

**Konsensuale Effizienzbewertung und –verbesserung  
Untersuchungen mittels der Data Envelopment Analysis (DEA)**

Wilhelm Rödder und Elmar Reucher

Diskussionsbeitrag Nr. 443

September 2009

Diskussionsbeiträge der Fakultät für Wirtschaftswissenschaft  
der FernUniversität in Hagen

Herausgegeben vom Dekan der Fakultät

Alle Rechte liegen bei den Verfassern

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Präliminarien</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Vom Selbstlob zur Kreuzeffizienzmatrix</b>	<b>7</b>
3.1	Divergierende Interessen beim Selbstlob . . . . .	7
3.2	Die Kreuzeffizienzmatrix – ein Ausweg? . . . . .	9
3.3	Effizienzverbesserungspotentiale aus Sicht eines Peers . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Inputveränderung einer DMU <math>l</math> bei Gewichtung eines Peers <math>k</math></b>	<b>13</b>
4.1	Radiale Inputreduktion . . . . .	13
4.2	Variable Inputveränderungen . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Auswahl eines Peers</b>	<b>20</b>
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>23</b>
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>25</b>

## Tabellenverzeichnis

1	Inputs und Output von 14 DMUs. . . . .	8
2	In- und Outputs von fünf DMUs. . . . .	10
3	Gewichte der einzelnen DMUs mit $\epsilon = 10^{-5}$ . . . . .	11
4	Kreuzeffizienzmatrix. . . . .	11
5	Matrix verbesserter Produktivitäten. . . . .	14
6	Lösungen von (H2) mit jeweiligem Peer $k = 1, \dots, 5$ . . . . .	17
7	Matrix maximaler Produktivitäten. . . . .	18

---

# 1 Einleitung

Die Data Envelopment Analysis (DEA) ist eine quantitative Methode zur vergleichenden Effizienzbewertung sogenannter Decision Making Units (DMUs). DMUs können sein: Projekte oder Programme, Fabriken, Behörden, Körperschaften und insbesondere auch nicht erwerbswirtschaftlich orientierte Betriebe. Die vergleichende Effizienzanalyse erfolgt durch eine Gegenüberstellung von gewichteten Outputs und Inputs der jeweiligen DMUs [8], [9], [10], [11]. Sie läuft grob in folgenden Schritten ab:

- Auswahl der zu vergleichenden DMUs.
- Auswahl der zum Vergleich heranzuziehenden Input- bzw. Outputgrößen.
- Auswahl des DEA-Modells. Hierbei unterscheiden wir zwischen einem Modell konstanter und einem Modell variabler Skalenerträge. Während bei Letzterem Skaleneffekte 'herausgerechnet' und Unternehmen lediglich hinsichtlich ihrer technischen Effizienz verglichen werden, werden sie bei der Ersteren hinsichtlich ihrer technischen und Skaleneffizienz verglichen. Aus beiden Größen sind durch Division die reinen Skaleneffekte ableitbar.
- Empirische Erhebung der In- und Outputs.
- Effizienzbewertung einer jeden DMU unter für sie optimalen Bedingungen, je nach ausgewähltem Modell. Diese Vorgehensweise wird in der Literatur 'self-appraisal' genannt; die Effizienzwerte liegen stets zwischen 0 und 1.
- Für eine ineffiziente Unternehmung werden Vorschläge unterbreitet, wie sie durch Reduktion ihres Inputs (inputorientiert), Vergrößerung ihres Outputs (outputorientiert) oder Kombinationen davon ihre Situation

verbessern kann. Hierbei wird weiterhin unterschieden zwischen radialen Veränderungen oder sogar darüberhinaus sich anschließender Eliminierung partieller Ineffizienzen.

Die DEA erfreut sich in den letzten Jahren großer Beliebtheit, was sich in einer Vielzahl von verschiedenen Anwendungen zeigt [3], [5], [6], [10]. Jedoch werden auch Kritikpunkte laut insofern, als die selbstlobende Einschätzung der eigenen (In)Effizienz und die sich daraus ergebenden Veränderungen unter keinem einheitlichen Gesichtspunkt erfolgen. Vielmehr orientiert sich jede ineffiziente DMU an ihren best-practise-Einheiten und strebt zwecks Effizienzverbesserung diesen nach. Bereits früh haben Doyle und Green [7] und später dann auch Reucher et. al [13] darauf hingewiesen, dass die bloße Ausrichtung auf best-practise-DMUs die gesamte zur Verfügung stehende Information nicht ausschöpft. Ihre Überlegungen führen zur so genannten Kreuzeffizienzmatrix, in der die empirischen Input- Outputdaten aller DMUs bezüglich aller self-appraisal-Optimalgewichte ausgewertet sind. Unseres Erachtens beschreiben die genannten Autoren hier einen interessanten Weg, ohne ihn jedoch konsequent zu Ende zu gehen. Zwar erhalten sie durch Auswertung der Matrix unter Anwendung verschiedener Bewertungsprinzipien diverse Rankings, jedoch fehlt es an Vorschlägen zur Effizienzverbesserung der DMUs. In diesem Beitrag wollen wir diese Lücke schließen. Die ebenfalls in den genannten Arbeiten beschriebene Idee, eine DMU als Peer zu bestimmen und sein Ranking zur allgemeinen Bewertungsgrundlage zu machen, soll hier wieder aufgegriffen und vertieft werden. Wir werden also in diesem Beitrag erweiterte Vorschläge für die Auswahl eines Peers ebenso erarbeiten wie verallgemeinerte, über Radial- und Partialveränderungen hinausgehende Effizienzverbesserungen. Hierbei beschränken wir uns auf das Modell konstanter Skalenerträge; die Übertragung der für diesen Fall erarbeiteten Ergebnisse auf das Modell variabler Skalenerträge ist zukünftigen Arbeiten vorbehalten.

Das Papier ist wie folgt aufgebaut: Im zweiten Kapitel werden die verwendete

ten DEA-Grundmodelle, die Envelopment- und die Multiplierform, und ihre Beziehungen kurz wiederholt. Im weiteren Verlauf des Beitrags werden die durch Dualisierung bzw. Variablentransformation ineinander überführbaren Modelle immer wieder benötigt, so dass diese Wiederholung hier angebracht erscheint. In Kapitel 3.1 wird zunächst an einem anschaulichen Beispiel die Schwäche der Effizienz 'Selbsteinschätzung' illustriert. Ab Abschnitt 3.2 wird dann auf ein vierdimensionales Beispiel (2 Inputs, 2 Outputs) abgehoben. Für dieses Beispiel wird zunächst die Kreuzeffizienzmatrix bestimmt und ihre Aussagestärke dargelegt. Es erfolgt ein Hinweis auf die bereits in der Einleitung erwähnten Auswertungsmöglichkeiten dieser Matrix. In 3.3 wird kritisch hinterfragt, wie denn nun eine ineffiziente DMU mit solcher Information verfahren solle. Schließlich liefert das Ranking eines noch so kompetenten Peers noch keinen Hinweis darauf, wie denn nun Ineffizienzen zu beheben seien. Das geschieht in Kapitel 4. Dazu wird in 4.1 ein auf radialer Inputreduktion basierendes Modell vorgestellt, welches eine Effizienzverbesserung einer Wirtschaftseinheit – jedoch aus Sicht des Peers – liefert. Bei genauerer Betrachtung besteht eine große Ähnlichkeit zu dem Grundmodell in der Envelopmentform aus Kapitel 2. Aus diesem Grunde wird in 4.2 ein beliebige Inputvariationen erlaubendes Modell entwickelt, welches erfolgreich die Idee eines Peers mit dem berechtigten Interesse der Effizienzverbesserung jeder einzelnen DMU verknüpft. Die Vorgehensweise wird an dem bereits in Abschnitt 3.2 beschriebenen vierdimensionalen Beispiel exemplifiziert. Ergebnisse sind dann die maximalen Effizienzen unter jedem potentiellen Peer, sowie die dazu gehörigen optimalen Inputs. Bei den gewählten 5 DMUs sind das  $5 \cdot 5$  Effizienzen mit den dazugehörigen optimalen Inputs – die Outputs bleiben jeweils konstant. In Kapitel 5 werden die numerischen Ergebnisse aus Kapitel 4 interpretiert, und es erhebt sich erneut die Frage nach der vernünftigen Wahl eines Peers. Wurde diese Frage bisher lediglich aus der Kreuzeffizienzmatrix abgeleitet, kann sie jetzt vor dem Hintergrund der unter dem erweiterten Modell sich ergebenden Effizienzen aller DMUs bei potentiell-

len Peers neu beantwortet werden. Eine Zusammenfassung und ein Ausblick schließen die Arbeit ab.

## 2 Präliminarien

Gegeben seien  $j = 1, \dots, J$  Wirtschaftseinheiten (DMUs) mit jeweils  $M$  Inputfaktoren und  $S$  Outputgrößen, deren zeitraumbezogene empirische Ausprägungen  $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, \dots, x_{jm}, \dots, x_{jM})$  bzw.  $\mathbf{y}_j = (y_{j1}, \dots, y_{js}, \dots, y_{jS})$  sind. Aus diesen Aktivitäten  $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j), j = 1, \dots, J$  lässt sich unter Einhaltung gewisser Axiome der Technologieraum  $T$  aufspannen, was Banker, Charnes und Cooper in [2], Kapitel 3 und 4 zeigen. In Anlehnung an Shephards Vorüberlegungen [14] können nun folgende Optimierungsaufgaben formuliert werden, siehe wiederum [2]. Für jedes  $k \in \{1, \dots, J\}$  löse

$$\begin{aligned} h_k^* &= \min h_k \\ \text{u.d.N.:} \quad h_k \mathbf{x}_k &\geq \alpha_k \sum_j \lambda_{kj} \mathbf{x}_j & \text{(E)} \\ \mathbf{y}_k &\leq \alpha_k \sum_j \lambda_{kj} \mathbf{y}_j \\ \alpha_k &> 0, \lambda_{kj} \geq 0. \end{aligned}$$

Aufgabe (E) heißt **Envelopmentform**. Sie misst für die DMU  $k$  ihre Effizienz unter der Annahme konstanter Skalenerträge.

