Univ.-Prof. Dr. Wilhelm Rödder
Prof. Longgui Xu (VR China)
Dr. Peter Zörnig
Univ.-Prof. Dr. Rainer E. Burkard
Univ.-Prof. Dr. Heinz Isermann

Modul 32621
Optimierungsmethoden des Operations Research

Kurs 00851
Lineare Optimierung
Kurs 00853
Ganzzahlige Optimierung
Kurs 00855
Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung

LESEPROBE

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Gliederung
Kurs 00851 Lineare Optimierung

Kurseinheit 1 »Simplexverfahren«

Kurseinheit 2 »Dualität und weiterführende Methoden«

Leseprobe 00851, Kurseinheit 1

[…]

1.2 Einführendes Beispiel und Grundlagen

Zur Einführung in die Problematik beginnen wir mit einem Beispiel zur Aluminiumlegierung. Die Aufgabe lautet, 2000 kg einer solchen Legierung aus verschiedenen Schrottsorten zu minimalen Kosten herzustellen, wobei die beschränkte Verfügbarkeit der Rohstoffe und bestimmte Qualitätsanforderungen an die Legierung zu beachten sind.

Es stehen 5 Sorten Schrott sowie handelsübliches „reines" Aluminium (Alr) und „reines" Silizium (Sir) für die Legierung bereit. Die Preise sind:

Tab. 1.1:

Schrottsorte	1	2	3	4	5	Alr	Sir
Preis (€/kg)	0,03	0,08	0,17	0,12	0,15	0,21	0,38

Die Zusammensetzung dieser Rohmaterialien entnehmen Sie dem folgenden Zahlenschema:

Tab. 1.2:

Schrottsorte / Gehalt in %	1	2	3	4	5	Alr	Sir
Eisen (Fe)	15	4	2	4	2	1	3
Kupfer (Cu)	3	5	8	2	6	1	–
Mangan (Mn)	2	4	1	2	2	–	–
Magnesium (Mg)	2	3	–	–	1	–	–
Aluminium (Al)	70	75	80	75	80	97	–
Silizium (Si)	2	6	8	12	2	1	97
sonstige	6	3	1	5	7	–	–

Die Verfügbarkeit der Schrottsorten ist in der folgenden Tabelle angegeben. Die Zeile „Max" enthält die von der jeweiligen Sorte vorhandenen Mengen, während die Zeile „Min" angibt, welche Mindestmengen davon in der Legierung enthalten sein müssen.

Tab. 1.3:

Mengenbeschränkungen in kg \ Schrottsorte	1	2	3	4	5
Min	–	–	400	100	–
Max	200	750	800	700	1500

Die Qualitätsanforderungen formuliert der Fachmann als Mindest- und Höchstgehalten an Metallen in der Legierung:

$$\begin{array}{llrll} Fe & \leq & 3\%, & \text{entspricht} & 60\text{ kg} \\ Cu & \leq & 5\%, & \text{entspricht} & 100\text{ kg} \\ Mn & \leq & 2\%, & \text{entspricht} & 40\text{ kg} \\ Mg & \leq & 1.5\%, & \text{entspricht} & 30\text{ kg} \\ Al & \geq & 75\%, & \text{entspricht} & 1500\text{ kg} \\ Si & \geq & 12.5\%, & \text{entspricht} & 250\text{ kg} \\ Si & \leq & 15\%, & \text{entspricht} & 300\text{ kg.} \end{array} \qquad \mathbf{(1.1)}$$

Um eine mathematische Formulierung der anfangs gestellten Aufgabe zu erhalten, bezeichnen wir mit der Variablen x_j die Menge der j-ten Schrottsorte, die in die Legierung eingeht ($j = 1, ..., 5$); x_6 und x_7 bezeichnen die Menge an Alr bzw. Sir. Über diese Variablen wollen wir entscheiden, sie heißen daher *Entscheidungsvariable*. Die Rohmaterialkosten sind nun durch die lineare Funktion

