

Univ.-Prof. Dr. Wilhelm Rödder  
Prof. Longgui Xu (VR China)  
Dr. Peter Zörnig  
Univ.-Prof. Dr. Rainer E. Burkard  
Univ.-Prof. Dr. Heinz Isermann

# Modul 32621

## Optimierungsmethoden des Operations Research

Kurs 00851  
Lineare Optimierung  
Kurs 00853  
Ganzzahlige Optimierung  
Kurs 00855  
Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung

### LESEPROBE

Fakultät für  
**Wirtschafts-  
wissenschaft**

Der Inhalt dieses Dokumentes darf ohne vorherige schriftliche Erlaubnis durch die FernUniversität in Hagen nicht (ganz oder teilweise) reproduziert, benutzt oder veröffentlicht werden. Das Copyright gilt für alle Formen der Speicherung und Reproduktion, in denen die vorliegenden Informationen eingeflossen sind, einschließlich und zwar ohne Begrenzung Magnetspeicher, Computerausdrucke und visuelle Anzeigen. Alle in diesem Dokument genannten Gebrauchsnamen, Handelsnamen und Warenbezeichnungen sind zumeist eingetragene Warenzeichen und urheberrechtlich geschützt. Warenzeichen, Patente oder Copyrights gelten gleich ohne ausdrückliche Nennung. In dieser Publikation enthaltene Informationen können ohne vorherige Ankündigung geändert werden.

## **Gliederung**

### **Kurs 00851 Lineare Optimierung**

---

#### **Kurseinheit 1 »Simplexverfahren«**

##### **1. Einleitung**

- 1.1. Einordnung und Übersicht des Stoffes
- 1.2. Einführendes Beispiel und Grundlagen

##### **2. Lineare Gleichungssysteme**

- 2.1. Die allgemeine Lösung linearer Gleichungssysteme
- 2.2. Basislösungen

##### **3. Die lineare Optimierungsaufgabe**

- 3.1. Die Standard-Formen des linearen Optimierungsproblems
- 3.2. Grundideen zur Lösung von LOPs

##### **4. Der Simplexalgorithmus**

- 4.1. Verbesserung von Basislösungen und Optimalität
- 4.2. Die Iterationsschritte
- 4.3. Die Zweiphasenmethode
- 4.4. Entartung und Konvergenz des Simplexverfahrens
- 4.5. Ökonomische Interpretation der Simplex-Iterationen

#### **Lösungen zu den Übungsaufgaben**

#### **Kurseinheit 2 »Dualität und weiterführende Methoden«**

##### **5. Dualitätstheorie**

- 5.1. Der Dualitätsbegriff, zueinander duale lineare Optimierungsprobleme
- 5.2. Zusammenhänge zwischen zueinander dualen linearen Optimierungsproblemen
- 5.3. Die duale Simplexmethode

##### **6. Die revidierte Simplexmethode**

- 6.1. Pivotschritte und Elementarmatrizen
- 6.2. Der Alogorithmus

##### **7. Der Simplexalgorithmus für LOPs mit beschränkten Variablen**

## **Lösungen zu den Übungsaufgaben**

### **Kurseinheit 3 »Postoptimale Analyse und LP-Software«**

#### **8. Postoptimale Analyse**

- 8.1. Sensitivitätsanalyse
- 8.2. Parametrische Programmierung
- 8.3. Strukturelle Änderungen der Ausgangsdaten

#### **9. Der Umgang mit LP-Software**

- 9.1. Das Softwareangebot
- 9.2. Dateneingabe und Lösungsausgabe bei Standard-LP-Software
- 9.3. Dateneingabe und Lösungsausgabe mittels Excel unter Windows
- 9.4. Ein LP-Modell mit freien Variablen
- 9.5. Postoptimale Analyse bei Standard-LP-Software

## **Lösungen zu den Übungsaufgaben**

**Leseprobe 00851, Kurseinheit 1**

[...]

**1.2 Einführendes Beispiel und Grundlagen**

Zur Einführung in die Problematik beginnen wir mit einem Beispiel zur Aluminiumlegierung. Die Aufgabe lautet, 2000 kg einer solchen Legierung aus verschiedenen Schrottsorten zu minimalen Kosten herzustellen, wobei die beschränkte Verfügbarkeit der Rohstoffe und bestimmte Qualitätsanforderungen an die Legierung zu beachten sind.

