

Lösungshinweise zu Kapitel 3

zu Selbsttestaufgabe 3.1 (Schlussfolgerungen)

1. Abduktiver Schluss; plausibel, wenn es relativ zur Gesamtzahl aller Dinge nur wenige mit langen Ohren gibt.
2. Deduktiver Schluss.
3. Deduktiver Schluss.
4. Kein deduktiver Schluss. Für 100 m weniger als 10 Sek. zu benötigen, ist keine zwingende Voraussetzung, um im nächsten Jahr zu den Weltmeisterschaften zu fahren.
5. Deduktiver Schluss.
6. Induktiver Schluss; plausibel.
7. Kein plausibler Schluss. Wenn man als zusätzliche Voraussetzung “Wenn jemand hohes Fieber hat, kann er nicht zur Schule gehen” hinzufügen würde, ergäbe sich ein deduktiver Schluss.
8. Ebenfalls kein plausibler Schluss. Zwischen Prämissen und Konklusion ist ein Zusammenhang nicht ableitbar.
9. Induktiver Schluss; plausibel.
10. Plausibler Schluss unter Verwendung unsicheren Wissens.
11. Abduktiver Schluss unter Verwendung unsicheren Wissens; nicht plausibel, weil die Anzahl der Dinge, die kein Fieber verursachen, relativ zu Keuchhusten sehr viel größer ist.
12. Deduktiver Schluss.

zu Selbsttestaufgabe 3.13 (Erfüllbarkeit)

1. $P \Rightarrow P$ ist allgemeingültig. Zum Beweis nehmen wir an, dass I eine beliebige Interpretation ist. Es gelte zunächst $\llbracket P \rrbracket_I = \text{true}$. Dann folgt nach Definition 3.9 $\llbracket P \Rightarrow P \rrbracket_I = \text{true}$.

Nehmen wir nun $\llbracket P \rrbracket_I = \text{false}$ an. Dann gilt $\llbracket \neg P \rrbracket_I = \text{true}$ und mit Definition 3.9 folgt wieder $\llbracket P \Rightarrow P \rrbracket_I = \text{true}$.

Da I beliebig gewählt war, ist $P \Rightarrow P$ allgemeingültig.

2. $P \Rightarrow \neg P$ ist erfüllbar: Sei I_1 eine Interpretation mit $I_1(P) = false$. Dann folgt $\llbracket \neg P \rrbracket_{I_1} = true$, und somit $\llbracket P \Rightarrow \neg P \rrbracket_{I_1} = true$.

$P \Rightarrow \neg P$ ist aber *nicht* allgemeingültig, da in jeder Interpretation I_2 mit $I_2(P) = true$ gilt $\llbracket P \rrbracket_{I_2} = true$ und $\llbracket \neg P \rrbracket_{I_2} = false$, also

$$\llbracket P \Rightarrow \neg P \rrbracket_{I_2} = false.$$

3. $\neg P \Rightarrow P$ ist erfüllbar: Sei I_1 eine Interpretation mit $I_1(P) = true$, d.h. $\llbracket \neg P \rrbracket_{I_1} = false$, und mit Definition 3.9 gilt

$$\llbracket \neg P \Rightarrow P \rrbracket_{I_1} = true.$$

Auch hier gilt aber wieder, dass die Formel *nicht* allgemeingültig ist, da in jeder Interpretation I_2 mit $I_2(P) = false$ gilt:

$$\llbracket \neg P \Rightarrow P \rrbracket_{I_2} = false.$$

4. $P \Leftrightarrow \neg P$ ist unerfüllbar: Für die Erfüllbarkeit in einer beliebigen Interpretation I müsste $\llbracket P \rrbracket_I = \llbracket \neg P \rrbracket_I$ gelten, und es gibt definitionsgemäß keine Interpretation, die diese Bedingung erfüllt.
5. $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ ist allgemeingültig. Zum Beweis nehmen wir wieder an, dass I eine beliebige Interpretation ist. Hier müssen nun mehrere Fälle unterschieden werden:

- $I(P) = false$
Daraus folgt direkt $\llbracket P \Rightarrow (Q \Rightarrow P) \rrbracket_I = true$.
- $I(P) = true$
Um die Formel insgesamt zu *true* auszuwerten, muss dann $\llbracket Q \Rightarrow P \rrbracket_I = true$ gelten. Falls $I(Q) = false$ gilt, ist dies sofort erfüllt. Falls $I(Q) = true$ ist, muss dazu $\llbracket P \rrbracket_I = true$ sein, was nach Voraussetzung auch gilt.

zu Selbsttestaufgabe 3.18 (Inferenzoperation)

$$\begin{aligned}
 & Cn(F) \cap Cn(G) \\
 = & \{F' \mid F \models F'\} \cap \{F' \mid G \models F'\} \\
 = & \{F' \mid F \models F' \text{ und } G \models F'\} \\
 = & \{F' \mid F \Rightarrow F' \text{ ist allgemeingültig und } G \Rightarrow F' \text{ ist allgemeingültig}\} \\
 = & \{F' \mid ((F \Rightarrow F') \wedge (G \Rightarrow F')) \text{ ist allgemeingültig}\} \\
 = & \{F' \mid (F \vee G) \Rightarrow F' \text{ ist allgemeingültig}\} \\
 = & \{F' \mid (F \vee G) \models F'\} \\
 = & Cn(F \vee G)
 \end{aligned} \tag{*}$$

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & (F \Rightarrow F') \wedge (G \Rightarrow F') \\
 \equiv & (\neg F \vee F') \wedge (\neg G \vee F') \\
 \equiv & (\neg F \wedge F') \vee (\neg F \wedge \neg G) \vee (F' \wedge \neg G) \vee F' && \text{Distributivität} \\
 \equiv & \neg(F \vee G) \vee F' && \text{Absorption}
 \end{aligned}$$

zu Selbsttestaufgabe 3.20 (Logisches Folgern)

- Bei Aussage (1) handelt es sich um eine logische Formel, die eine Implikation von Teilformel P zu Teilformel Q ausdrückt.
- Aussage (2) drückt aus, dass die Formel Q eine logische Folgerung aus der Formel P ist.
- Laut Aussage (3) ist die Formel Q mittels eines (in der Notation als bekannt voraussetzen) Kalküls aus P ableitbar.

Damit ergeben sich folgende Unterschiede zwischen den Aussagen:

- Während (1) eine einzelne Formel ist, machen (2) und (3) Angaben über 2 Formeln.
- (2) und (3) unterscheiden sich wiederum dadurch, dass die Beziehung zwischen P und Q in (2) durch den Begriff der logischen Folgerung, in (3) aber durch den Ableitungsbegriff für ein Kalkül gegeben ist.

zu Selbsttestaufgabe 3.24 (Haustier 1) Wir erhalten folgende aussagenlogische Formeln:

1. Es sollte nur ein Hund, eine Katze oder ein Hamster sein:

$$H \vee K \vee M$$

2. Für Besitzer wertvoller Möbel ist es nicht sinnvoll, eine Katze anzuschaffen:

$$W \Rightarrow \neg K$$

3. Die Anschaffung eines Hundes verlangt nach einem freistehenden Haus:

$$H \Rightarrow F$$

4. Für einen Besitzer wertvoller Möbel ohne freistehendes Haus kommt nur ein Hamster in Frage:

$$(W \wedge \neg F) \Rightarrow M$$

zu Selbsttestaufgabe 3.25 (Computer)