$h_k^*$  bezeichnet in (E) den Faktor, mit dem DMU  $k$  sämtliche ihrer Inputs  $\mathbf{x}_k$  gleichmäßig, also radial, reduzieren muss (bei unverändertem Output  $\mathbf{y}_k$ ), um effizient zu werden, und dabei in dem von allen Aktivitäten aller DMUs aufgespannten Technologieraum  $T$  bleibt. Gilt  $h_k^* = 1$ , so ist DMU  $k$  schon effizient. Für  $h_k^* < 1$  ist sie noch ineffizient und kann erst durch die Inputreduktion von  $\mathbf{x}_k$  zu  $\mathbf{x}'_k$  mit  $\mathbf{x}'_k = h_k^* \mathbf{x}_k$  effizient werden. Das entsprechende outputorientierte Modell sowie die jeweiligen Varianten bei variablen Skalenerträgen findet der Leser beispielsweise in [2], [6]. (E) ist nicht linear, mittels

der Variablentransformation  $\mu_{kj} = \alpha_k \lambda_{kj}$  ergibt sich die lineare Aufgabe (P).

$$\begin{aligned} h_k^* &= \min h_k \\ \text{u.d.N.: } h_k \mathbf{x}_k - \sum_j \mu_{kj} \mathbf{x}_j &\geq 0 \\ \sum_j \mu_{kj} \mathbf{y}_j &\geq \mathbf{y}_k \\ \mu_{kj} &\geq 0 \quad \forall j \end{aligned} \quad (\text{P})$$

Die Autoren von [2] bezeichnen (P) als **primales Problem**, zu dem das dazu duale (D) lautet:

$$\begin{aligned} \text{eff}_k^* &= \max \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_k \\ \text{u.d.N.: } \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_k &= 1 \\ \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_j - \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_j &\leq 0 \quad \forall j \\ \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{D})$$

Die Forderungen der Nichtnegativität der entsprechend dimensionierten Gewichtungsvektoren  $\mathbf{V}_k$  und  $\mathbf{U}_k$  für die Inputs und Outputs sind dabei komponentenweise zu verstehen. Aufgabe (D) heißt auch **Multiplifierform**, die nach erneuter Variablentransformation mit einem beliebig positiven  $t_k > 0$  und  $\mathbf{v}_k = t_k^{-1} \mathbf{V}_k$  sowie  $\mathbf{u}_k = t_k^{-1} \mathbf{U}_k$  – wegen  $\mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_k = t_k^{-1}$  sowie  $\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}_j - \mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_j \leq 0$  – zu der Aufgabe (Q) führt.

$$\begin{aligned} \text{eff}_k^* &= \max \frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}_k}{\mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_k} \\ \text{u.d.N.: } \frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{y}_j}{\mathbf{v}_k^T \mathbf{x}_k} &\leq 1 \quad \forall j \\ \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{Q})$$

Die Vermeidung partieller Ineffizienzen in (E) bzw. (P) durch Wahl strikt positiver Variabler ( $\geq \epsilon > 0$ ) in (D) bzw. (Q) ist Gegenstand zahlreicher Veröffentlichungen wie beispielsweise [1], [2]; die Überlegungen hierzu werden als bekannt vorausgesetzt. In dieser Arbeit werden – wo nötig – partielle Ineffizienzen vermieden. Auch die Rücktransformationen von (Q) zu (D) zu (P) zu (E) hält die entsprechende Literatur bereit [2], [4], so dass alle vier



Modelle äquivalent sind und den gleichen optimalen Zielfunktionswert aufweisen.

Da die Inputreduktion in den folgenden Kapiteln eine gewichtige Rolle spielt, seien ihre Auswirkungen kurz beschrieben.

$k \in \{1, \dots, J\}$  sei wieder der Index der ausgezeichneten DMU. Sei  $h_k^*$ ,  $\boldsymbol{\mu}_k^*$  optimale Lösung von (P), sei  $\mathbf{U}_k^*$ ,  $\mathbf{V}_k^*$  optimale Lösung von (D) und sei  $\mathbf{u}_k^*$ ,  $\mathbf{v}_k^*$  optimale Lösung von (Q) mit  $h_k^* = \text{eff}_k^* < 1$ . Aus der Ineffizienz der DMU  $k$  folgt unmittelbar

$$\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_k - \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_k < 0,$$

so dass die  $k$ -te Restriktion in (D) nicht bindend ist. Aufgrund der Dualität zwischen (D) und (P) gilt somit wegen der Complementary Slackness-Bedingung  $\mu_{kk}^* = 0$ . Wähle  $\mathbf{x}'_k = h_k^* \mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_j$  für  $j \neq k$  und betrachte das duale Paar (P') und (D').

$$\begin{aligned} h'_k &= \min h_k \\ \text{u.d.N.: } h_k \mathbf{x}'_k - \sum_j \mu_{kj} \mathbf{x}'_j &\geq 0 & (\text{P}') \\ \sum_j \mu_{kj} \mathbf{y}_j &\geq \mathbf{y}_k \\ \mu_{kj} &\geq 0 \quad \forall j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{eff}'_k &= \max \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_k \\ \text{u.d.N.: } \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}'_k &= 1 \\ \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_j - \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}'_j &\leq 0 \quad \forall j & (\text{D}') \\ \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dann haben diese beiden Aufgaben optimale Lösungen  $h'_k$ ,  $\boldsymbol{\mu}'_k$  und  $\mathbf{U}'_k$ ,  $\mathbf{V}'_k$  mit  $h'_k = h_k^*/h_k^* = 1$ ,  $\mu'_{kj} = \mu_{kj}^* \forall j$  sowie  $\mathbf{V}'_k = (1/h_k^*) \mathbf{V}_k^*$  und  $\mathbf{U}'_k = (1/h_k^*) \mathbf{U}_k^*$ .

Für (P') sieht man das sofort wegen

$$h'_k \mathbf{x}'_k = h_k^* \mathbf{x}_k \quad \text{und}$$

$$\sum_{j \neq k} \mu'_{kj} \mathbf{x}'_j + 0 \mathbf{x}'_k = \sum_{j \neq k} \mu_j^* \mathbf{x}_j + 0 \mathbf{x}_k.$$

Für (D') hat man zunächst

$$\mathbf{V}'_k{}^T \mathbf{x}'_k = \frac{1}{h_k^*} \mathbf{V}_k^{*T} h_k^* \mathbf{x}_k = 1.$$

Weiterhin gilt

$$\mathbf{U}'^T \mathbf{y}_j - \mathbf{V}'_k{}^T \mathbf{x}'_j \leq 0 \quad \forall j \neq k$$

und speziell

$$\mathbf{U}'^T \mathbf{y}_k - \mathbf{V}'_k{}^T \mathbf{x}'_k = \frac{1}{h_k^*} \mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_k - 1 = 1 - 1 = 0,$$

womit die  $k$ -te Restriktion in (D') jetzt bindend ist. Die Effizienz von  $k$  ist damit durch die radiale Inputreduktion zu 1 geworden.

### 3 Vom Selbstlob zur Kreuzeffizienzmatrix

#### 3.1 Divergierende Interessen beim Selbstlob

Um die Schwächen des Selbstlobprinzips aufzuzeigen, wählen wir ein Beispiel mit 14 DMUs, zu denen jeweils 2 Inputs bei gleichem Output = 1 bekannt sind. Die entsprechenden Daten sind in der folgenden Tabelle 1 zusammengefasst.

DMU $j$	1	2	3	4	5	6	7
$x_{1j}$	1.0	1.5	3.5	6.0	11.5	1.5	1.75
$x_{2j}$	6.0	4.0	2.0	1.0	0.5	6.0	5.5
$y_j$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
DMU $j$	8	9	10	11	12	13	14
$x_{1j}$	1.5	2.5	3.0	4.0	5.5	9.5	10.5
$x_{2j}$	5.0	4.5	3.0	3.0	2.5	2.0	1.5
$y_j$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Tabelle 1: Inputs und Output von 14 DMUs.

Der konstante Output = 1 erlaubt eine Visualisierung im  $(x_1, x_2)$ -Raum. Abbildung 1 zeigt den effizienten Rand der Technologie, die Aktivitäten der einzelnen DMUs sowie deren durch radiale Projektionen auf den Technologierand entstehende (virtuelle) Referenzeinheiten.

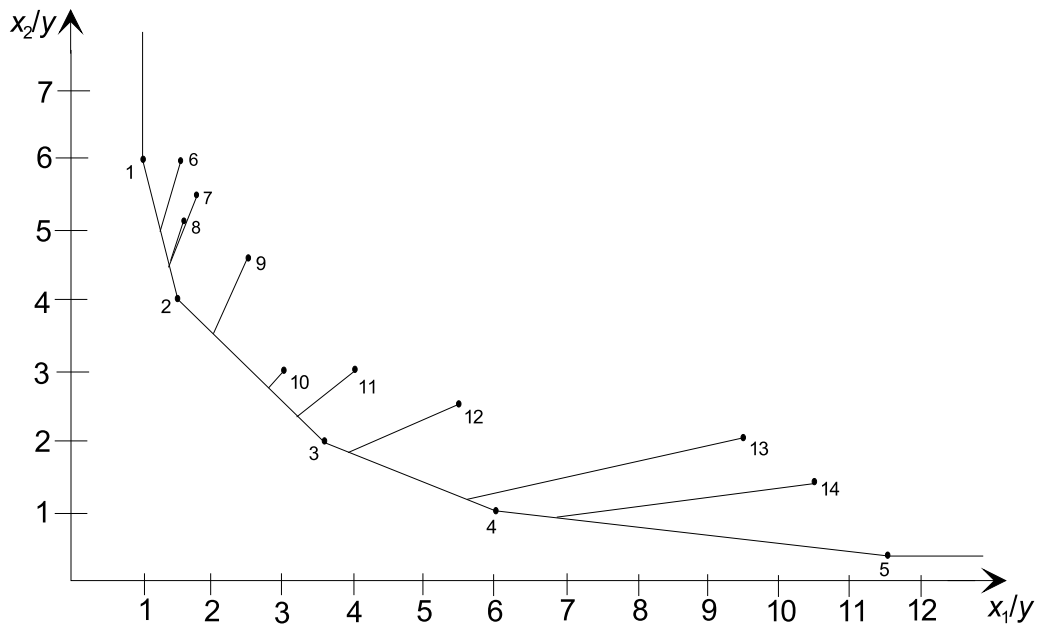


Abbildung 1: DMUs mit 2 Inputs und 1 Output.

