Studientag zur Algorithmischen Mathematik

Relationen und Graphen

Winfried Hochstättler

Diskrete Mathematik und Optimierung
FernUniversität in Hagen

21. Mai 2011

Outline

Relationen

Kartesisches Produkt

Seien M und N Mengen. Das Kartesische Produkt von M und N ist die Menge aller geordeneten Tupel

$$M \times N = \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}.$$

Relationen

Kartesisches Produkt

Seien M und N Mengen. Das Kartesische Produkt von M und N ist die Menge aller geordeneten Tupel

$$M \times N = \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}.$$

Relationen

Eine (binäre) Relation R ist eine Teilmenge des Kartesischen Produktes $R \subseteq M \times N$. An Stelle von $(m, n) \in R$ schreiben wir auch mRn oder $m \sim n$ und sagen, m steht in Relation mit n.

Relationen

Kartesisches Produkt

Seien M und N Mengen. Das Kartesische Produkt von M und N ist die Menge aller geordeneten Tupel

$$M \times N = \{(m,n) \mid m \in M, n \in N\}.$$

Relationen

Eine (binäre) Relation R ist eine Teilmenge des Kartesischen Produktes $R \subseteq M \times N$. An Stelle von $(m,n) \in R$ schreiben wir auch mRn oder $m \sim n$ und sagen, m steht in Relation mit n.

Die Linksklasse eines Elementes $x \in M$ ist definiert als

$$[x]_l := \{y \in N \mid xRy\}.$$

Äquivalenzrelationen und Partialordnungen

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Relation auf M. Sie ist

Äquivalenzrelationen und Partialordnungen

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Relation auf M. Sie ist

ÄP1: reflexiv, wenn $\forall x \in M : xRx$

Äquivalenzrelationen und Partialordnungen

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Relation auf M. Sie ist

ÄP1: reflexiv, wenn $\forall x \in M : xRx$

Ä2: symmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (xRy \Rightarrow yRx)$

Äquivalenzrelationen und Partialordnungen

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Relation auf M. Sie ist

ÄP1: reflexiv, wenn $\forall x \in M : xRx$

Ä2: symmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (xRy \Rightarrow yRx)$

P2: antisymmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (xRy \text{ und } yRx \Rightarrow x = y)$

Äquivalenzrelationen und Partialordnungen

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Relation auf M. Sie ist

ÄP1: reflexiv, wenn $\forall x \in M : xRx$

Ä2: symmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (xRy \Rightarrow yRx)$

P2: antisymmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (xRy \text{ und } yRx \Rightarrow x = y)$

ÄP3: transitiv, wenn $\forall x, y, z \in M : (xRy \text{ und } yRz \Rightarrow xRz)$

Äquivalenzrelationen und Partialordnungen

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Relation auf M. Sie ist

- ÄP1: reflexiv, wenn $\forall x \in M : xRx$
- Ä2: symmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (xRy \Rightarrow yRx)$
- P2: antisymmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (xRy \text{ und } yRx \Rightarrow x = y)$
- ÄP3: transitiv, wenn $\forall x, y, z \in M : (xRy \text{ und } yRz \Rightarrow xRz)$

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt Äquivalenzrelation.

Äquivalenzrelationen und Partialordnungen

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Relation auf M. Sie ist

ÄP1: reflexiv, wenn $\forall x \in M : xRx$

Ä2: symmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (xRy \Rightarrow yRx)$

P2: antisymmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (xRy \text{ und } yRx \Rightarrow x = y)$

ÄP3: transitiv, wenn $\forall x, y, z \in M : (xRy \text{ und } yRz \Rightarrow xRz)$

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt Äquivalenzrelation. Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt Partialordnung.

Äquivalenzrelationen und Partialordnungen

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt Relation auf M. Sie ist

ÄP1: reflexiv, wenn $\forall x \in M : xRx$

Ä2: symmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (xRy \Rightarrow yRx)$

P2: antisymmetrisch, wenn $\forall x, y \in M : (xRy \text{ und } yRx \Rightarrow x = y)$

ÄP3: transitiv, wenn $\forall x, y, z \in M : (xRy \text{ und } yRz \Rightarrow xRz)$

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt Äquivalenzrelation. Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt Partialordnung.

Die Linksklassen einer Äquivalenzrelation nennen wir auch Äquivalenzklassen.

Äquivalenklassen

Beispiel

Wir betrachten die Relation auf $\mathbb{Z}$

$$yRz :\iff y - z \text{ ist gerade.}$$

Äquivalenklassen

Proposition

Die Äquivalenzklassen partitionieren die Grundmenge.

Äquivalenklassen

Proposition

Die Äquivalenzklassen partitionieren die Grundmenge.