- Wenn die Grafikkarte defekt ist, gibt es kein Bild:

$$\neg \text{Grafikkarte} \Rightarrow \neg \text{Bild}$$

- Wenn der Monitor defekt ist, gibt es kein Bild:

$$\neg \text{Monitor} \Rightarrow \neg \text{Bild}$$

- Wenn der Lüfter defekt ist, funktioniert das Netzteil nicht:

$$\neg \text{Lüfter} \Rightarrow \neg \text{Netzteil}$$

- Wenn das Netzteil nicht funktioniert, läuft die CPU nicht:

$$\neg \text{Netzteil} \Rightarrow \neg \text{CPU}$$

- Wenn der Prozessor defekt ist, läuft die CPU nicht:

$$\neg \text{Prozessor} \Rightarrow \neg \text{CPU}$$

- Wenn die Festplatte defekt ist, läuft die CPU nicht:

$$\neg \text{Festplatte} \Rightarrow \neg \text{CPU}$$

- Wenn der Rechner funktioniert, muss die CPU laufen, die Tastatur muss funktionieren und es muss ein Bild vorhanden sein:

$$\text{Rechner} \Rightarrow \text{CPU} \wedge \text{Tastatur} \wedge \text{Bild}$$

- Wenn jemand mit dem Rechner arbeitet, muss der Rechner laufen:

$$\text{Arbeiten} \Rightarrow \text{Rechner}$$

zu Selbsttestaufgabe 3.28 (erfüllbar, allgemeingültig)

1. Gilt in einer Interpretation $I(A) = \text{true}$, so ist $\llbracket \neg A \rrbracket_I = \text{false}$ und somit auch $\llbracket A \wedge \neg A \rrbracket_I = \text{false}$. Ist aber $I(A) = \text{false}$, ist auch $\llbracket A \wedge \neg A \rrbracket_I = \text{false}$. Es kann daher keine Interpretation I geben, die $A \wedge \neg A$ erfüllt.
2. Gilt in einer Interpretation $I(A) = \text{true}$, so ist auch $\llbracket A \vee \neg A \rrbracket_I = \text{true}$. Ist aber $I(A) = \text{false}$, ist $\llbracket \neg A \rrbracket_I = \text{true}$ und somit auch $\llbracket A \vee \neg A \rrbracket_I = \text{true}$. Daher wird $A \vee \neg A$ von jeder Interpretation erfüllt.
3. Jede Interpretation I mit $I(A) = \text{true}$ erfüllt $A \vee B$. Die Interpretation I mit $I(A) = \text{false}$ und $I(B) = \text{false}$ falsifiziert die Formel, da $\llbracket A \vee B \rrbracket_I = \text{false}$ gilt.

zu Selbsttestaufgabe 3.29 (Modell einer Formelmenge) Man kann die folgende Formelmenge nehmen: $\{P, Q, \neg(P \wedge Q)\}$. Überzeugen Sie sich bitte davon.

zu Selbsttestaufgabe 3.31 (Wahrheitstafel) Für den in der Aufgabenstellung angegebenen Ausdruck erhalten wir folgende Wertetabelle:

p	q	r	$p \wedge \neg q$	$q \wedge \neg r$	$r \wedge \neg p$	$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg p)$	$p \vee q \vee r$	F_1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0

F_1 ist also nicht allgemeingültig.

zu Selbsttestaufgabe 3.32 (Haustier 2) Ja. Eine Katze kommt wegen Überlegung (2.) nicht in Frage, ein Hund nicht wegen Überlegung (3.). Gegen einen Hamster spricht nichts, und wegen Überlegung (1.) kann es, wenn Hund und Katze nicht in Frage kommen, nur ein Hamster sein.

zu Selbsttestaufgabe 3.36 (Implikation und Assoziativität)

Belegungen					F_1	F_2	$\llbracket F_1 \rrbracket_I = \llbracket F_2 \rrbracket_I$
A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	
0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Wie die letzte Spalte zeigt, haben

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$$

und

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

nur für 6 der möglichen Belegungen von A , B und C den gleichen Wahrheitswert und unterscheiden sich für die 2 übrigen. Die Implikation $\Rightarrow$ ist damit *nicht* assoziativ!

zu Selbsttestaufgabe 3.37 (Klassische Aussagenlogik und Cn)

Aussage	wahr	falsch
$A \wedge (A \vee B) \in Cn(A \wedge B)$	X	
$A \vee B \in Cn(A \wedge B)$	X	
$(\neg A \vee B) \wedge A \in Cn(A \wedge B)$	X	
$\neg A \Rightarrow B \in Cn(A \wedge B)$	X	

Aussage	wahr	falsch
$A \in Cn(A \vee B)$		X
$A \wedge B \in Cn(A \vee B)$		X
$\neg A \in Cn(A \vee B)$		X
$A \Rightarrow B \in Cn(A \vee B)$		X

Aussage	wahr	falsch
$A \in Cn(A \Rightarrow B)$		X
$\neg A \in Cn(A \Rightarrow B)$		X
$A \wedge \neg B \in Cn(A \Rightarrow B)$		X
$\neg A \vee A \in Cn(A \Rightarrow B)$	X	

Die Begründungen zu den Aussagen erfolgen über die Modelle. Es gilt:

$$F_1 \in Cn(F_2) \text{ gdw. } F_2 \models F_1 \text{ gdw. } Mod(F_2) \subseteq Mod(F_1).$$

In der folgenden Tabelle geben wir für den Fall, dass A und B atomare Aussagen sind, die Modelle mit $\{ab, a\bar{b}, \bar{a}b, \bar{a}\bar{b}\}$ an.

F_1	F_2	$Mod(F_1)$	$Mod(F_2)$	$Mod(F_2)$ $\subseteq$ $Mod(F_1)$?
$A \wedge (A \vee B) \equiv A$	$A \wedge B$	$\{ab, a\bar{b}\}$	$\{ab\}$	wahr
$A \vee B$	$A \wedge B$	$\{ab, a\bar{b}, \bar{a}b\}$	$\{ab\}$	wahr
$(\neg A \vee B) \wedge A \equiv A \wedge B$	$A \wedge B$	$\{ab\}$	$\{ab\}$	wahr
$\neg A \Rightarrow B \equiv A \vee B$	$A \wedge B$	$\{ab, a\bar{b}, \bar{a}b\}$	$\{ab\}$	wahr
A	$A \vee B$	$\{ab, a\bar{b}\}$	$\{ab, a\bar{b}, \bar{a}b\}$	falsch
$A \wedge B$	$A \vee B$	$\{ab\}$	$\{ab, a\bar{b}, \bar{a}b\}$	falsch
$\neg A$	$A \vee B$	$\{\bar{a}b, \bar{a}\bar{b}\}$	$\{ab, a\bar{b}, \bar{a}b\}$	falsch
$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	$A \vee B$	$\{\bar{a}b, \bar{a}\bar{b}, ab\}$	$\{ab, a\bar{b}, \bar{a}b\}$	falsch
A	$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	$\{ab, a\bar{b}\}$	$\{\bar{a}b, \bar{a}\bar{b}, ab\}$	falsch
$\neg A$	$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	$\{\bar{a}b, \bar{a}\bar{b}\}$	$\{\bar{a}b, \bar{a}\bar{b}, ab\}$	falsch
$A \wedge \neg B$	$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	$\{a\bar{b}\}$	$\{\bar{a}b, \bar{a}\bar{b}, ab\}$	falsch
$\neg A \vee A$	$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	$\{\bar{a}b, a\bar{b}, \bar{a}\bar{b}, ab\}$	$\{\bar{a}b, \bar{a}\bar{b}, ab\}$	wahr

zu Selbsttestaufgabe 3.38 (Klassische Aussagenlogik und Cn)

1. $\mathcal{F}$ lässt sich vereinfachen zu:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} &= Cn(\{A, \neg B, \neg A \wedge \neg B \vee C, D \vee B, D \Rightarrow E, A \vee \neg F\}) \\
 &= Cn(\{A, \neg B, C, \neg B \Rightarrow D, D \Rightarrow E, A \vee \neg F\}). \\
 &= Cn(\{A, \neg B, C, D, E, A \vee \neg F\}).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt $\neg F \notin \mathcal{F}$.