Auffällig ist bei dieser Darstellung die Clusterbildung zu in diesem Fall 4 Gruppen,  $\{1, 2, 6, 7, 8\}$ ,  $\{2, 3, 9, 10, 11\}$ ,  $\{3, 4, 12, 13\}$ ,  $\{4, 5, 14\}$ , was in Folge zu einer Angleichung an die jeweiligen best-practise-Einheiten  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,

$\{3, 4\}$  und  $\{4, 5\}$  dieser Cluster führt.

Eine solche Vorgehensweise kann zumindest nicht in jedem Fall für eine vergleichende Effizienzanalyse und auch nicht für die sich anschließende Inputreduktion von Vorteil sein. Betonen doch alle DMUs ihre Sympathie für ihnen ähnliche best-practise-Einheiten und gleichen sich diesen an.

Eine einheitliche Sicht, so wie sie beispielsweise bei der Bewertung mehrerer Fabriken in einem Konzern oder mehrerer Krankenhäuser in einem Bundesland wünschenswert wäre, ist nicht gewährleistet. Dieser Schwäche wird im weiteren Verlauf der Abhandlungen Abhilfe geschaffen.

### 3.2 Die Kreuzeffizienzmatrix – ein Ausweg?

Der mit der DEA vertraute Leser weiß natürlich, dass für jedes  $k$  nach Lösung der Aufgabe (Q) jeweils nur die bindenden Restriktionen, d.h. die Restriktionen mit Produktivität = 1, für die weiteren Betrachtungen genutzt werden. Die entsprechenden Gleichungen bestimmen nämlich die best-practise-Unternehmen. Alle anderen Quotienten – der so genannten other-practise-Unternehmen – fallen unter den Tisch. Eingang finden diese in die Kreuzeffizienzmatrix, die das gesamte Datenmaterial *aller* verfügbaren Quotienten zur Verfügung stellt. Eine Kreuzeffizienz  $eff_{kl}$  ist eben der Quotient der Aufgabe (Q) für den konkreten Input/Output der DMU  $l$  unter der optimalen Gewichtung von  $k$ . Der mit diesen Überlegungen weniger vertraute Leser sei verwiesen auf Doyle und Green oder Reucher et. al. [7], [13].

Oftmals sind die optimalen Gewichte  $(\mathbf{V}_k^*, \mathbf{U}_k^*)$  als Lösungen der Envelopment-Form (Q) bzw. (D) für eine DMU  $k$  nicht eindeutig, was i. A. auch zu unterschiedliche Kreuzeffizienzen  $eff_{kl}$ ,  $k \neq l$ , führt. Zur Bestimmung einer Kreuzeffizienzmatrix schlagen Doyle und Green daher vor, noch eine weitere Optimierungsaufgabe zu lösen, bei der eine bestimmte Philosophie zur Bestimmung einer optimalen Gewichtung von  $k$  verfolgt wird [7],

Seite 570ff.. Da in diesem Beitrag die Forderung nach einer konsensualen Bewertung für alle DMUs im Fokus des Interesses steht, ist folgende Forderung für den Aufbau einer Kreuzeffizienzmatrix offenbar sinnvoll: Bestimme die Gewichte  $(\mathbf{V}_k^*, \mathbf{U}_k^*)$  für eine DMU  $k$  so, dass sie damit jede DMU  $l$  'möglichst' hoch bewertet. Dieser Forderung wird folgende lineare Optimierungsaufgabe  $(D^*)$  gerecht.

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_j s_j \\
 \text{u.d.N.:} \quad & \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_k = 1 \\
 & \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_j - \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_j \leq 0 \quad \forall j \quad (D^*) \\
 & \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_k = \text{eff}_k^* \\
 & \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_j - \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}_j + s_j \geq 0 \quad \forall j \\
 & \mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k \geq \mathbf{0}, s_j \geq 0.
 \end{aligned}$$

$\text{eff}_k^*$  bezeichnet den Zielfunktionswert von  $(D)$ , es ist die Effizienz von DMU  $k$  gemäß Selbstbewertung. Auch die Lösung von  $(D^*)$  wollen wir mit  $(\mathbf{V}_k^*, \mathbf{U}_k^*)$  bezeichnen, schließlich ist sie lediglich eines der alternativen Optima der Aufgabe  $(D)$ .

Für ein Beispiel mit zwei Inputs und zwei Outputs haben wir die entsprechenden Berechnungen durchgeführt.

### Beispiel 1

Gegeben seien fünf DMUs ( $j = 1, \dots, 5$ ) mit jeweils zwei In- und Outputs  $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, x_{j2})$ ,  $\mathbf{y}_j = (y_{j1}, y_{j2})$ , die in Tabelle 2 aufgelistet sind.

DMU $j$	$x_{j1}$	$x_{j2}$	$y_{j1}$	$y_{j2}$
1	2.00	5.00	1.00	2.00
2	2.00	4.00	2.00	3.00
3	8.00	5.00	2.00	2.00
4	3.00	4.00	1.00	2.00
5	6.00	2.00	2.00	1.00

Tabelle 2: In- und Outputs von fünf DMUs.

Nach Lösen der Aufgabe ( $D^*$ ) ergeben sich für jede DMU  $k = 1, \dots, 5$  optimale Gewichte  $\mathbf{V}_k^* = (V_{k1}^*, V_{k2}^*)$  und  $\mathbf{U}_k^* = (U_{k1}^*, U_{k2}^*)$  wie in Tabelle 3. Schließlich errechnet man für eine konkrete DMU  $l$  die Kreuzeffizienz  $eff_{kl}$  zu  $eff_{kl} = \frac{\mathbf{U}_k^* \mathbf{y}_l}{\mathbf{V}_k^* \mathbf{x}_l}$ . Die Matrix aller Kreuzeffizienzen  $(eff_{kl})_{JJ}$  findet der Leser in Tabelle 4.

DMU $k$	$V_{k1}$	$V_{k2}$	$U_{k1}$	$U_{k2}$
1	0.50	$\epsilon$	$\epsilon$	0.33
2	$\epsilon$	0.25	0.13	0.25
3	$\epsilon$	0.20	0.10	0.20
4	$\epsilon$	0.25	$\epsilon$	0.33
5	0.10	0.20	0.50	$\epsilon$

Tabelle 3: Gewichte der einzelnen DMUs mit  $\epsilon = 10^{-5}$ .

DMU	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$k = 1$	0.67	1.00	0.17	0.44	0.11
$k = 2$	0.50	1.00	0.60	0.63	1.00
$k = 3$	0.50	1.00	0.60	0.63	1.00
$k = 4$	0.53	1.00	0.53	0.67	0.67
$k = 5$	0.42	1.00	0.56	0.45	1.00

Tabelle 4: Kreuzeffizienzmatrix.

Doyle und Green sowie Reucher et al. diskutieren nun ausgiebig, wie aus dieser Kreuzeffizienzmatrix mittels gewisser Prinzipien ein Peer bestimmt werden kann, der im weitesten Sinne die Interessen aller DMUs abdeckt. Es werden das Prinzip des fairsten Peers und das Prinzip des rücksichtsvollsten Peers diskutiert. Das Erste wählt den Peer  $k$ , bei dem das Zeilenminimum in der Kreuzeffizienzmatrix maximal ist. Das Zweite ist eine Anwendung der Minimum-Regret-Regel auf die Kreuzeffizienzmatrix. Hat man einen Peer, dient dessen Effizienzeinschätzung aller DMUs für ihre Reihung. Nicht Peer-orientierte Reihungen werden ebenfalls diskutiert, und dann beschränkt sich die Diskussion der letztgenannten Autoren auf die Frage der Stabilität der

einzelnen Reihungen, das heißt auf ihre Unabhängigkeit von dem jeweils gewählten Prinzip. Völlig offen bleibt hingegen die Frage, ob und wie eine ineffiziente DMU  $l$  ihre Effizienz aus Sicht eines Peers  $k$  verbessern kann. Das ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

### 3.3 Effizienzverbesserungspotentiale aus Sicht eines Peers

Der Leser mag für die folgenden Überlegungen die Kreuzeffizienzmatrix aus Tabelle 4 heranziehen und folgende Beobachtungen überprüfen:

- DMU 5 schätzt sich selbst als effizient ein und wird auch von DMU 2 und DMU 3 als effizient gesehen. DMU 5 würde also auch unter den Peers 2 oder 3 keine Veranlassung sehen, ihre Effizienz zu verbessern.
- DMU 5 wird hingegen von DMU 1 und DMU 4 nicht als effizient angesehen. Es stellt sich somit die Frage, ob DMU 5 ihre Effizienz aus Sicht von DMU 1 oder DMU 4 noch verbessern kann. Diese Frage ist aus der Kreuzeffizienzmatrix nicht beantwortbar.
- Eine DMU, die sich selbst als ineffizient einschätzt, kann niemals von einem Peer als effizient bewertet werden, da die eigenen Gewichte optimal sind.
- DMU 1 schätzt sich selbst als nicht effizient ein und wird ebenso wenig von allen übrigen potentiellen Peers als ineffizient eingeschätzt. Zwar weiß DMU 1, dass sie ihren Input mit dem Faktor 0,67 reduzieren muss, um effizient zu werden. Welche Effizienz sich dann jedoch unter einem der potentiellen Peers 2 bis 5 einstellt, ist aus der Kreuzeffizienzmatrix wiederum nicht ersichtlich.

