Univ.-Prof. Dr. Thomas Eichner
Univ.-Prof. Dr. Rüdiger Pethig

Modul 31901
Öffentliche Ausgaben

Kurs 41881
Public Choice

LESEPROBE

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Inhaltsverzeichnis

2.4 Alternativen zur Mehrheitsregel

Neben der Mehrheitsregel werden sogenannte Rangordnungsverfahren bei kollektiven Entscheidungen häufig angewendet. Zu den Rangordnungsverfahren gehört die *einfache Mehrheitsregel* (plurality voting), die Anerkennungs-Regel (approval voting) und die Borda-Regel. Jedes der Rangordnungsverfahren wählt diejenige Alternative aus, welche die meisten Punkte erhält. Bei dem Plurality-Voting gibt jede Person seiner Lieblingsalternative - auch Erstpräferenz genannt - genau einen Punkt, während alle anderen Alternativen 0 Punkte erhalten. Die einzige Information, die hier benötigt wird, ist, welche Alternative die Lieblingsalternative des Wählers ist. Bei dem Approval Voting können die Wähler mehreren Alternativen einen Punkt geben - und zwar so vielen oder wenigen Alternativen, wie sie wollen. Bei der Borda-Regel geben die Wähler ihrer Lieblingsalternative die meisten Punkte, und dann erhalten die Alternativen immer weniger Punkte bis hin zur schlechtesten Alternative, die am wenigsten Punkte erhält.

2.4.1 Die Borda-Regel

Bei m Alternativen erhält bei der Borda-Regel die Lieblingsalternative eines Wählers m Punkte, die Zweitpräferenz $m-1$ Punkte, usw. bis zur Alternative, die der Wähler am schlechtesten findet und 1 Punkt erhält. Anschließend werden über alle Wähler alle Punkte einer Alternative aufaddiert, und diejenige Alternative mit den meisten Punkten gewinnt. Es stellt sich nun die Frage, welches der Arrow-Axiome verletzt wird.

Nehmen wir an, es gibt 7 Wähler, deren Präferenzen über den drei Alternativen a, b, c in Tabelle 2 dargestellt werden. D.h. die Wähler $1, 2, 3$ haben a als Erstpräferenz, b als Zweitpräferenz und schätzen c am schlechtesten ein.

Wähler	Präferenzordnung
$i = 1, 2, 3$	aP_ibP_ic
$i = 4, 5$	cP_iaP_ib
$i = 6, 7$	bP_icP_ia

Tabelle 2: Borda Wahl

Zunächst einmal lässt sich feststellen, dass bei Anwendung der Mehrheitsregel ein Zyklus entstehen würde:

- 5 von 7 Wählern bevorzugen a gegenüber b (aP^Mb),
- 5 von 7 Wählern bevorzugen b gegenüber c (bP^Mc)
- und 4 von 7 Wählern bevorzugen c gegenüber a (cP^Ma).

Wendet man hingegen die Borda-Regel an, so ist leicht zu erkennen, dass die Alternative a mit drei Erstplazierungen, zwei Zweitplazierungen und zwei Drittplazierungen ($3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 15$) mit insgesamt 15 Punkten der Gewinner nach der Borda-Regel ist. Die Alternative b erhält 14 Punkte, während die Alternative c 13 Punkte erhält. Somit liefert die Borda-Regel die Rangordnung aP^BbP^Bc, wobei P^B für die Borda-Präferenz steht.

Wähler	Präferenzordnung
$i = 1, 2, 3$	$dP_iaP_ibP_ic$
$i = 4, 5$	$cP_idP_iaP_ib$
$i = 6, 7$	$bP_icP_idP_ia$

Tabelle 3: Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

Führen wir nun eine vierte Alternative d ein. Für die Wähler $i = 1, 2, 3$ wird die Alternative d zur Erstpräferenz, während alle anderen Wähler c gegenüber d präferieren, wobei c vorher (ohne die Alternative d) die schlechteste Alternative nach der Borda-Regel war. Die neuen Präferenzordnungen sind in Tabelle 3 aufgelistet. Berechnen wir nun die Punkte mit Hilfe der Borda-Regel (nun mit Punkten 1 bis 4), ist das Ergebnis der Wahl anders. d ist der Gewinner mit 22 Punkten, c erhält 17 Punkte, b 16 Punkte und a 15 Punkte. Nach der Borda-Regel erhalten wir somit die Rangordnung $dP^BcP^BbP^Ba$. Durch die Hinzunahme der Alternative d hat sich die Rangordnung der ursprünglichen Alternativen - jetzt cP^BbP^Ba, vorher aP^BbP^Bc - genau umgekehrt. Die Umkehrung zeigt, dass die Borda-Regel das Axiom der Unabhängigkeit der irrelevanten Alternativen (I) verletzt. Das Beispiel illustriert allerdings auch, welche Bedeutung das Axiom I bei der Manipulation von kollektiven Entscheidungen spielt. Durch Hinzunahme von neuen Alternativen ist es möglich, die „ursprüngliche“ Gruppenpräferenz auf den Kopf zu stellen.