Es stehen 5 Sorten Schrott sowie handelsübliches „reines“ Aluminium (Alr) und „reines“ Silizium (Sir) für die Legierung bereit. Die Preise sind:

**Tab. 1.1:**

Schrottsorte	1	2	3	4	5	Alr	Sir
Preis (€/kg)	0,03	0,08	0,17	0,12	0,15	0,21	0,38

Die Zusammensetzung dieser Rohmaterialien entnehmen Sie dem folgenden Zahlenschema:

**Tab. 1.2:**

Gehalt in %	Schrottsorte							
	1	2	3	4	5	Alr	Sir	
Eisen (Fe)	15	4	2	4	2	1	3	
Kupfer (Cu)	3	5	8	2	6	1	–	
Mangan (Mn)	2	4	1	2	2	–	–	
Magnesium (Mg)	2	3	–	–	1	–	–	
Aluminium (Al)	70	75	80	75	80	97	–	
Silizium (Si)	2	6	8	12	2	1	97	
sonstige	6	3	1	5	7	–	–	

Die Verfügbarkeit der Schrottsorten ist in der folgenden Tabelle angegeben. Die Zeile „Max“ enthält die von der jeweiligen Sorte vorhandenen Mengen, während die Zeile „Min“ angibt, welche Mindestmengen davon in der Legierung enthalten sein müssen.

**Tab. 1.3:**

Schrottsorte	1	2	3	4	5
Mengenbeschränkungen in kg					
Min	–	–	400	100	–
Max	200	750	800	700	1500

Die Qualitätsanforderungen formuliert der Fachmann als Mindest- und Höchstgehalten an Metallen in der Legierung:

$$\begin{aligned}
 \text{Fe} &\leq 3\%, \text{ entspricht } 60 \text{ kg} \\
 \text{Cu} &\leq 5\%, \text{ entspricht } 100 \text{ kg} \\
 \text{Mn} &\leq 2\%, \text{ entspricht } 40 \text{ kg} \\
 \text{Mg} &\leq 1.5\%, \text{ entspricht } 30 \text{ kg} \\
 \text{Al} &\geq 75\%, \text{ entspricht } 1500 \text{ kg} \\
 \text{Si} &\geq 12.5\%, \text{ entspricht } 250 \text{ kg} \\
 \text{Si} &\leq 15\%, \text{ entspricht } 300 \text{ kg.}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

**Entscheidungsvariable**

Um eine mathematische Formulierung der anfangs gestellten Aufgabe zu erhalten, bezeichnen wir mit der Variablen  $x_j$  die Menge der  $j$ -ten Schrottsorte, die in die Legierung eingeht ( $j = 1, \dots, 5$ );  $x_6$  und  $x_7$  bezeichnen die Menge an Alr bzw. Sir. Über diese Variablen wollen wir entscheiden, sie heißen daher *Entscheidungsvariable*. Die Rohmaterialkosten sind nun durch die lineare Funktion

$$x_0 = 0.03x_1 + 0.08x_2 + 0.17x_3 + 0.12x_4 + 0.15x_5 + 0.21x_6 + 0.38x_7 \tag{1.2}$$

**Zielfunktion**

gegeben. Vergleichen Sie hierzu nochmals Tabelle 1.1. Das „Ziel“ der Aufgabenstellung ist die Minimierung der Funktion (1.2), die demzufolge *Zielfunktion* genannt wird. Der Wert dieser Funktion wird mit  $x_0$  bezeichnet, da er bei der Lösung des Problems als Variable eines Gleichungssystems in Erscheinung treten wird.

**Nebenbedingungen  
Restriktionen**

Die Variablen  $x_1, \dots, x_7$  können nicht beliebige reelle Zahlen sein, sondern müssen sog. *Nebenbedingungen (Restriktionen)* erfüllen, die sich aus der Aufgabenstellung ergeben.

[...]

## 4.2 Die Iterationsschritte

[...]

### Übungsaufgabe 4.2

i) Es sei das LOP

$$\text{Max } 3x_1 + x_2$$

u.d.N.