2. Nein, da $\mathcal{F} \cup \neg D$ inkonsistent ist.

zu Selbsttestaufgabe 3.40 (Wahrheitstafeln)

1. $F_1 =_{\text{def}} \neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow R$ und $F_2 =_{\text{def}} P \wedge Q \wedge R$

Belegungen					F_1	F_2	$\llbracket F_1 \rrbracket_I = \llbracket F_2 \rrbracket_I$
P	Q	R	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow R$	$P \wedge Q \wedge R$	
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	0

Wie die letzte Spalte zeigt, haben F_1 und F_2 für 3 der möglichen Belegungen den gleichen Wahrheitswert und unterscheiden sich für die 5 übrigen.

2. $F_3 =_{\text{def}} (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow R$ und $F_4 =_{\text{def}} (\neg(\neg P \vee Q) \vee R) \wedge ((P \Rightarrow Q) \vee \neg R)$

Belegungen					F_3		
P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow R$	$\neg(\neg P \vee Q)$	$\neg(\neg P \vee Q) \vee R$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1

			F_4		$\llbracket F_3 \rrbracket_I = \llbracket F_4 \rrbracket_I$
$P \Rightarrow Q$	$\neg R$	$(P \Rightarrow Q) \vee \neg R$	$\neg(\neg P \vee Q) \vee R$	$(\neg(\neg P \vee Q) \vee R) \wedge ((P \Rightarrow Q) \vee \neg R)$	
1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1

In diesem Fall ergibt sich aus der letzten Spalte die Äquivalenz der beiden Formeln.

zu Selbsttestaufgabe 3.44 (Interpretationen in PL1) Wir geben zwei verschiedene Interpretationen an:

1. Interpretation I_W (“Wochentage”):

$$\begin{aligned} \text{Universum } U_{I_W} &= \{\text{Montag, Dienstag, } \dots, \text{Samstag, Sonntag}\} \\ I_W(a) &= \text{Dienstag} \\ I_W(b) &= \text{Samstag} \end{aligned}$$

$I_W(nf)$ ist die Funktion, die einen Wochentag auf den nachfolgenden Wochentag abbildet:

$$\begin{aligned} I_W(nf)(\text{Montag}) &= \text{Dienstag} \\ I_W(nf)(\text{Dienstag}) &= \text{Mittwoch} \\ &\dots \\ I_W(nf)(\text{Samstag}) &= \text{Sonntag} \\ I_W(nf)(\text{Sonntag}) &= \text{Montag} \end{aligned}$$

$I_W(LT)$ ist die “kommt-vor”-Relation der Wochentage, wobei Montag vor jedem anderen Wochentag und Sonntag vor keinem anderen Tag kommt:

$$\begin{aligned} I_W(LT) = & \{(\text{Montag, Dienstag}), (\text{Montag, Mittwoch}), \dots, (\text{Montag, Sonntag}), \\ & (\text{Dienstag, Mittwoch}), (\text{Dienstag, Donnerstag}), \dots, (\text{Dienstag, Sonntag}), \\ & (\text{Mittwoch, Donnerstag}), (\text{Mittwoch, Freitag}), \dots, (\text{Mittwoch, Sonntag}), \\ & (\text{Donnerstag, Freitag}), (\text{Donnerstag, Samstag}), (\text{Donnerstag, Sonntag}), \\ & (\text{Freitag, Samstag}), (\text{Freitag, Sonntag}), \\ & (\text{Samstag, Sonntag})\} \end{aligned}$$

2. Interpretation I_N (“natürliche Zahlen”):

$$\begin{aligned} \text{Universum } U_{I_N} &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ I_N(a) &= 0 \\ I_N(b) &= 42 \end{aligned}$$

$I_N(nf)$ ist die Funktion, die eine Zahl auf ihren Nachfolger abbildet:

$$\begin{aligned} I_N(nf)(0) &= 1 \\ I_N(nf)(1) &= 2 \\ I_N(nf)(2) &= 3 \\ &\dots \end{aligned}$$

$I_N(LT)$ ist die “kleiner-als”-Relation auf den natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned} I_N(LT) = & \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), \dots, \\ & (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), \dots, \\ & (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \dots, \\ & \dots\} \end{aligned}$$

zu Selbsttestaufgabe 3.48 (Termauswertung in PL1) Der Term $nf(nf(b))$ aus der Selbsttestaufgabe 3.44 wird in der Interpretation I_W (“Wochentage” – vgl. die Lösungshinweise zu der Selbsttestaufgabe 3.44) zu dem Wochentag *Montag* und in der Interpretation I_N (“natürliche Zahlen”) zu der Zahl 44 ausgewertet.

zu Selbsttestaufgabe 3.51 (Wahrheitswerte atomarer Formeln in PL1)

Die atomare Formel $LT(b, nf(nf(b)))$ wird in der Interpretation I_W (“Wochentage” – vgl. die Lösungshinweise zu der Selbsttestaufgabe 3.44) zu *false* ausgewertet, da in I_W der Samstag nicht “vor” Montag kommt, d.h., das Tupel (Samstag, Montag) ist nicht in der Relation $I_W(LT)$ enthalten.

Andererseits wird dieselbe Formel in I_N (“natürliche Zahlen”) zu *true* ausgewertet, da in der arithmetischen Ordnung $I_N(LT)$ die Zahl 42 kleiner als 44 ist, d.h., das Tupel (42, 44) ist in der Relation $I_N(LT)$ enthalten.

zu Selbsttestaufgabe 3.53 (Darstellung in PL1) Beachten Sie, dass nicht alle der folgenden Schlussfolgerungen korrekt oder auch nur plausibel sind (vgl. Lösungen zu Selbsttestaufgabe 3.1).

1.
$$\frac{\forall x \text{ Hase}(x) \Rightarrow \text{hat_lange_Ohren}(x) \quad \text{hat_lange_Ohren}(\text{Max})}{\text{Hase}(\text{Max})}$$
2.
$$\frac{\forall x \text{ Vogel}(x) \Rightarrow \text{kann_fliegen}(x) \quad \text{Vogel}(\text{Max})}{\text{kann_fliegen}(\text{Max})}$$
3.
$$\frac{\text{Wahl_steht_bevor} \Rightarrow (\forall x \text{ Steuer}(x) \Rightarrow \text{wird_nicht_erhöht}(x)) \quad \text{Steuer}(\text{Mehrwertsteuer}) \quad \text{Wahl_steht_bevor}}{\text{wird_nicht_erhöht}(\text{Mehrwertsteuer})}$$
4.
$$\frac{\text{laufe_unter_zehn} \Rightarrow \text{fahre_nach_Sydney}}{\neg \text{laufe_unter_zehn} \Rightarrow \neg \text{fahre_nach_Sydney}}$$
5.
$$\frac{\text{es_regnet} \Rightarrow \text{Straße_nass}}{\neg \text{Straße_nass} \Rightarrow \neg \text{es_regnet}}$$
6.
$$\frac{\text{Hund}(\text{Max}) \wedge \text{Bellen}(\text{Max}) \wedge \neg \text{Beißen}(\text{Max}) \quad \text{Hund}(\text{Peter}) \wedge \text{Bellen}(\text{Peter}) \wedge \neg \text{Beißen}(\text{Peter}) \quad \text{Hund}(\text{Moritz}) \wedge \text{Bellen}(\text{Moritz}) \wedge \neg \text{Beißen}(\text{Moritz})}{\forall x \text{ Hund}(x) \wedge \text{Bellen}(x) \Rightarrow \neg \text{Beißen}(x)}$$
7.
$$\frac{\text{hohes_Fieber}(\text{Peter})}{\text{nicht_zur_Schule}(\text{Peter})}$$

zu Selbsttestaufgabe 3.59 (Wahrheitswerte quantifizierter Formeln)

1. Da wir nicht festgelegt haben, ob $\text{Großvater}(x, y)$ besagen soll, dass x Großvater von y ist oder gerade umgekehrt, betrachten wir beide Möglichkeiten:

(a) $\text{Großvater}(x, y)$: Großvater von x ist y

Mit einer *intuitiven* Interpretation besagt die Formel

$$\forall x \exists y \text{ Großvater}(x, y)$$

“Jeder hat einen Opa.”