Beweis.

Wegen $x \in [x]$ ist jedes Element in mindestens einer Äquivalenzklasse enthalten. Wir müssen also zeigen, dass die Äquivalenklassen zweier Elemente entweder gleich oder disjunkt sind.

Äquivalenklassen

Proposition

Die Äquivalenzklassen partitionieren die Grundmenge.

Beweis.

zu zeigen: $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$.

Äquivalenklassen

Proposition

Die Äquivalenzklassen partitionieren die Grundmenge.

Beweis.

zu zeigen: $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$.
Sei $t \in [x] \cap [y] \Rightarrow xRt$ und yRt

Äquivalenklassen

Proposition

Die Äquivalenzklassen partitionieren die Grundmenge.

Beweis.

zu zeigen: $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$.
Sei $t \in [x] \cap [y] \Rightarrow xRt$ und yRt
$\overset{\text{Ä2}}{\Rightarrow} xRt$ und $tRy \overset{\text{ÄP3}}{\Rightarrow} xRy \overset{\text{ÄP3}}{\Rightarrow} [y] \subseteq [x]$.

Äquivalenklassen

Proposition

Die Äquivalenzklassen partitionieren die Grundmenge.

Beweis.

zu zeigen: $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$.
Sei $t \in [x] \cap [y] \Rightarrow xRt$ und yRt
$\overset{\text{Ä2}}{\Rightarrow} xRt$ und $tRy \overset{\text{ÄP3}}{\Rightarrow} xRy \overset{\text{ÄP3}}{\Rightarrow} [y] \subseteq [x]$. Ganz symmetrisch folgt $[x] \subseteq [y]$ und somit $[x] = [y]$. $\square$

Äquivalenklassen

Beispiel

Wir betrachten die Relation auf $\mathbb{Z}$

$$yRz :\iff y - z \text{ ist gerade.}$$

Proposition

Die Äquivalenzklassen partitionieren die Grundmenge.

Im Beispiel haben wir zwei Äquivalenzklasse, die geraden und die ungeraden Zahlen.

Partialordnungen

Beispiel

Sei S eine Menge. Dann erklären wir auf 2^S die Partialordnung $\leq$ vermöge

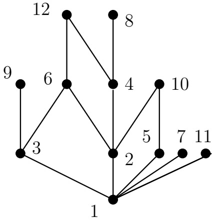
$$A \leq B :\iff A \subseteq B.$$

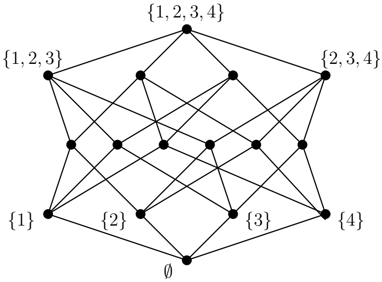
Partialordnungen

Beispiel

Sei S eine Menge. Dann erklären wir auf 2^S die Partialordnung $\leq$ vermöge

$$A \leq B :\iff A \subseteq B.$$





Graphen

Eine Relation R auf V heißt irreflexiv, wenn $\forall v \in V : (\neg vRv)$.

Graphen

Eine Relation R auf V heißt irreflexiv, wenn $\forall v \in V : (\neg vRv)$. Eine symmetrische, irreflexive Relation nennen wir Graph.

Graphen

Eine Relation R auf V heißt irreflexiv, wenn $\forall v \in V : (\neg vRv)$. Eine symmetrische, irreflexive Relation nennen wir Graph. Gilt uRv, so nennen wir $\{u, v\}$ eine Kante von G. Wir schreiben $G = (V, E)$ und auch (u, v) statt $\{u, v\}$.

Graphen

Eine Relation R auf V heißt irreflexiv, wenn $\forall v \in V : (\neg vRv)$. Eine symmetrische, irreflexive Relation nennen wir Graph. Gilt uRv, so nennen wir $\{u, v\}$ eine Kante von G. Wir schreiben $G = (V, E)$ und auch (u, v) statt $\{u, v\}$.

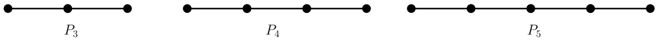
Einige Begriffe

Graphen

Eine Relation R auf V heißt irreflexiv, wenn $\forall v \in V : (\neg vRv)$. Eine symmetrische, irreflexive Relation nennen wir Graph. Gilt uRv, so nennen wir $\{u, v\}$ eine Kante von G. Wir schreiben $G = (V, E)$ und auch (u, v) statt $\{u, v\}$.

