$ ein stationärer, Pfad-stetiger zentrierter stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, d.h. es gelte

$$\mathbb{E}\big(X_t\big) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{4.1}$$

Es gelte ferner

$$\mu_8 := \mathbb{E}\big(|X_t|^8\big) < \infty \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{4.2}$$

Sei $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine stetige Funktion derart, dass (2.1) und (2.2) erfüllt sind, d.h. der Prozess $\big(X_t\big)_{t\in\mathbb{R}}$ ist α-mixing.

Setze

$$v := \operatorname{Var}\big(X_t\big) = \mathbb{E}\big(X_t^2\big) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{4.3}$$

für die gemeinsame Varianz der X_t.

Ein natürlicher Schätzer für v ist gegeben durch (vgl. (4.1)):

$$\widehat{v}(T) := \frac{1}{T} \cdot \int\limits_0^T X_t^2\,dt \qquad (T > 0). \tag{4.4}$$

Der Satz von Fubini impliziert, dass $\widehat{v}(T)$ erwartungstreu ist für $T > 0$.

Der Prozess $\big(Y_t\big)_{t\in\mathbb{R}}$ mit

$$Y_t := X_t^2 \qquad (t \in \mathbb{R})$$

erfüllt die Voraussetzungen von Satz 3.1, so dass der entsprechende Satz analog zu Abschnitt 3 gezeigt werden kann:

4.1 Satz:

Der Schätzer $\widehat{v}(T)$ ist schwach konsistent für $T \to \infty$, d.h. es gilt:

$$\lim_{T\to\infty} P\big(\,|\widehat{v}(T) - v| \geq \varepsilon\big) = 0 \qquad (\varepsilon > 0).$$

Literatur

[1] H. Bauer, *Measure and Integration Theory.* De Gruyter, Berlin, New York (2001).

[2] H. Bauer, *Probability Theory.* De Gruyter, Berlin, New York (1996).

[3] P. Billingsley, *Probability and Measure.* 3rd ed., Wiley, New York, Chichester (1995).

[4] N. Schmitz, *Stochastische Prozesse.* Kurs der FernUniversität, Hagen (2015).