Entscheidungs-variable

$$x_0 = 0.03x_1 + 0.08x_2 + 0.17x_3 + 0.12x_4 + 0.15x_5 + 0.21x_6 + 0.38x_7 \qquad \mathbf{(1.2)}$$

Zielfunktion

gegeben. Vergleichen Sie hierzu nochmals Tabelle 1.1. Das „Ziel" der Aufgabenstellung ist die Minimierung der Funktion (1.2), die demzufolge *Zielfunktion* genannt wird. Der Wert dieser Funktion wird mit x_0 bezeichnet, da er bei der Lösung des Problems als Variable eines Gleichungssystems in Erscheinung treten wird.

Nebenbedingungen Restriktionen

Die Variablen $x_1, ..., x_7$ können nicht beliebige reelle Zahlen sein, sondern müssen sog. *Nebenbedingungen (Restriktionen)* erfüllen, die sich aus der Aufgabenstellung ergeben.

[…]

4.2 Die Iterationsschritte

[…]

Übungsaufgabe 4.2

i) Es sei das LOP

$$\text{Max } 3x_1 + x_2$$

u.d.N.

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ x_1 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

gegeben. Stellen Sie das zugehörige LOP in Standard-Gleichungsform auf und lösen Sie dies mit Hilfe des obigen Iterationsverfahrens!

ii) Stellen Sie die im Laufe des Verfahrens generierten zulässigen Basislösungen geometrisch als Ecken der zulässigen Lösungsmenge dar!

⌛

[…]

Leseprobe 00851, Kurseinheit 2

[…]

5.3 Die Duale Simplexmethode

Das in Abschnitt 5.2 beschriebene Iterationsverfahren geht von einem primal zulässigen Tableau aus. Unter Beibehaltung der primalen Zulässigkeit werden solange neue Tableaus generiert, bis auch die duale Zulässigkeit erreicht und somit das optimale Tableau gefunden ist.

Die auf der Dualitätstheorie basierende duale Simplexmethode ist dagegen anwendbar, wenn für ein LOP ein dual zulässiges Tableau angegeben werden kann. Analog zum obengenannten Verfahren – man spricht dabei auch von der *primalen Simplexmethode* – werden bei der *dualen Simplexmethode* unter Beibehaltung der dualen Zulässigkeit neue Tableaus generiert, bis auch die primale Zulässigkeit erreicht ist.

primale Simplexmethode

duale Simplexmethode

Wir geben den Algorithmus der dualen Simplexmethode an, demonstrieren ihn an einem Beispiel und werden die Vorgehensweise anschließend anhand von Dualitätsbetrachtungen am Beispiel motivieren.

[…]

Leseprobe 00851, Kurseinheit 3

8 Postoptimale Analyse

Mit der Bestimmung einer optimalen Lösung eines LOPs sind in der Praxis bei weitem noch nicht alle Probleme gelöst. In vielen Fällen unterliegen die Ausgangsdaten **A**, **b** und **c** Schwankungen, deren Einfluß auf die Lösung zu untersuchen ist, oder man stellt im Nachhinein erst fest, daß einige der Daten geändert werden müssen. Möglicherweise wird auch nach der Berechnung der Lösung erst klar, daß noch gewisse Restriktionen oder Variable hinzuzufügen oder zu eliminieren sind.

Um nicht jedesmal ein LOP völlig neu berechnen zu müssen, ist die Untersuchung des Einflusses von Änderungen der Ausgangsdaten auf die optimale Lösung von großem praktischen Interesse. Alle derartigen Überlegungen, die also *nach* der Bestimmung der optimalen Lösung anfallen, werden unter dem Begriff *Postoptimale Analyse* zusammengefaßt.

