Lösungshinweise zu Anhang A

zu Selbsttestaufgabe A.10 (Wahrscheinlichkeitsfunktion) Seien $A, B \in$ *Form* Formeln der Sprache $\mathcal{L}$.

1. Es ist
$$A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$
Da $A \wedge B$ und $A \wedge \neg B$ einander ausschließen, folgt die Behauptung mit Eigenschaft (P2).

2. Es ist $\top \equiv A \vee \neg A$, also
$$1 = P(\top) = P(A) + P(\neg A)$$
wegen (P1) und (P2).

3. $P(\bot) = 0$ folgt aus (P1) und (2.) wegen $\neg\top = \bot$.

4. Es gelte $\models A \Rightarrow B$. Dann ist
$$A \equiv A \wedge B$$
und wegen
$$B \equiv (B \wedge A) \vee (B \wedge \neg A)$$
folgt
$$B = A \vee (B \wedge \neg A)$$
Damit gilt
$$P(B) = P(A) + P(B \wedge \neg A) \geq P(A)$$
wegen (P2) und da $P(B \wedge \neg A) \geq 0$.

5. Durch wiederholte Anwendung von (P2) erhalten wir, zusammen mit Teil 1:
$$\begin{aligned} P(A \vee B) &= P(A \vee (\neg A \wedge B)) \\ &= P(A) + P(\neg A \wedge B) \\ &= P(A) + P(\neg A \wedge B) + P(A \wedge B) - P(A \wedge B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \wedge B) \end{aligned}$$

zu Selbsttestaufgabe A.14 (Marginalisieren, Randverteilung) Die Randverteilung P'' über D und S_2 berechnet sich folgendermaßen:

D	S_2	P''
0	0	0.30
0	1	0.10
1	0	0.35
1	1	0.25

zu Selbsttestaufgabe A.17 (bedingte Wahrscheinlichkeit) Es ist

$$P(S_1 \mid D) = \frac{P(D \wedge S_1)}{P(D)} = \frac{0.31}{0.60} = 0.517$$

$$P(S_2 \mid D) = \frac{P(D \wedge S_2)}{P(D)} = \frac{0.25}{0.60} = 0.417$$

Bei ca. 52 % aller Patienten, bei denen Diagnose D festgestellt wurde, lag auch Symptom S_1 vor, während nur ca. 42 % aller Patienten mit Diagnose D Symptom S_2 zeigten.

zu Selbsttestaufgabe A.19 (bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion) Die folgende Tabelle enthält die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion $P_{S_2} = P(\cdot \mid S_2)$:

D	S_1	P_{S_2}
0	0	0.229
0	1	0.057
1	0	0.400
1	1	0.314

zu Selbsttestaufgabe A.31 (Unabhängigkeit) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ Mengen von Aussagenvariablen aus $\mathcal{L}$. $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind genau dann unabhängig, wenn für beliebige Atome $\mathbf{a} \in \mathbf{A}, \mathbf{b} \in \mathbf{B}$ gilt

$$\begin{aligned} P(\mathbf{ab}) &= P(\mathbf{a})P(\mathbf{b}) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{P(\mathbf{ab})}{P(\mathbf{b})} &= P(\mathbf{a}) \\ \Leftrightarrow \quad P(\mathbf{a} \mid \mathbf{b}) &= P(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

zu Selbsttestaufgabe A.35 (Satz von Bayes) Wir berechneten im Beispiel A.34 die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(f) = 0.5 \quad P(r) = 0.25 \quad P(f \mid r) = 0.44$$

Mit dem Satz von Bayes folgt dann

$$P(r \mid f) = \frac{P(f \mid r)P(r)}{P(f)} = \frac{0.44 \cdot 0.25}{0.5} = 0.22$$

zu Selbsttestaufgabe A.36 (bedingte Unabhängigkeit) In Beispiel A.34 gilt $G \perp\!\!\!\perp_P R \mid S$ genau dann, wenn

$$P(\dot{g}\dot{r} \mid \dot{s}) = P(\dot{g} \mid \dot{s})P(\dot{r} \mid \dot{s})$$

für beliebige Werte $\dot{g}, \dot{r}, \dot{s}$ der Variablen G, R, S ist. Für die Werte f, r, s erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} P(fr \mid s) &= \frac{0.02}{0.08} = 0.25 \\ P(f \mid s) &= \frac{0.08}{0.08} = 1 \\ P(r \mid s) &= \frac{0.02}{0.08} = 0.25 \end{aligned}$$

tatsächlich $P(fr \mid s) = P(f \mid s)P(r \mid s)$. Hingegen ist

$$\begin{aligned} P(fr \mid \bar{s}) &= \frac{0.09}{0.92} \approx 0.098 \\ P(f \mid \bar{s}) &= \frac{0.42}{0.92} \approx 0.457 \\ P(r \mid \bar{s}) &= \frac{0.23}{0.92} = 0.25 \end{aligned}$$