Wähler	Präferenzordnung
1	$aP_1cP_1bP_1dP_1e$
2	$aP_2bP_2eP_2dP_2c$
3	$dP_3bP_3aP_3eP_3c$
4	$eP_4dP_4bP_4cP_4a$
5	$bP_5eP_5cP_5dP_5a$

Tabelle 7: Präferenzordnungen der Übungsaufgabe 1

(b) Welche Alternative wird nach dem Plurality Voting gewählt? Wird dabei die Alternative a der Alternative b vorgezogen?

(c) Prüfen Sie durch den Wegfall der Alternativen d und e, ob die Entscheidungsregel Plurality Voting die Bedingung I verletzt?

Übungsaufgabe 2: Gegeben sind die in Tabelle 7 dargestellten Präferenzordnungen der Wähler $i = 1, 2, \ldots, 7$ hinsichtlich der vier Alternativen w, x, y, z.

Wähler	Präferenzordnung
$i = 1, 2$	$wP_iyP_izP_ix$
3	$yP_3wP_3xP_3z$
4	$yP_4xP_4zP_4w$
$i = 5, 6$	$zP_iwP_iyP_ix$
7	$xP_7yP_7wP_7z$

Tabelle 8: Präferenzordnungen der Übungsaufgabe 2

(a) Ermitteln Sie die Gruppenpräferenz nach der Mehrheitsregel. Welche Alternative ist der Condorcet-Gewinner?

(b) Welche Alternative wird nach der Borda-Regel gewählt? Was fällt Ihnen auf?

Übungsaufgabe 3: Betrachten Sie eine Situation, in der 13 Wähler die in der Tabelle 9 dargestellten Präferenzordnungen bzgl. der Alternativen k, l, m, n aufweisen.

(a) Wie lautet der Condorcet-Gewinner?

4.1 Abstimmung über eine nivellierende Einkommensumverteilung

Es sei wie bisher y_i das exogene Einkommen vor Steuern des Bürgers i, $i = 1, \ldots, n$. Die Regierung beabsichtigt, eine Einkommensteuer mit dem konstanten Steuersatz t einzuführen, und mit den Einnahmen aus dieser Steuer sollen zwei Arten von Ausgaben getätigt werden:

(i) Ausgaben für eine gegebene Menge eines öffentlichen Gutes $g := pz$. (Im Bowen–Modell war die Wahl der Menge des öffentlichen Gutes das zu lösende Problem).

(ii) Ausgaben für einen monetären Transfer r, den jeder (Steuer–)Bürger erhält.

Für die Modellergebnisse wird sich die Annahme des konstanten Staatsbudgets als bedeutsam herausstellen. Im Bowen–Modell des vorigen Abschnitts bestimmte die Endogenisierung des allokativen Staatsbudgets bei der Mehrheitswahl die Höhe des Steuersatzes, während jetzt für die Wahl des Steuerparameters primär Verteilungsaspekte relevant sind. Die allokativen Staatsausgaben konstant zu setzen, scheint auf den ersten Blick restriktiv zu sein, aber auf der anderen Seite zeigt die Realität, dass in den letzten Jahrzehnten gerade die redistributiven Staatsausgaben stark angewachsen sind, während die übrigen (allokativen) Ausgaben annährend konstant geblieben sind. Deshalb ist $g = pz$ vielleicht keine so schlechte Approximation.

Die – im Vorzeichen nicht beschränkte – Steuerlast des Bürgers i ist also

$$\theta(y_i) := ty_i - r. \tag{1}$$

Das Staatsbudget ist genau dann ausgeglichen, wenn

$$\sum_i \theta(y_i) = g. \tag{2}$$

Durch Berücksichtigung von (1) in (2) ergibt sich

$$r = t\bar{y} - \frac{g}{n} \quad \text{mit} \quad \bar{y} := \frac{\sum_i y_i}{n}. \tag{3}$$

Da g, n und $\bar{y}$ konstant sind, bedeutet (3), dass die beiden Steuerparameter r und t linear abhängig sind, so dass nur einer von beiden frei wählbar ist. Wir wählen hier

t. Substitution von r aus (3) führt zu

$$\theta(y_i) = (y_i - \bar{y})t + \frac{g}{n}. \tag{4}$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung ermitteln wir das verfügbare Einkommen des Bürgers i als

$$X^i(t) := y_i - \theta(y_i) = \frac{ny_i - g}{n} - (y_i - \bar{y})t. \tag{5}$$

Das Ziel unserer Überlegungen ist zu untersuchen, welcher Steuersatz durch Mehrheitswahl implementiert wird. Bevor wir aber über t abstimmen lassen, ist es nützlich, die Steuerlast $\theta(y_i)$ aus (1) noch einmal etwas näher zu betrachten.