Postoptimale Analyse

[…]

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 4.2

i) Die Standard Gleichungsform lautet

$$\text{Max } 3x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
-2x_1 + & x_2 + & x_3 & & & & = & 2 \quad \text{u.d.N.} \\
-x_1 + & 2x_2 & & + x_4 & & & = & 7 \\
x_1 & & & & + x_5 & & = & 6 \\
 & x_2 & & & & + x_6 & = & 5 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_0	1	−3	−1	0	0	0	0	0
x_3	0	−2	1	1	0	0	0	2
x_4	0	−1	2	0	1	0	0	7
x_5	0	1	0	0	0	1	0	6
x_6	0	0	1	0	0	0	1	5

$\mathbf{x}^{0^T} = (0,0)^T$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_0	1	0	−1	0	0	3	0	18
x_3	0	0	1	1	0	2	0	14
x_4	0	0	2	0	1	1	0	13
x_1	0	1	0	0	0	1	0	6
x_6	0	0	1	0	0	0	1	5

$\mathbf{x}^{1^T} = (6,0)^T$

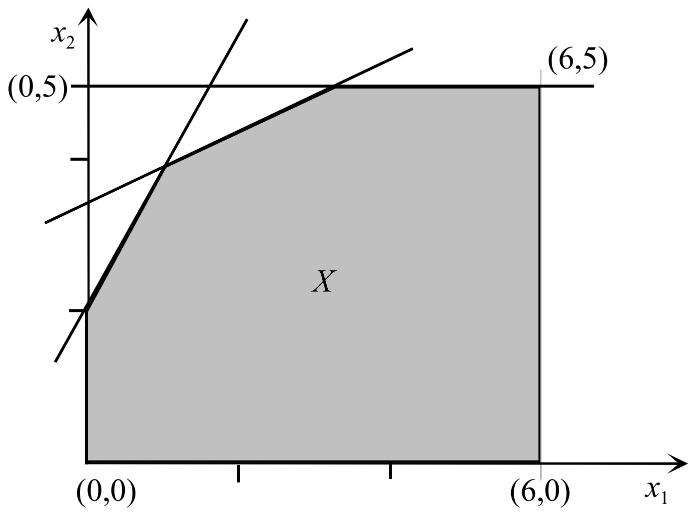
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_0	1	0	0	0	0	3	1	23
x_3	0	0	0	1	0	2	−1	9
x_4	0	0	0	0	1	1	−2	3
x_1	0	1	0	0	0	1	0	6
x_2	0	0	1	0	0	0	1	5

$\mathbf{x}^{2^T} = (6,5)^T$

Die optimale Lösung lautet

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (6, 5, 9, 3, 0, 0)^T.$$

ii)



Die Ecken $(0,0)$, $(6,0)$ und $(6,5)$ sind die im laufe des obigen Verfahrens generierten zulässigen Basislösungen.

✓

Gliederung
Kurs 00853 Ganzzahlige Optimierung

Leseprobe 00853

1 Einführung in die ganzzahlige Optimierung

Im Kurs 851 „Lineare Optimierung“ haben Sie bereits lineare Optimierungsprobleme kennen gelernt. In diesem Kurs werden nun LOPs betrachtet, für deren Strukturvariablen zusätzlich die Ganzzahligkeitsbedingung gilt.

Es sei f eine (reellwertige) Funktion in n Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$ und $\overline{X}$ eine Teilmenge des $\boldsymbol{R}^n$. Dann nennt man

$$\text{Opt } z = f(x_1, ..., x_n) \qquad \textbf{(1.1)}$$

u.d.N.

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^\mathrm{T} \in \overline{\boldsymbol{X}}, \qquad \textbf{(1.2)}$$

$$x_1, x_2, ..., x_k \quad \text{ganzzahlig } (k \le n), \qquad \textbf{(1.3)}$$

eine *gemischt-ganzzahlige Optimierungsaufgabe*. Sollen alle Variablen $x_1, ..., x_n$ nur ganzzahlige Werte annehmen, d.h. ist $k = n$, so liegt eine *rein-ganzzahlige* Optimierungsaufgabe vor.