Einige Begriffe

Wege:

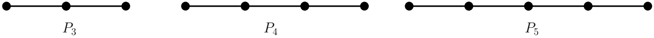


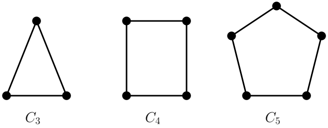
Graphen

Eine Relation R auf V heißt irreflexiv, wenn $\forall v \in V : (\neg vRv)$. Eine symmetrische, irreflexive Relation nennen wir Graph. Gilt uRv, so nennen wir $\{u, v\}$ eine Kante von G. Wir schreiben $G = (V, E)$ und auch (u, v) statt $\{u, v\}$.

Einige Begriffe

Wege:





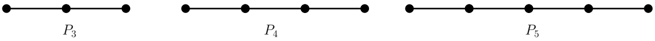
Kreise:

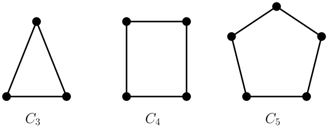
Graphen

Eine Relation R auf V heißt irreflexiv, wenn $\forall v \in V : (\neg vRv)$. Eine symmetrische, irreflexive Relation nennen wir Graph. Gilt uRv, so nennen wir $\{u, v\}$ eine Kante von G. Wir schreiben $G = (V, E)$ und auch (u, v) statt $\{u, v\}$.

Einige Begriffe

Wege:





Kreise:

Spaziergänge: $(v_0 e_1 v_1 e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n)$ mit $e_i = (v_{i-1}, v_i)$.

Teilgraphen und Komponenten

Sind $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ Graphen, so heißt H ein Teilgraph von G, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

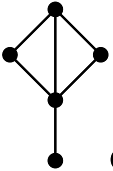
Teilgraphen und Komponenten

Sind $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ Graphen, so heißt H ein Teilgraph von G, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Der Teilgraph H ist induziert, wenn darüber hinaus $E' = \binom{V'}{2} \cap E$.

Teilgraphen und Komponenten

Sind $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ Graphen, so heißt H ein Teilgraph von G, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Der Teilgraph H ist induziert, wenn darüber hinaus $E' = \binom{V'}{2} \cap E$.

Beispiele



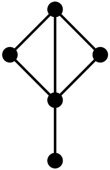
Graph

G

Teilgraphen und Komponenten

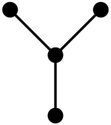
Sind $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ Graphen, so heißt H ein Teilgraph von G, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Der Teilgraph H ist induziert, wenn darüber hinaus $E' = \binom{V'}{2} \cap E$.

Beispiele



Graph

G

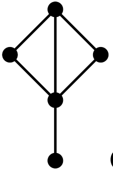


H_1 induziert

Teilgraphen und Komponenten

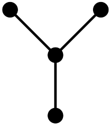
Sind $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ Graphen, so heißt H ein Teilgraph von G, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Der Teilgraph H ist induziert, wenn darüber hinaus $E' = \binom{V'}{2} \cap E$.

Beispiele

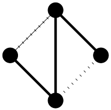


Graph

G



H_1 induziert

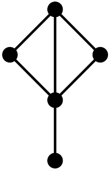


H_2 nicht induziert

Teilgraphen und Komponenten

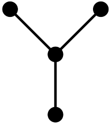
Sind $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ Graphen, so heißt H ein Teilgraph von G, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Der Teilgraph H ist induziert, wenn darüber hinaus $E' = \binom{V'}{2} \cap E$.

Beispiele

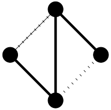


Graph

G



H_1 induziert



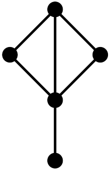
H_2 nicht induziert

Ein Graph ist zusammenhängend, wenn je zwei Knoten durch einen Weg verbunden sind.

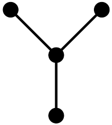
Teilgraphen und Komponenten

Sind $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ Graphen, so heißt H ein Teilgraph von G, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Der Teilgraph H ist induziert, wenn darüber hinaus $E' = \binom{V'}{2} \cap E$.

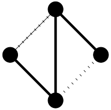
Beispiele



G Graph



H_1 induziert



H_2 nicht induziert

Ein Graph ist zusammenhängend, wenn je zwei Knoten durch einen Weg verbunden sind. Die Zusammenhangskomponenten eines Graphen sind die Äquivalenzklassen(!) der „Verbundenheitsrelation“.

Graphenisomorphie

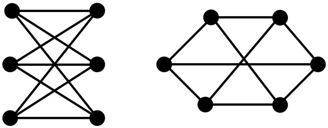
$G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sind isomorph $:\iff$

$\exists f : V_1 \to V_2$ bijektiv:$\forall u, v, \in V_1 : (\{u, v\} \in E_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in E_2)$.