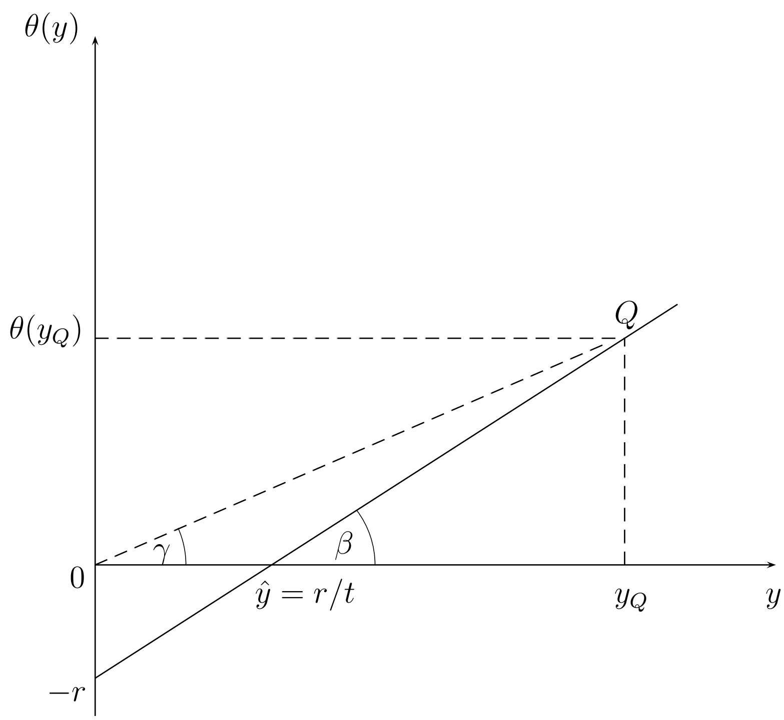

Abbildung 1: Lineare Einkommensteuer mit Steuerprogression

Die Steuerfunktion (1) ist so konstruiert, dass Personen mit einem Einkommen unter $\hat{y} := r/t$ einen negativen Steuerbetrag zu zahlen haben, also einen Transfer („Sozialhilfe“) erhalten. Der Grenzsteuersatz t ($= \tan\beta$ in Abbildung 1) ist zwar konstant, aber er ist größer als der Durchschnittssteuersatz $\theta(y)/y$ ($= \tan\gamma$ in Abbildung 1 für $y = y_Q$). Die Progression lässt sich formal z.B. durch das Progressionsmaß

$$\pi(y) := \frac{d\theta}{dy} \cdot \frac{y}{\theta(y)} \tag{6}$$

für beides ausreicht: die Finanzierung von g (die obligatorisch ist) und eine Redistribution ($r > 0$). Also kann $r < 0$ optimal sein.

Übungsaufgabe 6: Eine Ökonomie umfasse drei Bürger i ($i = 1, 2, 3$) mit den exogenen monatlichen Einkommen $y_1 = 1.800$, $y_2 = 3.200$ sowie $y_3 = 4.000$ Euro. Der Einkommensteuertarif ist charakterisiert durch einen konstanten Steuersatz von $t = 0.25$ sowie dem dazugehörigen Pauschaltransfer r. Die Regierung stellt ein öffentliches Gut bereit, welches mit jährlichen Kosten von 7.200 Euro zu Buche schlägt.

(a) Ermitteln Sie das durchschnittliche Einkommen $\bar{y}$, die Höhe des Pauschaltransfers r sowie die verfügbaren Einkommen $X^i(0.25)$ auf monatlicher Basis.

(b) Beschreiben Sie knapp, auf welche Weise eine monatliche Umverteilung der Einkommen erfolgt.

Übungsaufgabe 7: In einer Ökonomie gibt es drei Bürger $i = 1, 2, 3$ mit den exogenen jährlichen Einkommen $y_1 = 42.000$, $y_2 = 51.600$ sowie $y_3 = 25.200$ Euro. Der konstante Einkommensteuersatz beträgt $t = 0.2$. Das Steueraufkommen dient zur Finanzierung des Pauschaltransfers r sowie eines öffentlichen Gutes, das die Regierung zu den monatlichen Kosten $g = 630$ Euro bereitstellt. Die Finanzierungskosten des öffentlichen Gutes werden von den Bürgern zu gleichen Teilen getragen.

a) Ermitteln Sie durchschnittliches Einkommen $\bar{y}$, Medianeinkommen $\tilde{y}$ sowie die verfügbaren individuellen Einkommen $X^i(0.2)$ auf monatlicher Basis. Charakterisieren Sie knapp, auf welche Weise eine Umverteilung stattfindet. Vergleichen Sie dies mit der Situation in der die Kosten g für das öffentliche Gut um 20 Prozent gestiegen sind.