Die sich aus diesen Beobachtungen aufdrängende Frage ist nach einer Effizienzverbesserung einer ineffizienten DMU – aus Sicht eines vorher gewählten

Peers! Und weiterhin: Gibt es Konsens unter den DMUs bzgl. solcher Wahl eines Peers? Schließlich bewerten verschiedene Peers die Output/-Inputverhältnisse der DMUs aufgrund ihrer optimalen Gewichte verschieden. Das folgende Kapitel versucht, Antworten auf diese Fragen zu geben.

## 4 Inputveränderung einer DMU $l$ bei Gewichtung eines Peers $k$

### 4.1 Radiale Inputreduktion

Hier wird der Frage nachgegangen, inwieweit eine DMU  $l$  aus Sicht eines Peers  $k$  ihre Effizienz im Rahmen des von allen DMUs aufgespannten Technologieraums möglicherweise noch verbessern kann.

Es bezeichne DMU  $k$  wiederum einen (nicht zwingend effizienten) Peer, der gemäß den Aufgaben (P) und (D<sup>\*</sup>) seine optimalen Lösungen  $h_k^*$ ,  $\mu_k^*$  und  $\mathbf{U}_k^*$ ,  $\mathbf{V}_k^*$  bestimmt hat. (Die Wahl dieses Peers  $k$  erfolgte beispielsweise nach einem der Prinzipien aus Abschnitt 3.2). Desweiteren sei angenommen, DMU  $l$  sei aus Sicht von DMU  $k$  keine best-practise-Einheit, so dass sie im Gewichtungssystem von  $k$  ineffizient ist. Damit gilt also

$$\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l - \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l < 0 \text{ und somit } \mu_{kk}^* = 0.$$

Würde man nun  $\mathbf{x}_l$  zu

$$\mathbf{x}'_l = \mathbf{x}_l \cdot \frac{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l}{\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l},$$

reduzieren, so hätte man

$$\frac{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l}{\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}'_l} = 1.$$

Ob diese Inputreduktion allerdings bei festen Outputs technisch realisierbar ist, ist nicht gewährleistet. Um diese technische Realisierbarkeit zu garantieren, bedienen wir uns in Anlehnung an das Envelopmentmodell (P) der folgenden Aufgabe (H1).



$$\begin{aligned}
& \min p_l \\
\text{u. d. N. : } & \mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l - p_l \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_l \leq 0 \quad (\text{H1}) \\
& p_l \mathbf{x}_l - \sum_j \mu_{lj} \mathbf{x}_j \geq 0 \\
& \sum_j \mu_{lj} \mathbf{y}_j \geq \mathbf{y}_l \\
& \mu_{lj} \geq 0 \quad \forall j.
\end{aligned}$$

Offensichtlich garantieren die beiden letzten Gruppen der Restriktionen zusammen mit den Nichtnegativitätsbedingungen die technische Zulässigkeit, wohingegen die erste Restriktion redundant ist(!). Wir führen sie dennoch mit, da sie unmittelbar die Produktivität des  $l$  in den Gewichten des  $k$  bei Inputreduktion um den Faktor  $p_l$  erkennen lässt:  $\mathbf{U}_k^* \mathbf{y}_l / p_l \mathbf{V}_k^* \mathbf{x}_l$ .

Ist nämlich  $(p_l^0, \boldsymbol{\mu}_l^0)$  optimale Lösung von (H1), setzt man  $\mathbf{x}'_l = p_l^0 \mathbf{x}_l$  und hat damit die optimale radiale Inputreduktion erreicht. Es fällt jedoch auf, dass wegen der Redundanz der ersten Restriktion einfach die Aufgabe (P) der DMU  $l$  gerechnet und nach dieser klassischen radialen Inputreduktion ihre Produktivität in den Preisen des  $k$  ausgewiesen wird.

Die Bewertungen aller DMUs  $l$  durch potentielle Peers  $k$  nach ihren gemäß Selbstlob ermittelten radialen Inputreduktionen zeigt die Matrix der verbesserten Produktivitäten in Tabelle 5.

DMU	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$k = 1$	1.00	1.00	0.28	0.67	0.11
$k = 2$	0.75	1.00	1.00	0.94	1.00
$k = 3$	0.75	1.00	1.00	0.94	1.00
$k = 4$	0.80	1.00	0.89	1.00	0.67
$k = 5$	0.63	1.00	0.93	0.68	1.00

Tabelle 5: Matrix verbesserter Produktivitäten.

Im Vergleich zur Kreuzeffizienzmatrix in Tabelle 4 haben sich einige Einträge vergrößert. Damit kann man nun zwar die im letzten Abschnitt gestellte Fra-

ge der Effizienzverbesserung einzelner DMUs  $l$  unter einem Peer  $k$  beantworten, jedoch ist deren Effizienzverbesserung aus Sicht des  $k$  noch nicht ausgeschöpft. Der Nachweis dieser Aussage erfolgt im nächsten Abschnitt.

Wollte man dennoch die Vorgehensweise in (H1) umsetzen, stellt sich noch die Frage, wie sich nach Inputreduktion eines *ineffizienten* Peers  $k$  die Situation des  $l$  ändert. Zur Vermeidung von Interessenkonflikten wäre hier natürlich eine Nichtschlechterstellung des  $l$  wünschenswert. Um den Gedankenfluss an dieser Stelle nicht zu unterbrechen, verweisen wir den Leser für die Beantwortung dieser Frage auf den Anhang.

## 4.2 Variable Inputveränderungen

Bisher waren Effizienzverbesserungen ausschließlich (bei inputorientierter Sicht) durch radiale Inputreduktionen möglich. Diese strikte Forderung lässt sich jedoch durch Lösen folgender Aufgabe lockern, bei der der gesamte Inputvektor  $\mathbf{w}_l$  variabel gehalten wird. Diese Verallgemeinerung wird dadurch möglich, dass feste Input- und Outputpreise des Peers  $k$  bekannt sind. Die Aufgabe (H2) heißt nun

$$\begin{aligned}
 & \min \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{w}_l \\
 \text{u. d. N. : } & \mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l - \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{w}_l \leq 0 & \text{(H2)} \\
 & \mathbf{w}_l - \sum_j \mu_{lj} \mathbf{x}_j \geq 0 \\
 & \sum_j \mu_{lj} \mathbf{y}_j \geq \mathbf{y}_l \\
 & \mu_{lj} \geq 0 \quad \forall j.
 \end{aligned}$$

Wiederum garantieren die beiden unteren Gruppen der Restriktionen zusammen mit den Nichtnegativitätsbedingungen die technische Zulässigkeit von  $(\mathbf{w}_l, \mathbf{y}_l)$  gemäß der modifizierten Envelopmentform (P). Auch hier lässt sich aus der ersten Restriktion die Produktivität des  $l$  in den Preisen  $k$  darstellen, wobei diese Restriktion – wie schon in (H1) – redundant ist. Zur weiteren In-

terpretation von (H2) bedenke man, dass sowohl  $\mathbf{U}_k^*$  als auch  $\mathbf{y}_l$  – und damit auch  $\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l$  – fest sind. Durch die Minimierung der Zielfunktion wird also ein optimaler (nicht notwendigerweise minimaler!) Input bestimmt, der unter den Gewichten des Peers  $k$  die Effizienzverbesserung bestmöglich ausschöpft. Damit sind dann zwei Mängel behoben, die in dieser Arbeit bereits weiter oben benannt wurden: Die Effizienzen der DMUs  $l$  unter dem Peer  $k$  sind berechenbar und sie sind sogar optimal ausgeschöpft. Das Ergebnis wird eine Matrix maximaler Produktivitäten sein, in der jedes Element größer gleich als dem der Kreuzeffizienzmatrix in Tabelle 4 auf Seite 11 und sogar als dem der verbesserten Produktivitäten in Tabelle 5 auf Seite 14 ist. Um diese Anmerkungen zu verdeutlichen, wenden wir uns wieder dem vierdimensionalen Beispiel 1 zu.

### Beispiel 2

In Fortführung des Beispiels 1 sind in der folgenden Tabelle 6 für die potentiellen Peers  $k$  die Lösungen von (H2) für alle DMUs  $l$  dargestellt. In den jeweiligen Spalten stehen die optimierten Inputs  $\mathbf{w}_l^*$  und (unveränderten) Outputs  $\mathbf{y}_l$ , in der letzten Zeile die damit unter den Gewichten von Peer  $k$  sich ergebenden Effizienzen  $eff_{k,l}^*$ . Sämtliche Lösungen wurden mit der Software Lingo [12] ermittelt.

	DMU $l$				
Peer $k = 1$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
$w_{l1}^*$	1.33	2.00	2.00	1.33	2.00
$w_{l2}^*$	2.67	4.00	4.00	2.67	4.00
$y_{l1}$	1.00	2.00	2.00	1.00	2.00
$y_{l2}$	2.00	3.00	2.00	2.00	1.00
$eff_{k,l}^*$	1.00	1.00	0.67	1	0.33
Peer $k = 2$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
$w_{l1}^*$	1.33	2.00	4.00	1.33	6.00
$w_{l2}^*$	2.67	4.00	3.00	2.67	2.00
$y_{l1}$	1.00	2.00	2.00	1.00	2.00
$y_{l2}$	2.00	3.00	2.00	2.00	1.00
$eff_{k,l}^*$	0.94	1.00	1.00	0.94	1.00

	DMU $l$				
Peer $k = 3$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
$w_{l1}^*$	1.33	2.00	4.00	1.33	6.00
$w_{l2}^*$	2.67	4.00	3.00	2.67	2.00
$y_{l1}$	1.00	2.00	2.00	1.00	2.00
$y_{l2}$	2.00	3.00	2.00	2.00	1.00
$eff_{k,l}^*$	0.94	1.00	1.00	0.90	1.00
Peer $k = 4$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
$w_{l1}^*$	1.33	2.00	4.00	1.33	6.00
$w_{l2}^*$	2.67	4.00	3.00	2.67	2.00
$y_{l1}$	1.00	2.00	2.00	1.00	2.00
$y_{l2}$	2.00	3.00	2.00	2.00	1.00
$eff_{k,l}^*$	1.00	1.00	0.89	1.00	0.67
Peer $k = 5$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
$w_{l1}^*$	1.33	2.00	2.00	1.33	2.00
$w_{l2}^*$	2.67	4.00	4.00	2.67	4.00
$y_{l1}$	1.00	2.00	2.00	1.00	2.00
$y_{l2}$	2.00	3.00	2.00	2.00	1.00
$eff_{k,l}^*$	0.75	1.00	1.00	0.75	1.00

Tabelle 6: Lösungen von (H2) mit jeweiligem Peer  $k = 1, \dots, 5$ .