Graphenisomorphie

$G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sind isomorph $:\Longleftrightarrow$

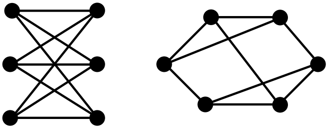
$\exists f : V_1 \to V_2$ bijektiv:$\forall u, v, \in V_1 : (\{u, v\} \in E_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in E_2)$.



Graphenisomorphie

$G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sind isomorph $:\Longleftrightarrow$

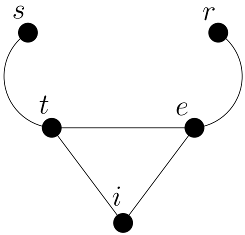
$\exists f : V_1 \to V_2$ bijektiv:$\forall u, v, \in V_1 : (\{u, v\} \in E_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in E_2)$.



Codierung von Graphen

Adjazenzmatrix

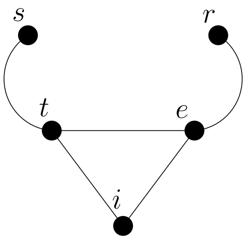
$$\begin{array}{c} \\ s \\ t \\ i \\ e \\ r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s & t & i & e & r \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Codierung von Graphen

Inzidenzmatrix

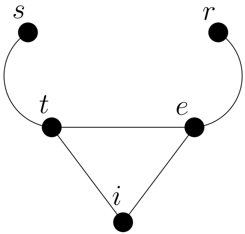
$$
\begin{array}{c}
s \\ t \\ i \\ e \\ r
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$



Codierung von Graphen

Adjazenzlisten

s: t
t: s,i,e
i: t,e
e: t,i,r
r: e



Valenzsequenzen

Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, so nennen wir $(\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$ seine Valenzsequenz.

Valenzsequenzen

Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, so nennen wir $(\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$ seine Valenzsequenz.

Sei $D = (d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n)$. Frage: Wann ist D die Valenzsequenz eines einfachen Graphen?

Valenzsequenzen

Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, so nennen wir $(\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$ seine Valenzsequenz.

Sei $D = (d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n)$. Frage: Wann ist D die Valenzsequenz eines einfachen Graphen?

Lemma (Handshakelemma)

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Valenzsequenzen

Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, so nennen wir $(\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$ seine Valenzsequenz.

Sei $D = (d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n)$. Frage: Wann ist D die Valenzsequenz eines einfachen Graphen?

Lemma (Handshakelemma)

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Dies liefert nur eine notwendige Bedingung. Allerdings gilt:

Proposition

D ist die Valenzsequenz eines Multigraphen genau dann, wenn die Summe aller Knotengrade gerade ist.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung

Satz (Erdős, Gallai)

D ist die Valenzsequenz eines einfachen Graphen genau dann, wenn

$$\forall i = 1, \ldots, n : \sum_{j=1}^{i} d_j \leq i(i+1) + \sum_{j=i+1}^{n} \min\{i, d_j\}.$$

Noch eine notwendige und hinreichende Bedingung

Satz (Havel, Hakimi)

$D = (d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n)$ ist Valenzsequenz eines einfachen Graphen genau dann wenn $d_1 < n$ und $D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+1} \ldots, d_n)$ Valenzsequenz eines einfachen Graphen ist.

Noch eine notwendige und hinreichende Bedingung

Satz (Havel, Hakimi)

$D = (d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n)$ ist Valenzsequenz eines einfachen Graphen genau dann wenn $d_1 < n$ und $D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+1} \ldots, d_n)$ Valenzsequenz eines einfachen Graphen ist.

Beweis.

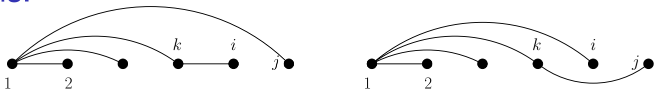
$\square$

Noch eine notwendige und hinreichende Bedingung

Satz (Havel, Hakimi)

$D = (d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n)$ ist Valenzsequenz eines einfachen Graphen genau dann wenn $d_1 < n$ und $D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+1} \ldots, d_n)$ Valenzsequenz eines einfachen Graphen ist.

Beweis.



$\square$

Verfahren nach Havel und Hakimi

$$D = (5, 5, 3, 2, 2, 2, 1)$$

Verfahren nach Havel und Hakimi

$$
\begin{aligned}
D &= (5,5,3,2,2,2,1) \\
D' &= (4,2,1,1,1,1)
\end{aligned}
$$

Verfahren nach Havel und Hakimi

$$
\begin{aligned}
D &= (5,5,3,2,2,2,1) \\
D' &= (4,2,1,1,1,1) \\
D' &= (1,0,0,0,1)
\end{aligned}
$$

Graphensuchmethoden