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 7$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

gegeben. Stellen Sie das zugehörige LOP in Standard-Gleichungsform auf und lösen Sie dies mit Hilfe des obigen Iterationsverfahrens!

ii) Stellen Sie die im Laufe des Verfahrens generierten zulässigen Basislösungen geometrisch als Ecken der zulässigen Lösungsmenge dar!



[...]

## Leseprobe 00851, Kurseinheit 2

[...]

## 5.3 Die Duale Simplexmethode

Das in Abschnitt 5.2 beschriebene Iterationsverfahren geht von einem primal zulässigen Tableau aus. Unter Beibehaltung der primalen Zulässigkeit werden solange neue Tableaus generiert, bis auch die duale Zulässigkeit erreicht und somit das optimale Tableau gefunden ist.

Die auf der Dualitätstheorie basierende duale Simplexmethode ist dagegen anwendbar, wenn für ein LOP ein dual zulässiges Tableau angegeben werden kann. Analog zum obengenannten Verfahren – man spricht dabei auch von der *primalen Simplexmethode* – werden bei der *dualen Simplexmethode* unter Beibehaltung der dualen Zulässigkeit neue Tableaus generiert, bis auch die primale Zulässigkeit erreicht ist.

**primale  
Simplexmethode**

**duale  
Simplexmethode**

Wir geben den Algorithmus der dualen Simplexmethode an, demonstrieren ihn an einem Beispiel und werden die Vorgehensweise anschließend anhand von Dualitätsbetrachtungen am Beispiel motivieren.

[...]

## Leseprobe 00851, Kurseinheit 3

### 8 Postoptimale Analyse

Mit der Bestimmung einer optimalen Lösung eines LOPs sind in der Praxis bei weitem noch nicht alle Probleme gelöst. In vielen Fällen unterliegen die Ausgangsdaten  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  Schwankungen, deren Einfluß auf die Lösung zu untersuchen ist, oder man stellt im Nachhinein erst fest, daß einige der Daten geändert werden müssen. Möglicherweise wird auch nach der Berechnung der Lösung erst klar, daß noch gewisse Restriktionen oder Variable hinzuzufügen oder zu eliminieren sind.

Um nicht jedesmal ein LOP völlig neu berechnen zu müssen, ist die Untersuchung des Einflusses von Änderungen der Ausgangsdaten auf die optimale Lösung von großem praktischen Interesse. Alle derartigen Überlegungen, die also *nach* der Bestimmung der optimalen Lösung anfallen, werden unter dem Begriff *Postoptimale Analyse* zusammengefaßt.

Postoptimale  
Analyse

[...]

### Lösungen zu den Übungsaufgaben

#### Übungsaufgabe 4.2

i) Die Standard Gleichungsform lautet

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } 3x_1 + x_2 \\
 -2x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \quad \text{u.d.N.} \\
 -x_1 + 2x_2 + x_4 & = 7 \\
 x_1 + x_5 & = 6 \\
 x_2 + x_6 & = 5 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0
 \end{aligned}$$



	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_0$	1	-3	-1	0	0	0	0	0
$x_3$	0	-2	1	1	0	0	0	2
$x_4$	0	-1	2	0	1	0	0	7
$x_5$	0	1	0	0	0	1	0	6
$x_6$	0	0	1	0	0	0	1	5

$$\mathbf{x}^{0T} = (0,0)^T$$

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_0$	1	0	-1	0	0	3	0	18
$x_3$	0	0	1	1	0	2	0	14
$x_4$	0	0	2	0	1	1	0	13
$x_1$	0	1	0	0	0	1	0	6
$x_6$	0	0	1	0	0	0	1	5