Wie sich bei konstanten Outputs die Inputs gegenüber der Ausgangssituation verändern, zeigt der Vergleich von Tabelle 6 und Tabelle 2 auf Seite 10. Wahlweise greifen wir Peer  $k = 1$  heraus; unter seinen Gewichten verändert DMU  $l = 1$  die Inputs von (2.00, 5.00) auf (1.33, 2.67), DMU  $l = 3$  von (8.00, 5.00) auf (2.00, 4.00), DMU  $l = 4$  von (3.00, 4.00) auf (1.33, 2.67) und DMU  $l = 5$  von (6.00, 2.00) auf (2.00, 4.00); bei DMU  $l = 2$  bleiben die Inputs unverändert. Die DMUs  $l$  wählen also, je nach Lage, Inputreduktion, -erhöhung oder -beibehaltung. Aus den Ergebnissen der Tabelle 6 resultiert die Matrix maximaler Produktivitäten in Tabelle 7.

Auch die Matrix maximaler Produktivitäten in Tabelle 7 bedarf einer kritischen Würdigung. Ihre Einträge sind – natürlich – alle größer oder gleich denen der Kreuzeffizienzmatrix in Tabelle 4 auf Seite 11 und auch denen der Matrix verbesserter Produktivitäten in Tabelle 5 auf Seite 14.

DMU	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$k = 1$	1.00	1.00	0.67	1.00	0.33
$k = 2$	0.94	1.00	1.00	0.94	1.00
$k = 3$	0.94	1.00	1.00	0.90	1.00
$k = 4$	1.00	1.00	0.89	1.00	0.67
$k = 5$	0.75	1.00	1.00	0.75	1.00

Tabelle 7: Matrix maximaler Produktivitäten.

Letzterer Tatbestand soll zweifach kommentiert werden: spaltenweise und zeilenweise.

Zunächst betrachte man beispielsweise Spalte  $l = 4$ . Obwohl es DMU  $l = 4$  bereits unter radialer Inputreduktion in Tabelle 5 gelungen war (self-appraisal), sich effizient zu machen, führte diese Inputreduktion aus Sicht der Peers  $k = 1$  und  $k = 5$  noch zu unbefriedigenden Bewertungen 0.67 bzw. 0.68. Erst die freie Variationsmöglichkeit der Inputs in Aufgabe (H2) lässt DMU  $l = 4$  nunmehr auch im Licht dieser Peers mit 1.00 und 0.75 besser darstellen; andere Spalten zeigen ähnliche Effekte. Nun zur zeilenweisen Betrachtung: Zeile  $k$  in den Tabellen 4, 5 und 7 zeigt jeweils die Effizienzen/Produktivitäten aller DMUs  $l$  unter optimalen Gewichten des Peers  $k$ ; in Tabelle 4 bei originalen Inputs der DMUs  $l$ , in Tabelle 5 bei reduzierten Inputs gemäß Aufgabe (H1) und in Tabelle 7 bei optimierten Inputs gemäß (H2). Das Hauptaugenmerk liegt auf Tabelle 7: Offensichtlich zeigen die Zeilen  $k = 2$  und  $k = 3$  durchgehend hohe Produktivitäten nahe 1, im Gegensatz zu den übrigen Zeilen. Kann daraus ein Schluss auf die Wahl eines oder mehrerer besten Peers gezogen werden? Mehr dazu in Kapitel 5.

Nachdem Aufgabe (H2) vorgestellt und anhand konkreter Daten exemplifiziert wurde, folgen nun einige wichtige Ergänzungen. So wollen wir wiederum – wie schon zum Ende von Abschnitt 4.1 – die Frage stellen, ob die Inputreduktion eines ineffizienten Peers seine Produktivitätsschätzungen der übrigen DMUs negativ beeinflusst. Außerdem sollen aus der Betrachtung des zu (H2) dualen Problems einige Schlüsse gezogen werden.

Zunächst also zum Problem der Stabilität der Produktivitätseinschätzungen der DMU  $l$  unter Gewichten des Peers  $k$ , falls Letzterer eine effizienzverbessernde Inputreduktion vornimmt.

Es sei also  $h_k^* < 1$  optimaler Zielfunktionswert von (P) auf Seite 5. Man ersetzt  $\mathbf{x}'_k = h_k^* \mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{x}'_l = \mathbf{x}_l$ ,  $l \neq k$  und berechnet die abgewandelte Aufgabe

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{w}_l \\ \text{u. d. N. : } & \mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l - \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{w}_l \leq 0 & (\text{H2}') \\ & \mathbf{w}_l - \sum_j \mu_{lj} \mathbf{x}'_j \geq 0 \\ & \sum_j \mu_{lj} \mathbf{y}_j \geq \mathbf{y}_l \\ & \mu_{lj} \geq 0 \quad \forall j. \end{aligned}$$

Es gilt dann folgender Satz.

**Satz 4.1** *Ist  $\mathbf{w}_l^0$  optimale Lösung von (H2) und  $\mathbf{w}'_l$  optimale Lösung von (H2'), so gilt*

$$\frac{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l}{\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{w}'_l} \geq \frac{\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l}{\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{w}_l^0}.$$

Zum Beweis dieses Satzes überlegt man, dass jede zulässige Lösung von (H2) auch zulässig ist für (H2'), da  $\mathbf{x}'_k \leq \mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_k$  für  $j \neq k$ . Daraus folgt  $\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{w}'_l \leq \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{w}_l^0$  und wegen konstantem  $\mathbf{U}_k^{*T} \mathbf{y}_l$  die Behauptung.

Die Hoffnung, dass sich durch Effizienzverbesserung des Peers keine Effizienzverschlechterung der von ihm bewerteten DMUs einstellt, hat sich mit Satz 4.1 bestätigt. Die Wahl eines Peers muss also nicht davon abhängen, ob er bereits effizient ist oder nicht.

Wir haben die Aufgabe (H2') für alle Peers  $k$  und alle DMUs  $l$  gerechnet und sind zu identischen Effizienzen wie bei der Lösung von (H2) gekommen.

Der restliche Teil dieses Abschnitts beschäftigt sich mit der Frage der Dua-

lisierung von (H2) und (H2') und aus diesen Aufgaben ableitbaren Erkenntnissen. Die Aufgaben sind schnell notiert.

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{V}_l^T \mathbf{0} + \mathbf{U}_l^T \mathbf{y}_l \\ & \mathbf{V}_l = \mathbf{V}_k^* \\ & \mathbf{U}_l^T \mathbf{y}_j - \mathbf{V}_l^T \mathbf{x}_j \leq 0 \quad \forall j \\ & \mathbf{U}_l, \mathbf{V}_l \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{D2}$$

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{V}_l^T \mathbf{0} + \mathbf{U}_l^T \mathbf{y}_l \\ & \mathbf{V}_l = \mathbf{V}_k^* \\ & \mathbf{U}_l^T \mathbf{y}_j - \mathbf{V}_l^T \mathbf{x}'_j \leq 0 \quad \forall j \\ & \mathbf{U}_l, \mathbf{V}_l \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{D2'}$$

(D2) und (D2') führen zu folgenden Erkenntnissen:

- Wegen der Vorzeichenunbeschränktheit von  $\mathbf{w}_l$  in (H2) und (H2') treten in (D2) und (D2') in der ersten Restriktionengruppe Gleichungen auf. Die Inputpreise der DMU  $l$  sind also jeweils fest und gleich denen der Peers  $k$ .
- Die Aussage des Satzes 4.1 wird nochmals bestätigt. Wegen  $\mathbf{V}_l = \mathbf{V}_k^*$  lautet die  $k$ -te der zweiten Restriktionengruppe in (D2)  $\mathbf{U}_l^T \mathbf{y}_k - \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_k \leq 0$  und in (D2')  $\mathbf{U}_l^T \mathbf{y}_k - \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}'_k \leq 0$ . Da aber  $\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}'_k \leq \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{x}_k$ , ist der Zulässigkeitsbereich von (D2') in dem von (D2) enthalten. Das ergibt einen kleineren optimalen Zielfunktionswert, woraus sich wiederum  $\mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{w}'_l \leq \mathbf{V}_k^{*T} \mathbf{w}_l^0$  folgern lässt; siehe Beweisskizze nach Satz 4.1.

## 5 Auswahl eines Peers

Ausgegangen waren wir von den Arbeiten der Autoren Doyle und Green [7] sowie Reucher et. a.l [13]. Dort wurden jeweils Auswahlkriterien für kompro-

missfähige Peers diskutiert, deren Rankings nebst weiteren Rangordnungen der DMUs vorgestellt und schließlich in [13] einer vergleichenden Analyse unterzogen. Vor dem Hintergrund der in den Kapiteln 3 und 4 dargestellten Ergebnisse stellt sich nun erneut die Frage nach der Auswahl eines 'guten' Peers: Dazu soll in Abweichung von den oben zitierten Arbeiten die Kreuzeffizienzmatrix in Tabelle 4, weiterhin aber auch die die Matrix verbesserter Produktivitäten in Tabelle 5 sowie die maximaler Produktivitäten in Tabelle 7 zu Rate gezogen werden.