Die Formel

$$\exists y \forall x \text{Großvater}(x, y)$$

besagt dagegen: “Es gibt jemanden (‘SuperOpa’), der jedermanns Opa ist.”

- (b) $\text{Großvater}(x, y) : x$ ist Großvater von y

Nun besagt die erste Formel “Jeder hat einen Enkel”. Die zweite Formel kann man dagegen mit “Es gibt jemanden (‘SuperEnkel’), der jedermanns Enkel ist“ deuten.

2. (a)

$$\begin{array}{lll} I_1 & \models & \text{Großvater}(\text{Max}, \text{Moritz}) \quad \text{also: Wahrheitswert ist } \textit{true} \\ I_2 & \not\models & \text{Großvater}(\text{Max}, \text{Moritz}) \quad \text{also: Wahrheitswert ist } \textit{false} \\ I_3 & \models & \text{Großvater}(\text{Max}, \text{Moritz}) \quad \text{also: Wahrheitswert ist } \textit{true} \end{array}$$

Die ersten zwei “trockenen” logischen Zeilen zeigen:

Allein die Formel $\text{Großvater}(\text{Max}, \text{Moritz})$ sagt *nichts* darüber aus, ob Max ein Opa von Moritz sein soll, oder genau umgekehrt. *Das* ist eine Interpretationssache!

- (b)

$$\begin{array}{ll} I_1 & \not\models \forall x \exists y \text{Großvater}(x, y) \\ I_2 & \not\models \forall x \exists y \text{Großvater}(x, y) \\ \text{aber: } I_3 & \models \forall x \exists y \text{Großvater}(x, y) \end{array}$$

Es gilt nämlich: Weder in I_1 noch in I_2 gibt es jemanden, der in der entsprechenden *Großvater*-Relation zu *mein_Lieblingsopa* steht, d.h. in beiden Interpretationen hat die Formel

$$\exists y \text{Großvater}(\text{mein_Lieblingsopa}, y)$$

den Wahrheitswert *false*.

- (c)

$$\begin{array}{ll} I_1 & \not\models \exists y \forall x \text{Großvater}(x, y) \\ I_2 & \not\models \exists y \forall x \text{Großvater}(x, y) \\ I_3 & \models \exists y \forall x \text{Großvater}(x, y) \end{array}$$

zu Selbsttestaufgabe 3.61 (Umformung) Zwei der möglichen Umwandlungen sind:

$$\begin{array}{ll} F' & = (P(x) \Rightarrow \exists y \neg Q(y)) \Rightarrow R(z) \\ F'' & = (P(x) \wedge \forall y Q(y)) \vee R(z) \end{array}$$

zu Selbsttestaufgabe 3.62 (Quantorenunverträglichkeit) F sei die Formel $P(x)$ und G sei $Q(x)$. Gegeben sei weiterhin die Interpretation $I_{\mathbb{N}}$, die die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Universum hat und bei der P und Q interpretiert werden durch:

$$\begin{aligned} P_{I_{\mathbb{N}}}(x) &: x \text{ ist eine gerade Zahl} \\ Q_{I_{\mathbb{N}}}(x) &: x \text{ ist eine ungerade Zahl} \end{aligned}$$

Dann gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{N}} &\models \forall x (P(x) \vee Q(x)) \\ I_{\mathbb{N}} &\not\models (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \end{aligned}$$

Durch dieses Gegenbeispiel ist die Nichtäquivalenz der beiden Formeln mit dem Allquantor aufgezeigt.

In derselben Interpretation ist weiterhin

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{N}} &\models (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \\ I_{\mathbb{N}} &\not\models \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \end{aligned}$$

Aus diesem Gegenbeispiel folgt die Nichtäquivalenz der beiden Formeln mit dem Existenzquantor.

zu Selbsttestaufgabe 3.65 (Steuern) Mittels *modus ponens* können wir

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Wahl_steht_bevor} \Rightarrow (\forall x \text{ Steuer}(x) \Rightarrow \text{wird_nicht_erhöht}(x)) \\ \text{Wahl_steht_bevor} \end{array}}{\forall x \text{ Steuer}(x) \Rightarrow \text{wird_nicht_erhöht}(x)}$$

ableiten. Mit der Instantiierungsregel können wir daraus

$$\frac{\forall x \text{ Steuer}(x) \Rightarrow \text{wird_nicht_erhöht}(x)}{\text{Steuer}(\text{Mehrwertsteuer}) \Rightarrow \text{wird_nicht_erhöht}(\text{Mehrwertsteuer})}$$

ableiten. Wiederum mittels *modus ponens* erhalten wir

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Steuer}(\text{Mehrwertsteuer}) \Rightarrow \text{wird_nicht_erhöht}(\text{Mehrwertsteuer}) \\ \text{Steuer}(\text{Mehrwertsteuer}) \end{array}}{\text{wird_nicht_erhöht}(\text{Mehrwertsteuer})}$$

Mit diesen Ableitungsschritten haben wir daher die gesamte Schlussfolgerung

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Wahl_steht_bevor} \Rightarrow (\forall x \text{ Steuer}(x) \Rightarrow \text{wird_nicht_erhöht}(x)) \\ \text{Steuer}(\text{Mehrwertsteuer}) \\ \text{Wahl_steht_bevor} \end{array}}{\text{wird_nicht_erhöht}(\text{Mehrwertsteuer})}$$

bewiesen.

zu Selbsttestaufgabe 3.66 (Pränexform)

$$\begin{aligned}
& (\neg \exists x P(x)) \Rightarrow (\neg \exists x Q(x)) \\
\equiv & \neg(\neg \exists x P(x)) \vee (\neg \exists x Q(x)) \quad (1) \\
\equiv & (\exists x P(x)) \vee (\forall x \neg Q(x)) \quad (2) \\
\equiv & (\exists x P(x)) \vee (\forall y \neg Q(y)) \quad (3) \\
\equiv & \exists x \forall y P(x) \vee \neg Q(y) \quad (4)
\end{aligned}$$

- (1) Der Implikationspfeil wird aufgelöst.
- (2) Eine Doppelnegation wird entfernt (linker Disjunktionsteil) und “das Negationszeichen über den Existenzquantor nach innen” geschoben (rechter Disjunktionsteil).
- (3) Die Formel wird bereinigt.
- (4) Der hintere Quantor wird nach vorn geschoben.