Zielfunktion

Man bezeichnet f als *Zielfunktion*. In weitaus den meisten Fällen ist die Zielfunktion *linear*, d.h. f hat die Form

$$f(x_1, ..., x_n) = \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x} = c_1x_1 + ... + c_nx_n. \qquad \textbf{(1.4)}$$

Menge der zulässigen Punkte

Durch (1.2) und (1.3) wird die *Menge $\boldsymbol{X}$ der zulässigen Punkte* beschrieben. $\boldsymbol{X}$ läßt sich meist durch lineare Ungleichungen, Nicht-negativitätsbedingungen und Ganzheitsforderungen beschreiben. In diesem Falle ist $\boldsymbol{X}$ die Menge aller $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^\mathrm{T}$, für die gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i\,, \quad & i = 1, ..., m, \qquad \textbf{(1.5)} \\ x_j \ge 0, \quad & j = 1, ..., n, \\ x_1, ..., x_k \quad & \text{ganzzahlig.} \end{aligned}$$

Faßt man die Koeffizienten a_{ij} zu einer $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ und die m Koeffizienten b_i zu einem Spaltenvektor $\mathbf{b}$ zusammen, so läßt sich $\boldsymbol{X}$ kurz durch

$$\boldsymbol{X} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \le \mathbf{b},\, \mathbf{x} \ge 0,\, x_1, ..., x_k \quad \text{ganzzahlig}\}$$

beschreiben. Ein Problem der Form

gemischt-ganzzahliges lineares Programm

$$\text{Opt}\,\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0,\ x_1, ..., x_k \ \text{ ganzzahlig}\} \qquad \text{(MIP)}$$

nennt man *gemischt-ganzzahliges lineares Programm*[1]. Ist $k = n$, so schreibt man

$$\text{Opt}\,\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0,\ \text{ ganzzahlig}\} \qquad \text{(IP)}$$

rein-ganzzahliges lineares Programm

und nennt dieses Problem *(rein-) ganzzahliges lineares Programm*[2].

Im Falle $n = 2$ kann man die Menge der zulässigen Punkte leicht zeichnerisch darstellen.

Beispiel 1.1

Man zeichne die Menge aller Punkte, für die gilt

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1 + x_2 &\le 6 \\ 4x_1 - 3x_2 &\le 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \\ x_1, x_2 &\ \text{ ganzzahlig} \end{aligned}$$

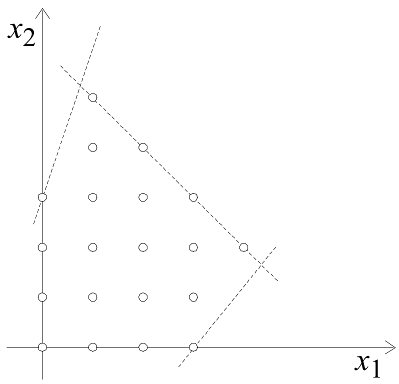


Abb.1.1: Menge der zulässigen Punkte zu Beispiel 1.1

Indem man nun die Zielfunktionswerte über der Menge ***X*** betrachtet, kann man leicht zeichnerisch ganzzahlige Optimierungsprobleme in zwei Variablen lösen.

1 Die Abkürzung MIP steht für *mixed integer program* und hat sich international eingebürgert.

2 IP steht hier als Abkürzung für *integer programm*.

[…]

2.2 Branch und Bound Verfahren zur Lösung gemischt-ganzzahliger linearer Programme

Man löse das rein-ganzzahlige lineare Problem

$$\max 2x_1 + x_2 + x_3$$

u.d.N.

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq 4$$
$$4x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$
$$x_j \geq 0, \text{ ganzzahlig für } j = 1, 2, 3$$

Ein optimales Tableau für das zugehörige lineare Programm lautet

	x_1	x_4	x_5	b
	2	0	1	8
x_3	$7/3$	$1/6$	$1/2$	$14/3$
x_2	$5/3$	$-1/6$	$1/2$	$10/3$

und ergibt $\mathbf{x}^0 = (0, 10/3, 14/3)^T$ mit $z = 8$.