Die Auswertung der Kreuzeffizienzmatrix ist schnell skizziert. Bei Wahl des Peers  $k$  mit maximaler schlechtester Effizienzbewertung aller DMUs bietet sich  $k = 4$  an; mit schlechtester Kreuzeffizienz von 0.53. Der Leser überprüfe das Ergebnis anhand von Tabelle 4 auf Seite 11. Die Wahl von Peers, die das maximale Bedauern aller DMUs minimieren – rücksichtsvollste Peers – fällt auf  $k = 2$  und  $k = 3$ ; die Angaben sind schnell nachvollzogen. Anzumerken ist, dass bei Wahl der rücksichtsvollsten Peers die DMUs keine Chance haben, sich im Sinne der Peers durch Inputveränderung zu verbessern. Das ist bei der Auswertung der Matrix verbesserter Produktivitäten bereits durch radiale Inputreduktion geschehen; wie man leicht anhand von Tabelle 5 nachvollzieht, fällt das Ergebnis zu den beiden Kriterien – fairster und rücksichtsvollster Peer – auf die Wahl von  $k = 2$  und  $k = 3$ . Interessanterweise ändert sich das Ergebnis bei Auswertung der Matrix maximaler Produktivitäten aus Tabelle 7, nur  $k = 2$  ist der fairste und rücksichtsvollste Peer.

Nun ist dieses Ergebnis für den hier betrachteten konkreten Fall erfreulich: Die Auswertung der Kreuzeffizienzmatrix, der Matrix verbesserter Produktivitäten und der Matrix maximaler Produktivitäten führen zu jeweils unterschiedlichen Ergebnissen. War ohne radiale Effizienzverbesserung Peer  $k = 4$  fairste DMU, so sind es nach radialer Effizienzverbesserung die Peers  $k = 2$  und  $k = 3$  und nach optimierter Effizienzverbesserung ist es nur noch Peer



$k = 2$ . Seine Einschätzungen empfinden alle DMUs nahezu gleichermaßen als fair und als rücksichtsvoll.

Bisher wurden die Überlegungen an Effizienzen ausgerichtet, jetzt sollen auch die sie bewirkenden Inputs zur Analyse hinzugezogen werden. Auf Seite 10 zeigten wir in Tabelle 2 die originalen Inputs (und Outputs), sowie die Kreuzeffizienzmatrix in Tabelle 4. Die DMUs  $l = 1$ ,  $l = 3$  und  $l = 4$  sind selbst nach ihrer eigenen Einschätzung – self-appraisal – ineffizient, die übrigen effizient.  $l = 1$ ,  $l = 3$  und  $l = 4$  werden nach radialer Inputreduktion effizient. Dazu müssen sie ihre originalen Inputs um den Faktor 0.67 bzw. 0.60 reduzieren, was schmerzhaft sein dürfte. Die Effizienzbewertungen in den Gewichten aller potentiellen Peers  $k$  nach dieser Prozedur liefert dann Tabelle 5: Die Spalten 1, 3 und 4 haben sich verändert, die übrigen nicht. Diese Veränderungen sind jedoch dergestalt, dass Peer  $k = 4$  nicht mehr der fairste ist, sondern jetzt  $k = 2$  und  $k = 3$  die fairsten sind und auch die rücksichtsvollsten bleiben.

Auf der Seite 17 in Tabelle 6 sind die optimalen Inputveränderungen und die dazugehörigen Effizienzen aus Sicht aller Peers  $k$  dargestellt: DMU  $l = 3$  ist nun nicht mehr zu einer schmerzhaften Inputreduktion gezwungen. Sie müsste unter den Peers  $k = 2$ ,  $k = 3$  und  $k = 4$  zwar noch stärker als radial (Faktor 0.67) ihre Inputs reduzieren, die Peers  $k = 1$  und  $k = 5$  eröffnen jedoch eine interessante andere Möglichkeiten, nämlich einer geringeren als radial erforderlichen Reduktion des Inputs 2 von 5.00 nur auf 4.00, bei einer gleichzeitig stärker als radial erforderlichen Inputreduktion des Inputs 1 von 8.00 auf 2.00. Bei Wahl der beiden Peers  $k = 1$  und  $k = 5$  ist noch ein Effekt zu beobachten: Obwohl DMU  $l = 5$  sich selber als effizient bewertet, bleibt sie es auch durch Reduktion des Inputs 1 von 6.00 auf 2.00 und gleichzeitiger Erhöhung des Inputs 2 von 2.00 auf 4.00, allerdings wird sie mit der neuen Inputkombination aus Sicht von  $k = 1$  nun effizienter, nämlich von zuvor 0,11 auf nunmehr 0.33. Dieser Substitutionseffekt von Inputs ist typisch für die neue Methode. Wir greifen nochmals die Peers  $k = 1$  und  $k = 2$  heraus

und verdeutlichen das gerade Gesagte.

Laut Vorschlag des  $k = 1$  ergibt sich:

	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
von originalen					
Inputs I1, I2	2.00, 5.00	2.00, 4.00	8.00, 5.00	3.00, 4.00	6.00, 2.00
	↓	↓	↓	↓	↓
zu optimalen					
Inputs I1, I2	1.33, 2.67	2.00, 4.00	2.00, 4.00	1.33, 2.67	2.00, 4.00

Laut Vorschlag des  $k = 2$  sollte DMU  $l$  wie folgt verfahren:

	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
von originalen					
Inputs I1, I2	2.00, 5.00	2.00, 4.00	8.00, 5.00	3.00, 4.00	6.00, 2.00
	↓	↓	↓	↓	↓
zu optimalen					
Inputs I1, I2	1.33, 2.67	2.00, 4.00	4.00, 3.00	1.33, 2.67	6.00, 2.00

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Anders als in zahlreichen Publikationen zur DEA, in denen jede Wirtschaftseinheit ihre Effizienz aus eigener Sicht bestmöglich bewertet, verfolgte der vorliegende Beitrag das Ziel einer 'konsensualen Bewertung' ihrer Effizienzen aus Sicht eines oder mehrerer Peers. Ein Beispiel in Abschnitt 3 zeigte die dem Prinzip 'Selbstbewertung' inhärente Schwäche auf, wodurch dann die auf Doyle und Green zurückgehende und von Reucher et al. übernommene Idee der Effizienzbewertung mittels der Kreuzeffizienzmatrix motiviert wurde. Vom Anspruch geleitet, über Auswertungsmöglichkeiten der Matrix hinaus auch Handlungsempfehlungen zur Effizienzsteigerung ineffizienter Einheiten abzuleiten, wurden mathematische Modelle entwickelt, mit deren Lösungen die Matrix verbesserter und die Matrix maximaler Produktivitäten aufgebaut wurde. Mit der Matrix maximaler Produktivitäten gelang es, Wirtschaftseinheiten 'so gut wie möglich' durch einen Peer zu bewerten, was durch die Flexibilität in der Effizienzsteigerung von Wirtschaftseinheiten durch Inputreduktion, konstante Inputs als auch Inputerhöhungen möglich wurde. Damit war der Grundstein für die Umsetzung einer konsensualen Entscheidungsfin-

derung geschaffen. Das Ganze wurde ausführlich für fünf DMUs mit jeweils zwei In- und Outputs exemplifiziert.

Ziel weiterer Forschungsaufgaben wird es sein, in einem nächsten Schritt Kriterien zur Auswahl eines 'geeigneten' Peers zu formulieren, an dem sich sämtliche DMUs auszurichten haben. Darüberhinaus sind die in diesem Beitrag entwickelten inputorientierten Modelle unter der Annahme konstanter Skalenerträge auf den Fall variabler Skalenerträge zu übertragen und auch die entsprechenden outputorientierten Modelle zu studieren.

## 7 Anhang

Wie ändert sich die Situation für  $DMU_l$ , wenn ein zuvor noch ineffizienter Peer  $k$  nun effizient wird? Zur Beantwortung dieser Frage löst man zunächst (Q) bzw. (D) für den Peer  $k$  und bestimmt die optimalen Gewichte  $\mathbf{U}_k^*, \mathbf{V}_k^*$ . Dann reduziert man  $\mathbf{x}'_k = \text{eff}_k^* \cdot \mathbf{x}_k$ , setzt  $\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_j$  für  $j \neq k$  und löst die Aufgabe (H1').

$$\begin{aligned}
 & \min p_l \\
 \text{u. d. N. : } & \mathbf{U}_k^* \mathbf{y}_l - p_l \mathbf{V}_k^* \mathbf{x}'_l \leq 0 & (\text{H1}') \\
 & p_l \mathbf{x}'_l - \sum_j \mu_{lj} \mathbf{x}'_j \geq 0 \\
 & \sum_j \mu_{lj} \mathbf{y}_j \geq \mathbf{y}_l \\
 & \mu_{lj} \geq 0 \quad \forall j.
 \end{aligned}$$

Bis auf die zweite Restriktionsgruppe ist (H1') identisch mit (H1).

**Satz 7.1** *Für den optimalen Zielfunktionswert  $\bar{p}_l$  von (H1') gilt  $\bar{p}_l \leq p_l^0$ , und damit ist die Effizienzverbesserung von  $DMU_l$  in den Preisen des Peer  $k$  nach dessen Effizienzverbesserung (durch Inputreduktion) nicht schlechter als vorher.*

Zum Beweis dieses Satzes überlegt man, dass jede für (H1) zulässige Lösung  $p_l, \boldsymbol{\mu}_l$  wegen  $\mathbf{x}'_k \leq \mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_j$ ,  $j \neq k$  auch für (H1') zulässig ist, was dann in Folge für die Optimallösungen ergibt:  $p_l^0 \geq \bar{p}_l$ .  $\bar{\mathbf{x}}_l = \bar{p}_l \mathbf{x}_l$  führt damit zu einer nicht schlechteren Produktivität unter den Gewichten des  $k$  als  $\mathbf{x}'_l$ , womit die Skizze des Beweises abgeschlossen ist.