zu Selbsttestaufgabe 3.67 (Normalform) In der Formel

$$C =_{\text{def}} \exists z \left(\left(\neg \exists x (P(x, z) \vee \underbrace{\forall y Q(x, f(y))} \right) \vee \underbrace{\forall y P(g(z, y), z)} \right)$$

wird die Variable y an zwei verschiedenen Stellen durch einen Quantor gebunden. Im Geltungsbereich des zweiten Quantors ersetzen wir y durch die neue Variable w und erhalten die zu C äquivalente Formel

$$C_2 =_{\text{def}} \exists z \left(\left(\neg \exists x (P(x, z) \vee \forall y Q(x, f(y))) \right) \vee \forall w P(g(z, w), z) \right)$$

Die Formel C_2 können wir wie folgt in eine äquivalente Formel in Pränexform umformen:

$$\begin{aligned}
C_2 &= \exists z \left(\underbrace{\left(\neg \exists x (P(x, z) \vee \forall y Q(x, f(y))) \right)}_{\text{Regel (1.2) in Theorem 3.60}} \vee \forall w P(g(z, w), z) \right) \\
&\equiv \exists z \left(\left(\forall x \underbrace{\neg (P(x, z) \vee \forall y Q(x, f(y)))}_{\text{de Morgansches Gesetz für Disjunktion}} \right) \vee \forall w P(g(z, w), z) \right) \\
&\equiv \exists z \left(\left(\forall x (\neg P(x, z) \wedge \underbrace{\neg \forall y Q(x, f(y))}_{\text{Regel (1.1) in Theorem 3.60}}) \right) \vee \forall w P(g(z, w), z) \right) \\
&\equiv \exists z \left(\underbrace{\left(\forall x (\neg P(x, z) \wedge \exists y \neg Q(x, f(y))) \right)}_{\text{Regel (2.2) in Theorem 3.60}} \vee \forall w P(g(z, w), z) \right) \\
&\equiv \exists z \left(\forall x \left(\underbrace{(\neg P(x, z) \wedge \exists y \neg Q(x, f(y)))}_{\text{Kommutativität von } \wedge \text{ und Regel (2.3) in Theorem 3.60}} \vee \forall w P(g(z, w), z) \right) \right) \\
&\equiv \exists z \left(\forall x \left(\underbrace{(\exists y \neg P(x, z) \wedge \neg Q(x, f(y))) \vee \forall w P(g(z, w), z)}_{\text{Regel (2.4) in Theorem 3.60}} \right) \right) \\
&\equiv \exists z \left(\forall x \left(\exists y \underbrace{((\neg P(x, z) \wedge \neg Q(x, f(y))) \vee \forall w P(g(z, w), z))}_{\text{Kommutativität von } \vee \text{ und Regel (2.2) in Theorem 3.60}} \right) \right) \\
&\equiv \exists z \left(\forall x \left(\exists y (\forall w ((\neg P(x, z) \wedge \neg Q(x, f(y))) \vee P(g(z, w), z))) \right) \right) \\
&\quad \text{Weglassen von Klammern} \\
&\equiv \exists z \forall x \exists y \forall w (\neg P(x, z) \wedge \neg Q(x, f(y))) \vee P(g(z, w), z) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} C_3
\end{aligned}$$

Auf die erhaltene Formel C_3 in Pränexform können wir die Regeln unter (4.) in Theorem 3.60 zur Vertauschung von Quantoren *nicht* anwenden, da nur unmittelbar nebeneinander stehende *gleiche* Quantoren vertauscht werden dürfen.

zu Selbsttestaufgabe 3.70 (Haustier 3)

1. $H \vee K \vee M$
Klauselform: $\{H, K, M\}$
2. $W \Rightarrow \neg K \equiv \neg W \vee \neg K$
Klauselform: $\{\neg W, \neg K\}$
3. $H \Rightarrow F \equiv \neg H \vee F$
Klauselform: $\{\neg H, F\}$
4. $(W \wedge \neg F) \Rightarrow M \equiv \neg(W \wedge \neg F) \vee M \equiv (\neg W \vee \neg \neg F) \vee M \equiv \neg W \vee F \vee M$
Klauselform: $\{\neg W, F, M\}$

zu Selbsttestaufgabe 3.71 (Normalform) Gegeben ist die Formel:

$$G =_{\text{def}} \neg(\neg(A \Rightarrow (B \vee C)) \Rightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow A))$$

Elimination der mittleren Implikation:

$$\neg(\neg\neg(A \Rightarrow (B \vee C)) \vee ((B \wedge C) \Rightarrow A))$$

Elimination der Doppelnegation und der beiden Implikationen:

$$\neg((\neg A \vee (B \vee C)) \vee (\neg(B \wedge C) \vee A))$$

Weglassen der Klammern und Hineinziehen der äußeren Negation:

$$\neg(\neg A \vee B \vee C) \wedge \neg(\neg(B \wedge C) \vee A)$$

Hineinziehen der Negation und Elimination der Doppelnegation:

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \wedge ((B \wedge C) \wedge \neg A)$$

Weglassen der Klammern ergibt konjunktive Normalform:

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge B \wedge C \wedge \neg A$$

Darstellung der konjunktiven Normalform in Klauselform:

$$\{\{A\}, \{\neg B\}, \{\neg C\}, \{B\}, \{C\}, \{\neg A\}\}$$

zu Selbsttestaufgabe 3.72 (Klauselform) Die gegebene Formel ist äquivalent zu

$$(\forall x \neg \text{Mensch}(x) \vee \text{sich-irren}(x)) \wedge \text{Mensch}(\text{Max}) \wedge (\forall y \neg \text{sich-irren}(y))$$

In Klauselform ergibt dies:

$$\{\{\neg \text{Mensch}(x), \text{sich-irren}(x)\}, \{\text{Mensch}(\text{Max})\}, \{\neg \text{sich-irren}(y)\}\}.$$

zu Selbsttestaufgabe 3.73 (Normalformen) Zur Überführung von

$$\mathcal{P} = \exists y(\neg P(y) \vee R(y)) \Leftrightarrow \forall y S(y)$$

in Pränexform wenden wir zunächst die gebundene Umbenennung auf y im rechten Teil der Koimplikation an:

$$\exists y(\neg P(y) \vee R(y)) \Leftrightarrow \forall v S(v) =: \mathcal{P}_1$$

Theorem 3.52 ermöglicht es uns leider nur, die Gültigkeit von Quantoren auf Konjunktionen und Disjunktionen zu erweitern. Wir müssen daher die Koimplikation zunächst gemäß Theorem 3.30 durch Konjunktionen und Disjunktionen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &\equiv \exists y((\neg P(y) \vee R(y)) \Rightarrow \forall v S(v)) \wedge ((\forall v S(v)) \Rightarrow (\neg P(y) \vee R(y))) \\ &\equiv \exists y(\neg(\neg P(y) \vee R(y)) \vee \forall v S(v)) \wedge ((\neg P(y) \vee R(y)) \vee \neg(\forall v S(v))) \\ &\equiv \exists y((P(y) \wedge \neg R(y)) \vee \forall v S(v)) \wedge (\neg P(y) \vee R(y) \vee \exists v \neg S(v)) \end{aligned}$$

In jedem der beiden Konjunktionsglieder können wir nun die Quantoren nach außen ziehen und erhalten

$$\exists y(\forall v(P(y) \wedge \neg R(y)) \vee S(v)) \wedge (\exists v \neg P(y) \vee R(y) \vee \neg S(v))$$

Nochmalige gebundene Umbenennung der Variablen und Herausziehen der Quantoren liefert die Pränexform

$$\mathcal{P}_2 := \exists y \forall v \exists v'((P(y) \wedge \neg R(y)) \vee S(v)) \wedge (\neg P(y) \vee R(y) \vee \neg S(v'))$$

$\mathcal{P}_2$ ist bereits in verneinungstechnischer Normalform.