$$\mathbf{x}^{1T} = (6,0)^T$$

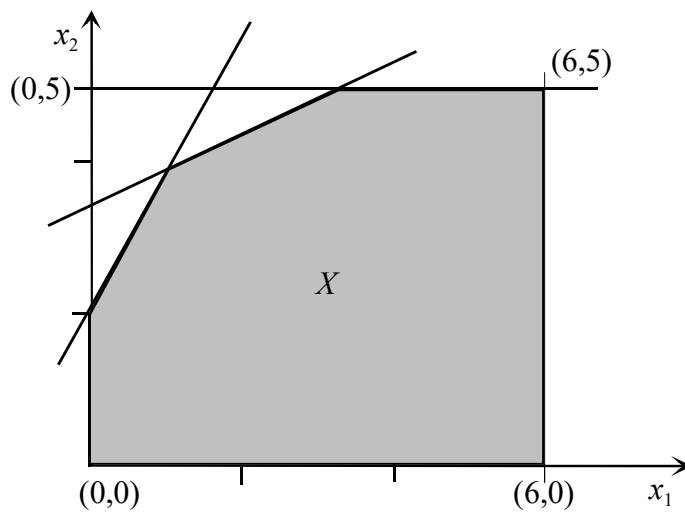
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_0$	1	0	0	0	0	3	1	23
$x_3$	0	0	0	1	0	2	-1	9
$x_4$	0	0	0	0	1	1	-2	3
$x_1$	0	1	0	0	0	1	0	6
$x_2$	0	0	1	0	0	0	1	5

$$\mathbf{x}^{2T} = (6,5)^T$$

Die optimale Lösung lautet

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (6, 5, 9, 3, 0, 0)^T.$$

ii)



Die Ecken  $(0,0)$ ,  $(6,0)$  und  $(6,5)$  sind die im Laufe des obigen Verfahrens generierten zulässigen Basislösungen.



## **Gliederung**

### **Kurs 00853 Ganzzahlige Optimierung**

---

**Symbolverzeichnis**

**Glossar**

**Lernziele**

#### **1. Einführung in die ganzzahlige Optimierung**

- 1.1. Optimierungsprobleme mit diskreten Variablen
- 1.2. Zusammenhang zwischen linearer und ganzzahliger Optimierung
- 1.3. Lösungskonzepte für ganzzahlige Optimierungsprobleme
- 1.4. Verfahren zur Lösung diskreter Optimierungsaufgaben

#### **2. Branch und Bound Verfahren**

- 2.1. Allgemeine Beschreibung von Branch und Bound Verfahren
- 2.2. Branch und Bound Verfahren zur Lösung gemischt-ganzzahliger linearer Programme
- 2.3. Ein Branch und Bound Verfahren zur Lösung des Rundreiseproblems

#### **3. Schnittebenenverfahren**

- 3.1. Schnittebenenverfahren für rein ganzzahlige lineare Programme
- 3.2. Ein rein-ganzzahliges Schnittebenenverfahren
- 3.3. Ein Schnittebenenverfahren zur Lösung gemischt-ganzzahliger linearer Programme
- 3.4. Bernders' Dekomposition

#### **4. Das Rucksackproblem**

#### **5. Einige spezielle Probleme der kombinatorischen Optimierung**

- 5.1. Überdeckungs- und Partitionsprobleme
- 5.2. Symmetrische Rundreiseprobleme

#### **6. Der Einsatz von EDV zu Lösung diskreter Optimierungsprobleme**

**Lösungen zu den Übungsaufgaben**

**Anhang: Ungarische Methode**

## Leseprobe 00853

### 1 Einführung in die ganzzahlige Optimierung

Im Kurs 851 „Lineare Optimierung“ haben Sie bereits lineare Optimierungsprobleme kennen gelernt. In diesem Kurs werden nun LOPs betrachtet, für deren Strukturvariablen zusätzlich die Ganzzahligkeitsbedingung gilt.

Es sei  $f$  eine (reellwertige) Funktion in  $n$  Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und  $\bar{X}$  eine Teilmenge des  $\mathbf{R}^n$ . Dann nennt man

$$\text{Opt } z = f(x_1, \dots, x_n) \quad (1.1)$$

u.d.N.

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \bar{X}, \quad (1.2)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_k \text{ ganzzahlig } (k \leq n), \quad (1.3)$$

eine *gemischt-ganzzahlige Optimierungsaufgabe*. Sollen alle Variablen  $x_1, \dots, x_n$  nur ganzzahlige Werte annehmen, d.h. ist  $k = n$ , so liegt eine *rein-ganzzahlige Optimierungsaufgabe* vor.