Es gilt $I = \{1,2\}$ und $I_0 = \{1\}$. Da alle Elemente der ersten Zeile positiv sind, können wir die Restriktion $x_3 \leq 4$ hinzufügen, die auf folgendes neue Tableau führt (vgl. Schritt 6)

	x_1	x_4	x_5	b
	2	0	1	8
s_3	$-7/3$	$-1/6$	$-1/2$	$-2/3$
x_2	$5/3$	$-1/6$	$1/2$	$10/3$

wobei $x_3 + s_3 = 4$, $0 \leq s_3 \leq 4$ gilt. Ein dualer Simplexschritt liefert:

	x_1	s_3	x_5	b
	2	0	1	8
x_4		$\cdots$		4
x_2		$\cdots$		4

Somit ist $\mathbf{x}^1 = (0, 4, 4)^T$, da aus $s_3 = 0$ jetzt $x_3 = 4$ folgt. Damit wird $\mathbf{x} := (0, 4, 4)^T$ und
$x_2 = x_4 = x_5 = 1$, $x_1 = x_3 = 0$ mit $z = 12$.

Gliederung
Kurs 00855 Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung

Leseprobe 00855

[…]

1.2 Aufgabenstellung eines Vektormaximumproblems

Beispiel 1.1

Betrachten wir das folgende LVMP:

$$\text{"max"} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3\,x_2 & \leq & 42 \\ x_1 + x_2 & \leq & 20 \\ 2\,x_1 + x_2 & \leq & 30 \\ x_1 & \geq & 3 \\ x_2 & \geq & 2 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

In Abbildung 1.1 ist für dieses LVMP die Lösungsmenge, das Polyeder X, mit den 5 Eckpunkten $x^1,...,x^5$, dargestellt. Für die Eckpunkte sind die Werte der Variablen x_1 und x_2 und die der Zielfunktionen $z_1(x)$ und $z_2(x)$ in Tabelle 1.1 zusammengestellt.

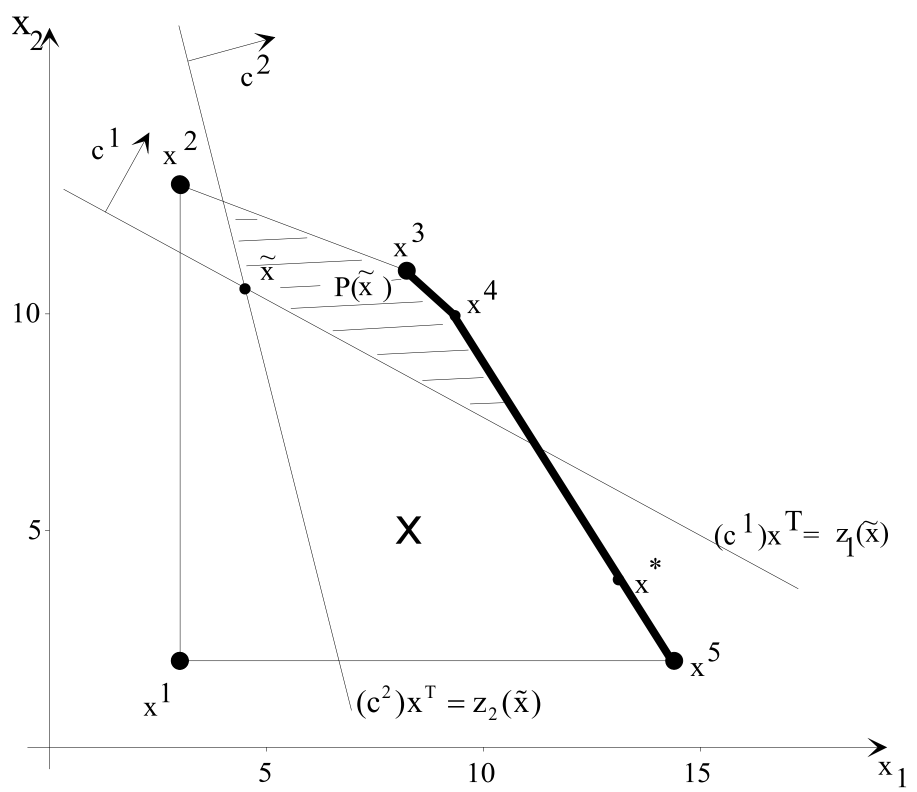


Abbildung 1.1 Graphische Darstellung und Menge X und X_E

Tabelle 1.1: Ecken und Zielfunktionswerte

	$x^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$x^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix}$	$x^3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$	$x^4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$	$x^5 = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$
$z_1(x^k)$	7	29	31(max)	30	18
$z_2(x^k)$	14	25	47	50	58(max)