Um zur KNF und DNF zu gelangen, müssen wir $\mathcal{P}_2$ zunächst skolemisieren, d.h. wir ersetzen die Variable y durch eine (Skolem-)Konstante c und v' durch den Term $g(v)$, wobei g eine neue (Skolem-)Funktion ist. Das Ergebnis ist

$$\mathcal{P}_3 := \forall v((P(c) \wedge \neg R(c)) \vee S(v)) \wedge (\neg P(c) \vee R(c) \vee \neg S(g(v)))$$

Durch modellerhaltende Transformation von $\mathcal{P}_3$ erhalten wir nun die KNF:

$$\forall v(P(c) \vee S(v)) \wedge (\neg R(c) \vee S(v)) \wedge (\neg P(c) \vee R(c) \vee \neg S(g(v)))$$

Die DNF erhalten wir durch Transformation von $\mathcal{P}_3$ wie folgt:

$$\begin{aligned} &\forall v((P(c) \wedge \neg R(c)) \vee S(v)) \wedge (\neg P(c) \vee R(c) \vee \neg S(g(v))) \\ \equiv &\forall v(((P(c) \wedge \neg R(c)) \vee S(v)) \wedge \neg P(c)) \vee \\ &\quad (((P(c) \wedge \neg R(c)) \vee S(v)) \wedge R(c)) \vee \\ &\quad (((P(c) \wedge \neg R(c)) \vee S(v)) \wedge \neg S(g(v))) \\ \equiv &\forall v(P(c) \wedge \neg R(c) \wedge \neg P(c)) \vee (S(v) \wedge \neg P(c)) \vee \\ &\quad (P(c) \wedge \neg R(c) \wedge R(c)) \vee (S(v) \wedge R(c)) \vee \\ &\quad (P(c) \wedge \neg R(c) \wedge \neg S(g(v))) \vee (S(v) \wedge \neg S(g(v))) \\ \equiv &\forall v(S(v) \wedge \neg P(c)) \vee (S(v) \wedge R(c)) \vee \\ &\quad (P(c) \wedge \neg R(c) \wedge \neg S(g(v))) \vee (S(v) \wedge \neg S(g(v))) \end{aligned}$$

zu Selbsttestaufgabe 3.74 (Normalformen und Cn)

1. Wegen $\mathcal{F} \models A$ gilt $Mod_{\Sigma}(\mathcal{F}) \subseteq Mod_{\Sigma}(A)$. Also ist

$$Mod_{\Sigma}(\mathcal{F} \cup \{A\}) = Mod_{\Sigma}(\mathcal{F}) \cap Mod_{\Sigma}(A) = Mod_{\Sigma}(\mathcal{F}).$$

Damit sind $\mathcal{F} \cup \{A\}$ und $\mathcal{F}$ logisch äquivalent und es gilt $Cn(\mathcal{F} \cup \{A\}) = Cn(\mathcal{F})$.

2. Es gilt $Cn(\{A, B\}) = Cn(\{A \wedge B\})$ und wir können auch für die folgenden Aussagen die entsprechenden Konjunktionen betrachten. Aus

$$A \wedge (A \Rightarrow B) \equiv A \wedge (\neg A \vee B) \equiv (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge B) \equiv \perp \vee (A \wedge B) \equiv A \wedge B$$

folgt $Cn(\{A \wedge B\}) = Cn(\{A, A \Rightarrow B\})$. Nach dem Modus Ponens gilt $\{A, A \Rightarrow B\} \models B$, also ist nach der Ableitung unter (1.) auch $Cn(\{A, A \Rightarrow B\}) = Cn(\{A, A \Rightarrow B, B\})$.

3. Auch hier nutzen wir $Cn(\{A, B\}) = Cn(\{A \wedge B\})$; weiterhin schreiben wir der Lesbarkeit halber AB statt $A \wedge B$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & Cn(\{A \vee G, B \Rightarrow A, B \vee (G \wedge \neg G), \neg C \Rightarrow D, E \vee \neg F, F\}) \\ &= Cn(\{A \vee G, \neg B \vee A, B \vee \perp, C \vee D, E \vee \neg F, F\}) \\ &= Cn(\{(A \vee G)(\neg B \vee A)B(C \vee D)(E \vee \neg F)F\}) \\ &= Cn(\{(A \vee G)(\perp \vee AB)(C \vee D)(EF \vee \perp)\}) \\ &= Cn(\{(A \vee G)AB(C \vee D)EF\}) \\ &= Cn(\{AB(C \vee D)EF\}) \quad (\text{Absorption, vgl. Theorem 3.35(4.)}) \\ &= Cn(\{ABCEF \vee ABDEF\}) \end{aligned}$$

Bemerkung: Beachten Sie die unterschiedliche Verwendung von Äquivalenzzeichen $\equiv$ zwischen Formeln bzw. Formelmengen und von Gleichheitszeichen $=$ zwischen (hier durch Cn erzeugten) Formelmengen.

zu Selbsttestaufgabe 3.78 (Unifikation) Die erste Stelle, an denen sich die Literale unterscheiden, ist im Folgenden jeweils unterstrichen.

1. $\{P(\underline{x}, y, y), \quad P(\underline{y}, z, a)\}$:

Mit $\sigma_1 := \{x/y\}$ erhält man $\{P(y, \underline{y}, y), \quad P(y, \underline{z}, a)\}$,

mit $\sigma_2 := \{y/z\}$ erhält man daraus $\{P(z, z, \underline{z}), \quad P(z, z, \underline{a})\}$,

mit $\sigma_3 := \{z/a\}$ erhält man daraus $\{P(a, a, a)\}$.

Also ist $\sigma := \{x/a, y/a, z/a\}$ ein (der allgemeinste) Unifikator.

2. $\{P(\underline{x}, y, y), \quad P(\underline{f(y)}, y, x)\}$:

Mit $\sigma_1 := \{x/f(y)\}$ erhält man $\{P(f(y), y, \underline{y}), \quad P(f(y), y, \underline{f(y)})\}$.

Da y in $f(y)$ vorkommt, sind die Literale nicht unifizierbar.

3. $\{P(f(\underline{x}), a, x), \quad P(f(\underline{g(y)}), z, z)\}$:

Mit $\sigma_1 := \{x/g(y)\}$ erhält man $\{P(f(g(y)), \underline{a}, g(y)), \quad P(f(g(y)), \underline{z}, z)\}$,

mit $\sigma_2 := \{z/a\}$ erhält man daraus $\{P(f(g(y)), a, \underline{g(y)}), \quad P(f(g(y)), a, \underline{a})\}$.