## Literatur

- [1] Ali, A. I., Seiford, L. M. (1993) Computational Accuracy and Infinitesimals in Data Envelopment Analysis, *Infor* (31), 290-297.
- [2] Banker, R. D., Charnes, A., Cooper, W. W. (1984) Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, 30, 1078-1091.
- [3] Birman S. V., Pironi, P. E., Rodin, E. Y. (2003) Application of DEA to Medical Clinics, *Mathematical and Computer Modeling*, 37, 923-936.
- [4] Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E. (1978) Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operations Research*, 2, 429-444, North Holland Publishing Company.
- [5] Charnes, A., et. al. (1994) *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*, Kluwer, Boston,
- [6] Cooper, W. W., Seiford L. M., Tone K. (2006) *Introduction to Data Envelopment Analysis and its Uses with DEA-Solver Software and References*, Springer, New York.
- [7] Doyle, J., Green, R. (1994) Efficiency and Cross-efficiency in DEA: Derivations, Meanings and Uses, *Journal of Operations Research*, Vol. 45, No. 5, 567-578.
- [8] Easton, L., Murphy, D. L., Pearson, J. N. (2003) Purchasing Performance Evaluating: with Data Envelopment Analysis, *European Journal of Purchasing and Supply Management* 8, 123-134.
- [9] Farrell M. J. (1957) The Measurement of Productive Efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society* 120, 253-290.

- 
- [10] Fandel, G. (2007) On the Performance of Universities in North-Rhine Westfalia, Germany: Government's Redistribution of Funds Judged Using DEA Efficiency Measures, *European Journal of Operations Research (EJOR)*, 176 (1), 521-533.
- [11] Homburg, C. (2001) Using Data Envelopment Analysis to Benchmark Activities, *International Journal of Production Economics*, 73, 51-58.
- [12] Lingo (2009) [www.lindo.com](http://www.lindo.com).
- [13] Reucher, E., et. al. (2008) Unternehmensranking mittels Kreuzeffizienzen – Eine Anwendung für einen Halbleiterkonzern –, *ZfB*, 78, S. 289-306.
- [14] Shephard, D. (1970) *The Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton, N.J.

Die Diskussionspapiere ab Nr. 183 (1992) bis heute, können Sie im Internet unter <http://www.fernuni-hagen.de/FBWIWI/> einsehen und zum Teil downloaden.

Die **Titel** der Diskussionspapiere von Nr 1 (1975) bis 182 (1991) können bei Bedarf in der Fakultät für Wirtschaftswissenschaft angefordert werden:

FernUniversität, z. Hd. Frau Huber oder Frau Mette, Postfach 940, 58084 Hagen

**Die Diskussionspapiere selber erhalten Sie nur in den Bibliotheken.**

Nr	Jahr	Titel	Autor/en
322	2001	Spreading Currency Crises: The Role of Economic Interdependence	Berger, Wolfram Wagner, Helmut
323	2002	Planung des Fahrzeugumschlags in einem Seehafen-Automobilterminal mittels eines Multi-Agenten-Systems	Fischer, Torsten Gehring, Hermann
324	2002	A parallel tabu search algorithm for solving the container loading problem	Bortfeldt, Andreas Gehring, Hermann Mack, Daniel
325	2002	Die Wahrheit entscheidungstheoretischer Maximen zur Lösung von Individualkonflikten - Unsicherheitssituationen -	Mus, Gerold
326	2002	Zur Abbildungsgenauigkeit des Gini-Koeffizienten bei relativer wirtschaftlicher Konzentration	Steinrücke, Martin
327	2002	Entscheidungsunterstützung bilateraler Verhandlungen über Auftragsproduktionen - eine Analyse aus Anbietersicht	Steinrücke, Martin
328	2002	Die Relevanz von Marktzinssätzen für die Investitionsbeurteilung – zugleich eine Einordnung der Diskussion um die Marktzinsmethode	Terstege, Udo
329	2002	Evaluating representatives, parliament-like, and cabinet-like representative bodies with application to German parliament elections 2002	Tangian, Andranik S.
330	2002	Konzernabschluss und Ausschüttungsregelung im Konzern. Ein Beitrag zur Frage der Eignung des Konzernabschlusses als Ausschüttungsbemessungsinstrument	Hinz, Michael
331	2002	Theoretische Grundlagen der Gründungsfinanzierung	Bitz, Michael
332	2003	Historical background of the mathematical theory of democracy	Tangian, Andranik S.
333	2003	MCDM-applications of the mathematical theory of democracy: choosing travel destinations, preventing traffic jams, and predicting stock exchange trends	Tangian, Andranik S.
334	2003	Sprachregelungen für Kundenkontaktmitarbeiter – Möglichkeiten und Grenzen	Fließ, Sabine Möller, Sabine Momma, Sabine Beate

335	2003	A Non-cooperative Foundation of Core-Stability in Positive Externality NTU-Coalition Games	Finus, Michael Rundshagen, Bianca
336	2003	Combinatorial and Probabilistic Investigation of Arrow's dictator	Tangian, Andranik
337	2003	A Grouping Genetic Algorithm for the Pickup and Delivery Problem with Time Windows	Pankratz, Giselher
338	2003	Planen, Lernen, Optimieren: Beiträge zu Logistik und E-Learning. Festschrift zum 60 Geburtstag von Hermann Gehring	Bortfeldt, Andreas Fischer, Torsten Homberger, Jörg Pankratz, Giselher Strangmeier, Reinhard
339a	2003	Erinnerung und Abruf aus dem Gedächtnis Ein informationstheoretisches Modell kognitiver Prozesse	Rödder, Wilhelm Kuhlmann, Friedhelm
339b	2003	Zweck und Inhalt des Jahresabschlusses nach HGB, IAS/IFRS und US-GAAP	Hinz, Michael
340	2003	Voraussetzungen, Alternativen und Interpretationen einer zielkonformen Transformation von Periodenerfolgsrechnungen – ein Diskussionsbeitrag zum LÜCKE-Theorem	Terstege, Udo
341	2003	Equalizing regional unemployment indices in West and East Germany	Tangian, Andranik
342	2003	Coalition Formation in a Global Warming Game: How the Design of Protocols Affects the Success of Environmental Treaty-Making	Eyckmans, Johan Finus, Michael
343	2003	Stability of Climate Coalitions in a Cartel Formation Game	Finus, Michael van Ierland, Ekko Dellink, Rob
344	2003	The Effect of Membership Rules and Voting Schemes on the Success of International Climate Agreements	Finus, Michael J.-C., Altamirano-Cabrera van Ierland, Ekko
345	2003	Equalizing structural disproportions between East and West German labour market regions	Tangian, Andranik
346	2003	Auf dem Prüfstand: Die geldpolitische Strategie der EZB	Kißmer, Friedrich Wagner, Helmut
347	2003	Globalization and Financial Instability: Challenges for Exchange Rate and Monetary Policy	Wagner, Helmut



348	2003	Anreizsystem Frauenförderung – Informationssystem Gleichstellung am Fachbereich Wirtschaftswissenschaft der FernUniversität in Hagen	Fließ, Sabine Nonnenmacher, Dirk
349	2003	Legitimation und Controller	Pietsch, Gotthard Scher, Ewald
350	2003	Controlling im Stadtmarketing – Ergebnisse einer Primärerhebung zum Hagener Schaufenster-Wettbewerb	Fließ, Sabine Nonnenmacher, Dirk
351	2003	Zweiseitige kombinatorische Auktionen in elektronischen Transportmärkten – Potenziale und Probleme	Pankratz, Giselher
352	2003	Methodisierung und E-Learning	Strangmeier, Reinhard Bankwitz, Johannes
353 a	2003	A parallel hybrid local search algorithm for the container loading problem	Mack, Daniel Bortfeldt, Andreas Gehring, Hermann
353 b	2004	Übernahmeangebote und sonstige öffentliche Angebote zum Erwerb von Aktien – Ausgestaltungsmöglichkeiten und deren Beschränkung durch das Wertpapiererwerbs- und Übernahmegesetz	Wirtz, Harald
354	2004	Open Source, Netzeffekte und Standardisierung	Maaß, Christian Scher, Ewald
355	2004	Modesty Pays: Sometimes!	Finus, Michael
356	2004	Nachhaltigkeit und Biodiversität	Endres, Alfred Bertram, Regina
357	2004	Eine Heuristik für das dreidimensionale Strip-Packing-Problem	Bortfeldt, Andreas Mack, Daniel
358	2004	Netzwerkökonomik	Martiensen, Jörn
359	2004	Competitive versus cooperative Federalism: Is a fiscal equalization scheme necessary from an allocative point of view?	Arnold, Volker
360	2004	Gefangenendilemma bei Übernahmeangeboten? Eine entscheidungs- und spieltheoretische Analyse unter Einbeziehung der verlängerten Annahmefrist gem. § 16 Abs. 2 WpÜG	Wirtz, Harald
361	2004	Dynamic Planning of Pickup and Delivery Operations by means of Genetic Algorithms	Pankratz, Giselher

362	2004	Möglichkeiten der Integration eines Zeitmanagements in das Blueprinting von Dienstleistungsprozessen	Fließ, Sabine Lasshof, Britta Meckel, Monika
363	2004	Controlling im Stadtmarketing - Eine Analyse des Hagener Schaufensterwettbewerbs 2003	Fließ, Sabine Wittko, Ole
364	2004	Ein Tabu Search-Verfahren zur Lösung des Timetabling-Problems an deutschen Grundschulen	Desef, Thorsten Bortfeldt, Andreas Gehring, Hermann
365	2004	Die Bedeutung von Informationen, Garantien und Reputation bei integrativer Leistungserstellung	Prechtl, Anja Völker-Albert, Jan- Hendrik
366	2004	The Influence of Control Systems on Innovation: An empirical Investigation	Littkemann, Jörn Derfuß, Klaus
367	2004	Permit Trading and Stability of International Climate Agreements	Altamirano-Cabrera, Juan-Carlos Finus, Michael
368	2004	Zeitdiskrete vs. zeitstetige Modellierung von Preismechanismen zur Regulierung von Angebots- und Nachfragemengen	Mazzoni, Thomas
369	2004	Marktversagen auf dem Softwaremarkt? Zur Förderung der quelloffenen Softwareentwicklung	Christian Maaß Ewald Scherm
370	2004	Die Konzentration der Forschung als Weg in die Sackgasse? Neo-Institutionalistische Überlegungen zu 10 Jahren Anreizsystemforschung in der deutschsprachigen Betriebswirtschaftslehre	Süß, Stefan Muth, Insa
371	2004	Economic Analysis of Cross-Border Legal Uncertainty: the Example of the European Union	Wagner, Helmut
372	2004	Pension Reforms in the New EU Member States	Wagner, Helmut
373	2005	Die Bundestrainer-Scorecard Zur Anwendbarkeit des Balanced Scorecard Konzepts in nicht-ökonomischen Fragestellungen	Eisenberg, David Schulte, Klaus
374	2005	Monetary Policy and Asset Prices: More Bad News for „Benign Neglect“	Berger, Wolfram Kißmer, Friedrich Wagner, Helmut
375	2005	Zeitstetige Modellbildung am Beispiel einer volkswirtschaftlichen Produktionsstruktur	Mazzoni, Thomas