Hier ist also $0.098 \approx P(fr \mid \bar{s}) \neq P(f \mid \bar{s})P(r \mid \bar{s}) \approx 0.114$, und damit sind G und R nicht bedingt unabhängig bei gegebenem S.

zu Selbsttestaufgabe A.37 (Wahrscheinlichkeitsverteilungen)

1. Durch Aufsummieren erhält man aus der Tabelle in der Aufgabenstellung die Randverteilung über X und Y:

   $$P(\dot{x}\dot{y}) = P(\dot{x}\dot{y}z) + P(\dot{x}\dot{y}\bar{z}),$$

   für $\dot{x} \in \{x, \bar{x}\},\ \dot{y} \in \{y, \bar{y}\}$, also z.B.

   $$P(xy) = P(xyz) + P(xy\bar{z}).$$

x	y	$P(x,y)$
0	0	$\frac{3}{52}$
0	1	$\frac{5}{52}$
1	0	$\frac{5}{13}$
1	1	$\frac{6}{13}$

2. Wir berechnen die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X \mid Y)$; hierzu können wir die Randverteilung aus Teil 1 benutzen. Zunächst ist

$$P(y) = \frac{5}{52} + \frac{6}{13} = \frac{29}{52}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} P(x \mid y) &= \frac{P(xy)}{P(y)} \\ &= \frac{\frac{6}{13}}{\frac{29}{52}} \\ &= \frac{24}{29}; \\ P(\bar{x} \mid y) &= 1 - P(x \mid y) \\ &= \frac{5}{29}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x \mid \bar{y}) &= \frac{P(x\bar{y})}{P(\bar{y})} \\ &= \frac{\frac{5}{13}}{\frac{23}{52}} \\ &= \frac{20}{23}; \\ P(\bar{x} \mid \bar{y}) &= 1 - P(x \mid \bar{y}) \\ &= \frac{3}{23}; \end{aligned}$$

3. Wegen Selbsttestaufgabe 13.13,(1) müssen wir zum Nachweis der bedingten Unabhängigkeit von X und Y bei gegebenem Z nur zeigen:

$$P(xy \mid z) = P(x \mid z)P(y \mid z) \tag{L.7}$$
$$P(xy \mid \bar{z}) = P(x \mid \bar{z})P(y \mid \bar{z}) \tag{L.8}$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
P(x \mid z)P(y \mid z) &= \frac{P(xz)}{P(z)} \cdot \frac{P(yz)}{P(z)} \\
&= \frac{\frac{1}{13}+\frac{4}{13}}{\frac{25}{52}} \cdot \frac{\frac{1}{13}+\frac{4}{13}}{\frac{25}{52}} \\
&= \left(\frac{4}{5}\right)^2 \\
&= \frac{16}{25} \\
&= \frac{\frac{4}{13}}{\frac{25}{52}} \\
&= \frac{P(xyz)}{P(z)} \\
&= P(xy \mid z)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
P(x \mid \bar{z})P(y \mid \bar{z}) &= \frac{P(x\bar{z})}{P(\bar{z})} \cdot \frac{P(y\bar{z})}{P(\bar{z})} \\
&= \frac{\frac{4}{13}+\frac{2}{13}}{\frac{27}{52}} \cdot \frac{\frac{1}{52}+\frac{2}{13}}{\frac{27}{52}} \\
&= \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{8}{27} \\
&= \frac{\frac{2}{13}}{\frac{27}{52}} \\
&= \frac{P(xy\bar{z})}{P(\bar{z})} \\
&= P(xy \mid \bar{z})
\end{aligned}
$$

Damit sind die Beziehungen (L.7) und (L.8) gezeigt. (Beachten Sie aber, dass die Gleichungen (L.7) und (L.8) nicht auseinander ableitbar sind.)

zu Selbsttestaufgabe A.40 (Maximale Entropie) Der Nachweis des ersten Teils ist eine einfache Rechenaufgabe.