Nun ist die erste Stelle, an denen sich die beiden Literale unterscheiden, im ersten Literal ein Funktionssymbol und im zweiten eine Konstante. Die Literale sind also nicht unifizierbar.

zu Selbsttestaufgabe 3.79 (Unifikation)

1. $\sigma = \{x/a, y/f(f(a)), z/f(b)\}$ ist ein Unifikator und auch ein allgemeinsten Unifikator für $t = f(a, y, g(z))$ und $t' = f(x, f(f(a)), g(f(b)))$ mit

$$\sigma(t) = f(a, f(f(a)), g(f(b))) = \sigma(t').$$

2. $\sigma = \{x/a, y/a, z/f(b)\}$ ist ein Unifikator für $t = f(y, g(z))$ und $t' = f(x, g(f(b)))$ mit

$$\sigma(t) = f(a, g(f(b))) = \sigma(t').$$

σ ist jedoch kein allgemeinsten Unifikator, da $\sigma = \{y/a\} \circ \sigma'$ mit $\sigma' = \{x/y, z/f(b)\}$ und

$$\sigma'(t) = f(y, g(f(b))) = \sigma'(t').$$

3. $\sigma = \{x/a, y/f(f(a)), z/f(b)\}$ ist kein Unifikator für die Terme $t = f(y, y, g(z))$ und $t' = f(x, f(f(a)), g(f(b)))$, da

$$\sigma(t) = f(f(f(a)), f(f(a)), g(f(b))) \neq f(a, f(f(a)), g(f(b))) = \sigma(t').$$

Zum zweiten Teil der Aufgabe:

1. $t = g(f(x), z)$ und $t' = g(y, f(a))$ sind unifizierbar mit allgemeinstem Unifikator $\sigma = \{y/f(x), z/f(a)\}$ und

$$\sigma(t) = g(f(x), f(a)) = \sigma(t').$$

2. $t = g(f(x), z)$ und $t' = h(y, f(a))$ sind nicht unifizierbar: Für alle Substitutionen σ gilt

$$\sigma(t) = g(t_1, t_2) \neq h(t'_1, t'_2) = \sigma(t')$$

selbst wenn $t_1 = t'_1$ und $t_2 = t'_2$ durch ein geeignetes σ erreichbar ist.

3. $t = h(f(a), f(z), g(a))$ und $t' = h(y, f(g(b)), g(y))$ sind nicht unifizierbar. Unifikation der ersten Subterme erfordert die Zuweisung $y/f(a)$. Für die Subterme an Position 3 ist jedoch y/a erforderlich. Beides in der gleichen Substitution ist nicht möglich.

zu Selbsttestaufgabe 3.80 (Haustier 4) Wir verwenden die Formeln (1), (2), (3) aus Selbsttestaufgabe 3.70 und erhalten daraus folgende Klauselform:

$$\{\{H, K, M\}, \{\neg W, \neg K\}, \{\neg H, F\}\}$$

Dieser müssen wir die zu beweisende Aussage (4) *negiert* hinzufügen:

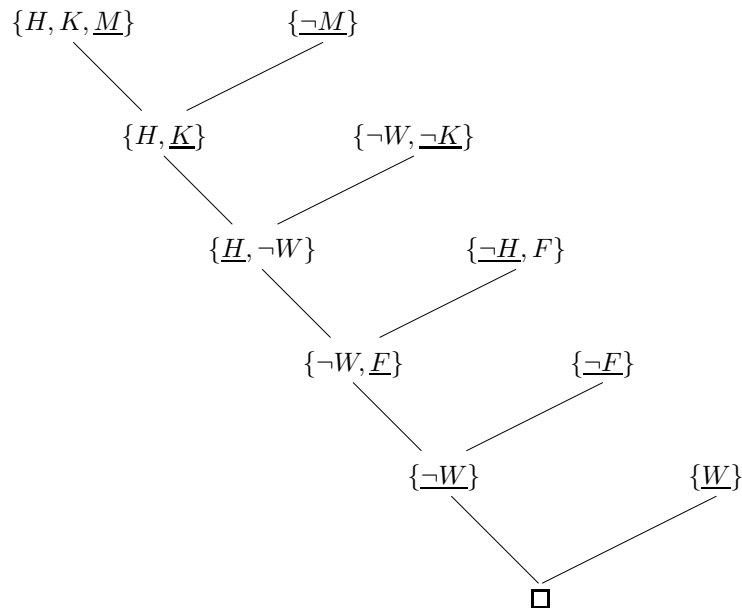
$$\begin{aligned} & \neg(W \wedge \neg F \Rightarrow M) \\ \equiv & \neg(\neg W \vee F \vee M) \\ \equiv & \neg\neg W \wedge \neg F \wedge \neg M \\ \equiv & W \wedge \neg F \wedge \neg M \end{aligned}$$

$$\text{Klauselform: } \{\{W\}, \{\neg F\}, \{\neg M\}\}$$

Insgesamt erhalten wir also die Klauselmengen

$$\{\{H, K, M\}, \{\neg W, \neg K\}, \{\neg H, F\}, \{W\}, \{\neg F\}, \{\neg M\}\}$$

Daraus leiten wir die leere Klausel wie folgt ab:



zu Selbsttestaufgabe 3.82 (Diätplan) Wir kürzen die Nahrungsmittel mit ihren Anfangsbuchstaben A, M, S, K, T, B ab. Im Folgenden übertragen wir die Informationen des Gesprächs in aussagenlogische Formeln:

...wenn ich einen Apfel esse, muss ich auch einen Salzhering nehmen. $A \Rightarrow S$

Esse ich eine Banane, muss ich eine Scheibe Knäckebrot hinterher essen – oder ich lasse den Salzhering liegen $B \Rightarrow (K \vee \neg S)$

... wenn ich ein Tortenstück esse, darf ich kein Knäckebrot nehmen ... $T \Rightarrow \neg K$

Wenn ich einen Apfel esse, soll ich auch ein Tortenstück nehmen ... $A \Rightarrow T$

... wenn ich keinen Milchreis esse, soll ich eine Banane nehmen. $\neg M \Rightarrow B$

... auf jeden Fall einen Apfel. Keinen Milchreis ... $A \wedge \neg M$

Insgesamt erhalten wir die folgende aussagenlogische Formel:

$$(A \Rightarrow S) \wedge (B \Rightarrow (K \vee \neg S)) \wedge (T \Rightarrow \neg K) \wedge (A \Rightarrow T) \wedge (\neg M \Rightarrow B) \wedge A \wedge \neg M$$

Nach Auflösen der Implikationspfeile ist die Formel bereits in konjunktiver Normalform:

$$(\neg A \vee S) \wedge (\neg B \vee K \vee \neg S) \wedge (\neg T \vee \neg K) \wedge (\neg A \vee T) \wedge (M \vee B) \wedge A \wedge \neg M$$

Die Klauselform ist also

$$\{\{\neg A, S\}, \{\neg B, K, \neg S\}, \{\neg T, \neg K\}, \{\neg A, T\}, \{M, B\}, \{A\}, \{\neg M\}\}$$

Hieraus kann man einen Widerspruch ableiten, wie in Abbildung L.1 gezeigt.

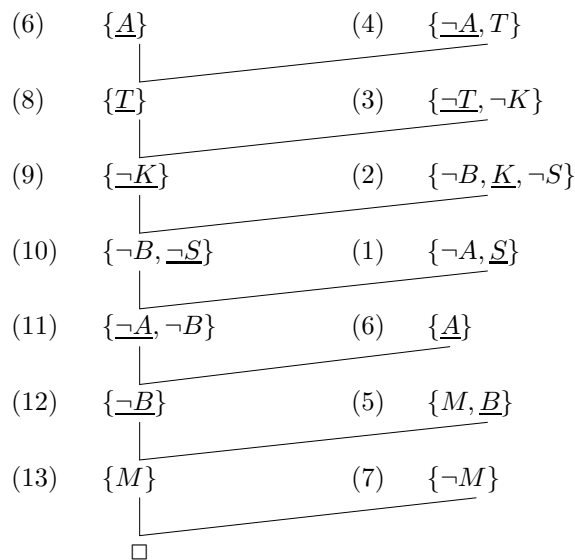


Abbildung L.1 Resolutionsbeweis zu Selbsttestaufgabe 3.82

zu Selbsttestaufgabe 3.83 (Trainingsprogramm)

1. Die Aussagen sind wie folgt formalisierbar:

Wenn Sie das Lauftraining buchen, dann sollten Sie auch den Kurs im Krafraum belegen oder das Hanteltraining.