376	2005	Economic Valuation of the Environment	Endres, Alfred
377	2005	Netzwerkökonomik – Eine vernachlässigte theoretische Perspektive in der Strategie-/Marketingforschung?	Maaß, Christian Scherer, Ewald
378	2005	Diversity management`s diffusion and design: a study of German DAX-companies and Top-50-U.S.-companies in Germany	Süß, Stefan Kleiner, Markus
379	2005	Fiscal Issues in the New EU Member Countries – Prospects and Challenges	Wagner, Helmut
380	2005	Mobile Learning – Modetrend oder wesentlicher Bestandteil lebenslangen Lernens?	Kuszpa, Maciej Scherer, Ewald
381	2005	Zur Berücksichtigung von Unsicherheit in der Theorie der Zentralbankpolitik	Wagner, Helmut
382	2006	Effort, Trade, and Unemployment	Altenburg, Lutz Brenken, Anke
383	2006	Do Abatement Quotas Lead to More Successful Climate Coalitions?	Altamirano-Cabrera, Juan-Carlos Finus, Michael Dellink, Rob
384	2006	Continuous-Discrete Unscented Kalman Filtering	Singer, Hermann
385	2006	Informationsbewertung im Spannungsfeld zwischen der Informationstheorie und der Betriebswirtschaftslehre	Reucher, Elmar
386	2006	The Rate Structure Pattern: An Analysis Pattern for the Flexible Parameterization of Charges, Fees and Prices	Pleiß, Volker Pankratz, Giselher Bortfeldt, Andreas
387a	2006	On the Relevance of Technical Inefficiencies	Fandel, Günter Lorth, Michael
387b	2006	Open Source und Wettbewerbsstrategie - Theoretische Fundierung und Gestaltung	Maaß, Christian
388	2006	Induktives Lernen bei unvollständigen Daten unter Wahrung des Entropieprinzips	Rödter, Wilhelm
389	2006	Banken als Einrichtungen zur Risikotransformation	Bitz, Michael
390	2006	Kapitalerhöhungen börsennotierter Gesellschaften ohne börslichen Bezugsrechtshandel	Terstege, Udo Stark, Gunnar
391	2006	Generalized Gauss-Hermite Filtering	Singer, Hermann

392	2006	Das Göteborg Protokoll zur Bekämpfung grenzüberschreitender Luftschadstoffe in Europa: Eine ökonomische und spieltheoretische Evaluierung	Ansel, Wolfgang Finus, Michael
393	2006	Why do monetary policymakers lean with the wind during asset price booms?	Berger, Wolfram Kißner, Friedrich
394	2006	On Supply Functions of Multi-product Firms with Linear Technologies	Steinrücke, Martin
395	2006	Ein Überblick zur Theorie der Produktionsplanung	Steinrücke, Martin
396	2006	Parallel greedy algorithms for packing unequal circles into a strip or a rectangle	Timo Kubach, Bortfeldt, Andreas Gehring, Hermann
397	2006	C&P Software for a cutting problem of a German wood panel manufacturer – a case study	Papke, Tracy Bortfeldt, Andreas Gehring, Hermann
398	2006	Nonlinear Continuous Time Modeling Approaches in Panel Research	Singer, Hermann
399	2006	Auftragsterminierung und Materialflussplanung bei Werkstattfertigung	Steinrücke, Martin
400	2006	Import-Penetration und der Kollaps der Phillips-Kurve	Mazzoni, Thomas
401	2006	Bayesian Estimation of Volatility with Moment-Based Nonlinear Stochastic Filters	Grothe, Oliver Singer, Hermann
402	2006	Generalized Gauss-Hermite Filtering for Multivariate Diffusion Processes	Singer, Hermann
403	2007	A Note on Nash Equilibrium in Soccer	Sonnabend, Hendrik Schlepütz, Volker
404	2007	Der Einfluss von Schaufenstern auf die Erwartungen der Konsumenten - eine explorative Studie	Fließ, Sabine Kudermann, Sarah Trell, Esther
405	2007	Die psychologische Beziehung zwischen Unternehmen und freien Mitarbeitern: Eine empirische Untersuchung des Commitments und der arbeitsbezogenen Erwartungen von IT-Freelancern	Süß, Stefan
406	2007	An Alternative Derivation of the Black-Scholes Formula	Zucker, Max Singer, Hermann
407	2007	Computational Aspects of Continuous-Discrete Extended Kalman-Filtering	Mazzoni, Thomas
408	2007	Web 2.0 als Mythos, Symbol und Erwartung	Maaß, Christian Pietsch, Gotthard
409	2007	„Beyond Balanced Growth“: Some Further Results	Stijepic, Denis Wagner, Helmut

410	2007	Herausforderungen der Globalisierung für die Entwicklungsländer: Unsicherheit und geldpolitisches Risikomanagement	Wagner, Helmut
411	2007	Graphical Analysis in the New Neoclassical Synthesis	Giese, Guido Wagner, Helmut
412	2007	Monetary Policy and Asset Prices: The Impact of Globalization on Monetary Policy Trade-Offs	Berger, Wolfram Kißner, Friedrich Knütter, Rolf
413	2007	Entropiebasiertes Data Mining im Produktdesign	Rudolph, Sandra Röder, Wilhelm
414	2007	Game Theoretic Research on the Design of International Environmental Agreements: Insights, Critical Remarks and Future Challenges	Finus, Michael
415	2007	Qualitätsmanagement in Unternehmenskooperationen - Steuerungsmöglichkeiten und Datenintegrationsprobleme	Meschke, Martina
416	2007	Modernisierung im Bund: Akteursanalyse hat Vorrang	Pietsch, Gotthard Jamin, Leander
417	2007	Inducing Technical Change by Standard Oriented Environmental Policy: The Role of Information	Endres, Alfred Bertram, Regina Rundshagen, Bianca
418	2007	Der Einfluss des Kontextes auf die Phasen einer SAP-Systemimplementierung	Littkemann, Jörn Eisenberg, David Kuboth, Meike
419	2007	Endogenous in Uncertainty and optimal Monetary Policy	Giese, Guido Wagner, Helmut
420	2008	Stockkeeping and controlling under game theoretic aspects	Fandel, Günter Trockel, Jan
421	2008	On Overdissipation of Rents in Contests with Endogenous Intrinsic Motivation	Schlepütz, Volker
422	2008	Maximum Entropy Inference for Mixed Continuous-Discrete Variables	Singer, Hermann
423	2008	Eine Heuristik für das mehrdimensionale Bin Packing Problem	Mack, Daniel Bortfeldt, Andreas
424	2008	Expected A Posteriori Estimation in Financial Applications	Mazzoni, Thomas
425	2008	A Genetic Algorithm for the Two-Dimensional Knapsack Problem with Rectangular Pieces	Bortfeldt, Andreas Winter, Tobias
426	2008	A Tree Search Algorithm for Solving the Container Loading Problem	Fanslau, Tobias Bortfeldt, Andreas
427	2008	Dynamic Effects of Offshoring	Stijepic, Denis Wagner, Helmut
428	2008	Der Einfluss von Kostenabweichungen auf das Nash-Gleichgewicht in einem nicht-kooperativen Disponenten-Controller-Spiel	Fandel, Günter Trockel, Jan
429	2008	Fast Analytic Option Valuation with GARCH	Mazzoni, Thomas
430	2008	Conditional Gauss-Hermite Filtering with Application to Volatility Estimation	Singer, Hermann
431	2008	Web 2.0 auf dem Prüfstand: Zur Bewertung von Internet-Unternehmen	Christian Maaß Gotthard Pietsch

432	2008	Zentralbank-Kommunikation und Finanzstabilität – Eine Bestandsaufnahme	Knütter, Rolf Mohr, Benjamin
433	2008	Globalization and Asset Prices: Which Trade-Offs Do Central Banks Face in Small Open Economies?	Knütter, Rolf Wagner, Helmut
434	2008	International Policy Coordination and Simple Monetary Policy Rules	Berger, Wolfram Wagner, Helmut
435	2009	Matchingprozesse auf beruflichen Teilarbeitsmärkten	Stops, Michael Mazzoni, Thomas
436	2009	Wayfindingprozesse in Parksituationen - eine empirische Analyse	Fließ, Sabine Tetzner, Stefan
437	2009	ENTROPY-DRIVEN PORTFOLIO SELECTION a downside and upside risk framework	Rödder, Wilhelm Gartner, Ivan Ricardo Rudolph, Sandra
438	2009	Consulting Incentives in Contests	Schlepütz, Volker
439	2009	A Genetic Algorithm for a Bi-Objective Winner-Determination Problem in a Transportation-Procurement Auction"	Buer, Tobias Pankratz, Giselher
440	2009	Parallel greedy algorithms for packing unequal spheres into a cuboidal strip or a cuboid	Kubach, Timo Bortfeldt, Andreas Tilli, Thomas Gehring, Hermann
441	2009	SEM modeling with singular moment matrices Part I: ML-Estimation of time series	Singer, Hermann
442	2009	SEM modeling with singular moment matrices Part II: ML-Estimation of sampled stochastic differential equations	Singer, Hermann
443	2009	Konsensuale Effizienzbewertung und -verbesserung – Untersuchungen mittels der Data Envelopment Analysis (DEA)	Rödder, Wilhelm Reucher, Elmar