Sei P eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung über Ω mit $|\Omega| = n$. Wir schreiben P als Wahrscheinlichkeitsvektor, $P = (p_1, \ldots, p_n)$. Dann ist $\sum_{i=1}^n p_i = 1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}$, nach der Ungleichung (A.13) also

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^n p_i \log np_i \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \log p_i + \sum_{i=1}^n p_i \log n \end{aligned}$$

und daher

$$-\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \leq \sum_{i=1}^n p_i \log n$$

Wegen $\sum_{i=1}^n p_i \log n = \log n \sum_{i=1}^n p_i = \log n$ gilt also

$$H(P) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \leq \log n = H(P_0)$$

zu Selbsttestaufgabe A.42 (Relative Entropie) Es ist

$$\begin{aligned} R(P, P_0) &= \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{p_i}{1/n} \\ &= \sum_{i=1}^n p_i(\log n + \log p_i) \\ &= \log n \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \\ &= \log n - H(P) \end{aligned}$$

zu Selbsttestaufgabe A.43 (Entropie)

1. Sei k mit $2 \leq k \leq n-1$ ein fester Index und es sei $s = p_1 + \ldots + p_k$. Es ist zu zeigen, dass

$$H(p_1, \ldots, p_n) = H(s, p_{k+1}, \ldots, p_n) + sH(\frac{p_1}{s}, \ldots, \frac{p_k}{s})$$

gilt. Dazu formen wir die rechte Seite der Gleichung sukzessive um:

$$\begin{aligned}
&H(s, p_{k+1}, \ldots, p_n) + sH(\frac{p_1}{s}, \ldots, \frac{p_k}{s}) \\
&= s\log s + p_{k+1}\log p_{k+1} + \ldots + p_n \log p_n \\
&\qquad + s(\frac{p_1}{s}\log\frac{p_1}{s} + \ldots + \frac{p_k}{s}\log\frac{p_k}{s}) \\
&= s\log s + p_{k+1}\log p_{k+1} + \ldots + p_n \log p_n + p_1\log\frac{p_1}{s} + \ldots + p_k\log\frac{p_k}{s} \\
&= s\log s + p_{k+1}\log p_{k+1} + \ldots + p_n \log p_n + p_1\log p_1 - p_1\log s + \ldots \\
&\qquad + p_k\log p_k - p_k\log s \\
&= s\log s + p_{k+1}\log p_{k+1} + \ldots + p_n \log p_n + p_1\log p_1 + \ldots \\
&\qquad + p_k\log p_k - (p_1 + \ldots + p_k)\log s \\
&= p_1\log p_1 + \ldots + p_k\log p_k + p_{k+1}\log p_{k+1} + \ldots + p_n\log p_n \\
&= H(p_1, \ldots, p_n)
\end{aligned}$$

2. Sei $P = (p_1, \ldots, p_n)$ mit $p_i = P(\omega_i)$, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Es seien X und Y Ereignisse mit $X \subseteq \Omega, X \neq \emptyset, X \neq \Omega$ und $Y = \Omega - X$.
Es ist zu zeigen:

$$H(P) = H(P(X), P(Y)) + P(X)H(P_X) + P(Y)H(P_Y).$$

Zum Beweis sei o.E. $X = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}, Y = \{\omega_{k+1}, \ldots, \omega_n\}$.
Dann ist $P_X = (\frac{p_1}{P(X)}, \ldots, \frac{p_k}{P(X)}, 0, \ldots, 0), P(X) = p_1 + \ldots + p_k$ und
$P_Y = (0, \ldots, 0, \frac{p_{k+1}}{P(Y)}, \ldots, \frac{p_n}{P(Y)}), P(Y) = p_{k+1} + \ldots + p_n$.
Mit zweimaliger Verwendung der Gleichung aus Teil 1 gilt:

$$\begin{aligned}
H(P) &= H(p_1, \ldots, p_n) \\
&= H(P(X), p_{k+1}, \ldots, p_n) + P(X)H(\frac{p_1}{P(X)}, \ldots, \frac{p_k}{P(X)}) \\
&= H(P(X), p_{k+1}, \ldots, p_n) + P(X)H(P_X) \\
&= H(P(X), P(Y)) + P(X)H(P_X) + P(Y)H(\frac{p_{k+1}}{P(Y)}, \ldots, \frac{p_n}{P(Y)}) \\
&= H(P(X), P(Y)) + P(X)H(P_X) + P(Y)H(P_Y)
\end{aligned}$$