Indem wir zu jedem $x \in X$ die zugehörigen Werte $z_1(x)$ und $z_2(x)$ berechnen, erhalten wir die in Abbildung 1.2 im z_1 - z_2 - Koordinatensystem dargestellte Menge der Zielwertvektoren $Z = \{z(x) \mid x \in X\}$.

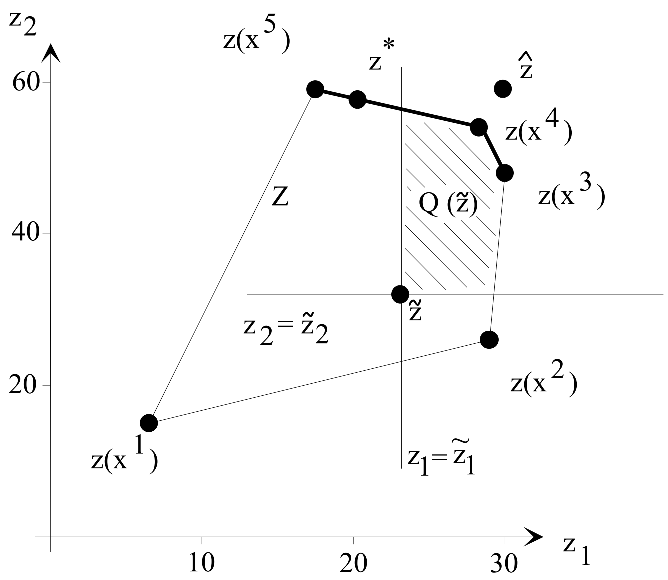


Abbildung 1.2: Graphische Darstellung der Menge Z und Z_E

[…]

3.1 Kompromißmodelle mit skalarer Präferenzfunktion

Satz 3.1

Ist $\phi(z(x))$ eine in z für $z \in Z$ *streng* monoton wachsende Funktion, dann ist jede optimale Lösung von (3.1) eine funktional-effiziente Lösung von (1.1).

Sofern $\phi\big(z(x)\big)$ eine in z für $z \in Z$ *monoton wachsende* Funktion ist, ist mindestens eine optimale Lösung von (3.1) eine funktional-effiziente Lösung von (1.1) (vgl. z.B. KOSMOL, 1973, S.79). Hat (3.1) nur eine optimale Lösung, so ist sie auch eine funktional-effiziente Lösung von (1.1). Existieren mehrere optimale Lösungen von (3.1), so können unter ihnen auch nicht funktional-effiziente Lösungen von (1.1) sein. Dies illustriert das folgende Beispiel:

Beispiel 3.1

Gegeben sei das LVMP

$$\text{"max"}\ \ z(x) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

u.d.N.

$$6x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 + \ \ x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \ \geq \ 0$$

sowie $\phi\big(z(x)\big) = (1{,}0)\ z(x) = 3\ x_1 + x_2$.

$\phi\big(z(x)\big)$ ist eine in z monoton wachsende Funktion.

Die Menge der bezüglich $\phi\big(z(x)\big)$ optimalen Lösungen lautet:

$$X^* = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix},\ \ 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

Wir erhalten $X^* \cap X_E = (0{,}6)^T$, so daß $x^* = (0{,}6)^T$ jene bezüglich $\phi\big(z(x)\big)$ optimale Lösung ist, die gleichzeitig funktional-effiziente Lösung des LVMPs ist.

[...]