Gehen Sie im Weiteren davon aus, dass die individuellen Einkommen endogen bestimmt werden. Der jeweilige Nutzen der Individuen $i = 1, 2, 3$ wird repräsentiert durch die Funktion

$$u_i = U^i(x_i, f_i, z),$$

mit den partiellen Ableitungen $U_x^i > 0$, $U_f^i > 0$, $U_z^i > 0$. Dabei stellen x_i und z die nachgefragten Mengen des Konsumgutes X sowie des öffentlichen Gutes Z dar.

9 Lösungen zu den Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1:

(a) Es wird diejenige Alternative als Condorcet-Gewinner bezeichnet, welche im paarweisen Vergleich mit jeder anderen Alternative die absolute Mehrheit erhält. Alternative a erhält im paarweisen Vergleich mit b, c, d und e jeweils 2, 3, 2 und 3 Stimmen. Da die Alternative a also gegen b und d verliert, kann sie nicht der Condorcet-Gewinner sein. Alternative b erhält im Vergleich mit a, c, d und e jeweils 3, 4, 3 und 4 Stimmen. Demnach ist die Alternative b der Condorcet-Gewinner.

(b) Nach dem Plurality Voting erhält jeweils die Erstpräferenz des einzelnen Wählers eine Stimme und es gewinnt diejenige Alternative, die die meisten Stimmen auf sich vereint. Hier erhält Alternative a 2 Stimmen, b 1 Stimme, c keine und d 1 Stimme. Daher wird Alternative a gewählt, welche dem Condorcet-Gewinner b somit vorgezogen wird.

(c) Stehen die Alternativen d und e nicht mehr zur Verfügung, erhält man folgende Präferenzordnungen:

Wähler	Präferenzordnung
1	aP_1cP_1b
2	aP_2bP_2c
3	bP_3aP_3c
4	bP_4cP_4a
5	bP_5cP_5a

Tabelle 1: Präferenzprofil ohne die Alternativen d und e

Bei Anwendung des Plurality Voting erhält nun Alternative a 2 Stimmen und Alternative b 3 Stimmen. Durch den Wegfall der für das ursprüngliche Resultat irrelevanten Alternativen d und e ist eine Umkehrung der Gruppenpräferenz herbeigeführt worden. Die Bedingung I wird daher verletzt.

$y_i - \theta(y_i) = y_i - (y_i - \bar{y})t - \frac{g}{n}$. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} X^1(0.25) &= 1.800 - (1.800 - 3.000)0.25 - 200 = 1.800 + 100 = 1.900, \\ X^2(0.25) &= 3.200 - (3.200 - 3.000)0.25 - 200 = 3.200 - 250 = 2.950, \\ X^3(0.25) &= 4.000 - (4.000 - 3.000)0.25 - 200 = 4.000 - 450 = 3.550. \end{aligned}$$

(b) Auf Basis der im Aufgabenteil (b) ermittelten Werte lässt sich die monatliche Umverteilung der Einkommen charakterisieren. Es wird Einkommen von den Individuen 2 und 3 zum Individuum 1 umverteilt, da letzteres ein Einkommen unterhalb des Durchschnittseinkommens bezieht, während das Einkommen der anderen beiden oberhalb des Durchschnitts liegen. Anders interpretiert wenden die Personen 2 und 3 insgesamt 700 Euro von ihrem Einkommen auf, um die Kosten g des öffentlichen Gutes zu tragen und der Person 1 netto einen Transfer von 100 Euro zu geben.

Übungsaufgabe 7:

a) Zunächst werden die monatlichen Einkommen ermittelt:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{42.000}{12} = 3.500, \\ y_2 &= \frac{51.600}{12} = 4.300, \\ y_3 &= \frac{25.200}{12} = 2.100. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich ein monatliches Durchschnittseinkommen von

$$\bar{y} = \frac{2.100 + 4.300 + 3.500}{3} = 3.300.$$

Das Medianeinkommen ist definiert als das mittlere Einkommen $\tilde{y}$ über alle Bürger. In diesem Fall gilt:

$$\tilde{y} = 3.500,$$

und somit handelt es sich bei Individuum 1 um den Medianwähler. Daraus ergibt sich ein Pauschaltransfer in Höhe von $r = 0.2 \cdot 3.300 - \frac{630}{3} = 450$ sowie