$$(1) \quad L \Rightarrow (K \vee H)$$

Wenn Sie den Schwimmkurs nicht besuchen, können Sie auch nicht am Aqua-Jogging teilnehmen.

$$(2) \quad \neg S \Rightarrow \neg A$$

Schwimmen und Hanteltraining sind in diesem Semester nicht gleichzeitig buchbar.

$$(3) \quad \neg(S \wedge H)$$

Wollen Sie Tennis spielen, dann brauchen Sie sowohl das Lauftraining als auch den Aqua-Jogging-Kurs.

$$(4) \quad T \Rightarrow (L \wedge A)$$

In Klauselform werden diese Formeln folgendermaßen dargestellt:

$$(1) \quad \{\neg L, K, H\}$$

$$(2) \quad \{S, \neg A\}$$

$$(3) \quad \{\neg S, \neg H\}$$

$$(4a) \quad \{\neg T, L\}$$

$$(4b) \quad \{\neg T, A\}$$

Die Aussage von Robert entspricht der aussagenlogischen Formel

$$(5) \quad T \Rightarrow K$$

bzw. der Klausel

$$(5) \quad \{\neg T, K\}$$

2. Die Negation von Roberts Aussage (5) ist gegeben durch

$$\neg(T \Rightarrow K) \equiv T \wedge \neg K$$

wobei dies in Klauselform den beiden Klauseln

$$(5a) \quad \{T\}$$

$$(5b) \quad \{\neg K\}$$

entspricht. Wir fügen daher diese beiden Klauseln (5a) und (5b) der ursprünglichen Klauselmengenge hinzu und leiten die leere Klausel ab (siehe Abbildung L.2).

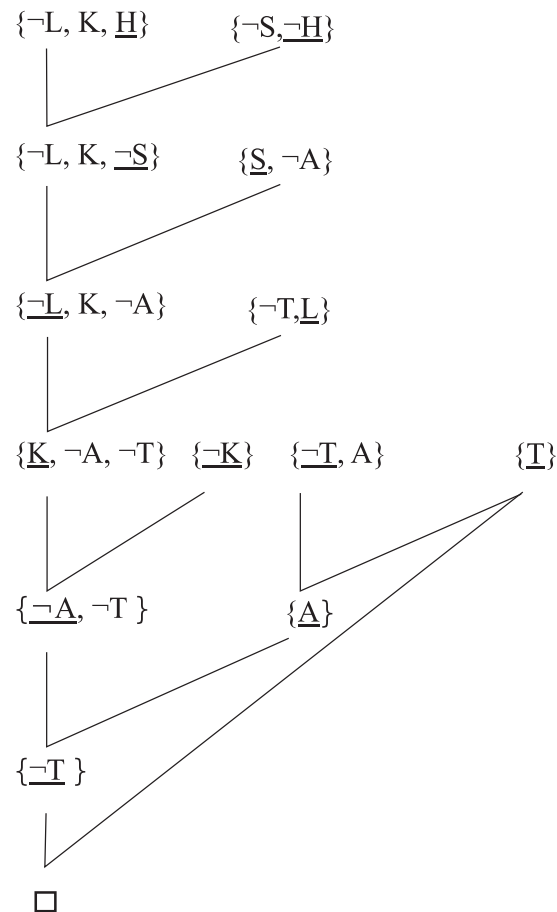


Abbildung L.2 Resolutionsbeweis zu Selbsttestaufgabe 3.83

zu Selbsttestaufgabe 3.84 (Allgemeingültigkeit)

1.

$$\begin{aligned}
 F &= (\neg(A \Rightarrow (B \vee C)) \Rightarrow ((B \wedge C) \Rightarrow A)) \\
 &\equiv (A \Rightarrow (B \vee C)) \vee ((B \wedge C) \Rightarrow A) \\
 &\equiv \neg A \vee B \vee C \vee \neg(B \wedge C) \vee A \\
 &\equiv \neg A \vee B \vee C \vee \neg B \vee \neg C \vee A
 \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass die Formel in der letzten Zeile stets wahr ist, da schon (z.B.) $A \vee \neg A = \text{true}$ ist.

2. Die Wahrheitstafel zur Auswertung von F :

A	B	C	$B \vee C$	$A \Rightarrow (B \vee C)$	$\neg(A \Rightarrow (B \vee C))$	$B \wedge C$	$(B \wedge C) \Rightarrow A$	F
0	0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1

Die letzte Spalte enthält nur Einsen, d.h., F ist für jede aussagenlogische Interpretation wahr.

zu Selbsttestaufgabe 3.86 (Falsifizierbarkeit) Zu einer prädikatenlogischen Interpretation I gehört zunächst einmal ein Universum U , auf dessen Objekte sich die Formeln und Terme beziehen können. U bestehe in diesem Fall z.B. aus einer Menge von Tieren, die u.a. Flipper, den Delphin, und Karl, den Karpfen, enthält:

$$\text{Flipper}, \text{Karl} \in U.$$

In Analogie zum aussagenlogischen Fall nehmen wir die folgende Zuordnung vor:

$$\begin{aligned} A(x) \equiv \text{Delphin}(x) & : x \text{ ist ein Delphin} \\ B(x) \equiv \text{Fisch}(x) & : x \text{ ist ein Fisch} \\ C(x) \equiv \text{Teichbewohner}(x) & : x \text{ ist ein Teichbewohner} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \llbracket \text{Delphin}(\text{Flipper}) \rrbracket_I &= \text{true} \\ \llbracket \text{Delphin}(\text{Karl}) \rrbracket_I &= \text{false} \\ \llbracket \text{Fisch}(\text{Flipper}) \rrbracket_I &= \text{false} \\ \llbracket \text{Fisch}(\text{Karl}) \rrbracket_I &= \text{true} \\ \llbracket \text{Teichbewohner}(\text{Flipper}) \rrbracket_I &= \text{false} \\ \llbracket \text{Teichbewohner}(\text{Karl}) \rrbracket_I &= \text{true} \end{aligned}$$

Mit diesen Informationen können wir die Formel

$$(\neg(\forall x A(x) \Rightarrow (B(x) \vee C(x)))) \Rightarrow (\forall y (B(y) \wedge C(y)) \Rightarrow A(y))$$

in der speziellen Interpretation auswerten:

$$\llbracket \forall x \text{Delphin}(x) \Rightarrow (\text{Fisch}(x) \vee \text{Teichbewohner}(x)) \rrbracket_I = \text{false}$$

denn für das Individuum *Flipper* ist

$$\llbracket \text{Delphin}(\text{Flipper}) \Rightarrow (\text{Fisch}(\text{Flipper}) \vee \text{Teichbewohner}(\text{Flipper})) \rrbracket_I = \text{false}$$

Also ist

$$\llbracket \neg(\forall x \textit{Delphin}(x) \Rightarrow (\textit{Fisch}(x) \vee \textit{Teichbewohner}(x))) \rrbracket_I = \textit{true}$$

Weiterhin ist

$$\llbracket \forall y (\textit{Fisch}(y) \wedge \textit{Teichbewohner}(y)) \Rightarrow \textit{Delphin}(y) \rrbracket_I = \textit{false}$$

wegen

$$\llbracket (\textit{Fisch}(\textit{Karl}) \wedge \textit{Teichbewohner}(\textit{Karl})) \Rightarrow \textit{Delphin}(\textit{Karl}) \rrbracket_I = \textit{false}$$

Damit reduziert sich die Implikation in der Ausgangsformel also auf $\textit{true} \Rightarrow \textit{false}$, ist also insgesamt $\textit{false}$.