Man bezeichnet  $f$  als *Zielfunktion*. In weitaus den meisten Fällen ist die Zielfunktion *linear*, d.h.  $f$  hat die Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n. \quad (1.4)$$

Durch (1.2) und (1.3) wird die *Menge  $X$  der zulässigen Punkte* beschrieben.  $X$  läßt sich meist durch lineare Ungleichungen, Nicht-negativitätsbedingungen und Ganzheitsforderungen beschreiben. In diesem Falle ist  $X$  die Menge aller  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ , für die gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, & i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, & j = 1, \dots, n, \\ x_1, \dots, x_k &\text{ ganzzahlig.} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Faßt man die Koeffizienten  $a_{ij}$  zu einer  $m \times n$ -Matrix  $\mathbf{A}$  und die  $m$  Koeffizienten  $b_i$  zu einem Spaltenvektor  $\mathbf{b}$  zusammen, so läßt sich  $X$  kurz durch

$$X = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0, x_1, \dots, x_k \text{ ganzzahlig}\}$$

beschreiben. Ein Problem der Form

**Zielfunktion**

**Menge der zulässigen Punkte**

**gemischt-ganzzahliges lineares Programm**

$$\text{Opt } \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0, x_1, \dots, x_k \text{ ganzzahlig} \} \quad (\text{MIP})$$

nennt man *gemischt-ganzzahliges lineares Programm*<sup>1</sup>. Ist  $k = n$ , so schreibt man

$$\text{Opt } \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0, \text{ ganzzahlig} \} \quad (\text{IP})$$

**rein-ganzzahliges lineares Programm**

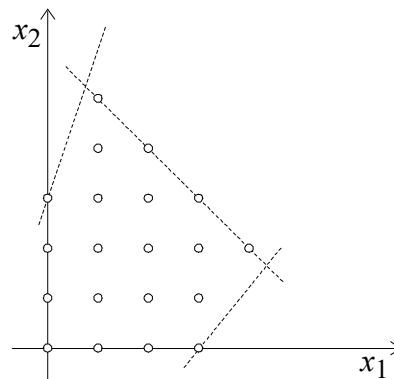
und nennt dieses Problem (*rein-*) *ganzzahliges lineares Programm*<sup>2</sup>.

Im Falle  $n = 2$  kann man die Menge der zulässigen Punkte leicht zeichnerisch darstellen.

### Beispiel 1.1

Man zeichne die Menge aller Punkte, für die gilt

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 4x_1 - 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\text{ ganzzahlig} \end{aligned}$$



**Abb.1.1:** Menge der zulässigen Punkte zu Beispiel 1.1



Indem man nun die Zielfunktionswerte über der Menge  $X$  betrachtet, kann man leicht zeichnerisch ganzzahlige Optimierungsprobleme in zwei Variablen lösen.



<sup>1</sup> Die Abkürzung MIP steht für *mixed integer program* und hat sich international eingebürgert.  
<sup>2</sup> IP steht hier als Abkürzung für *integer program*.

[...]

## 2.2 Branch und Bound Verfahren zur Lösung gemischt-ganzzahliger linearer Programme

Man löse das rein-ganzzahlige lineare Problem

$$\max 2x_1 + x_2 + x_3$$

u.d.N.

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq 4$$

$$4x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$

$$x_j \geq 0, \text{ ganzzahlig für } j = 1, 2, 3$$

Ein optimales Tableau für das zugehörige lineare Programm lautet

	$x_1$	$x_4$	$x_5$	$b$
	2	0	1	8
$x_3$	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{14}{3}$
$x_2$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{3}$

und ergibt  $\mathbf{x}^0 = (0, \frac{10}{3}, \frac{14}{3})^T$  mit  $z = 8$ .

Es gilt  $I = \{1, 2\}$  und  $I_0 = \{1\}$ . Da alle Elemente der ersten Zeile positiv sind, können wir die Restriktion  $x_3 \leq 4$  hinzufügen, die auf folgendes neue Tableau führt (vgl. Schritt 6)

	$x_1$	$x_4$	$x_5$	$b$
	2	0	1	8
$s_3$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$
$x_2$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{3}$

wobei  $x_3 + s_3 = 4$ ,  $0 \leq s_3 \leq 4$  gilt. Ein dualer Simplexschritt liefert:

	$x_1$	$s_3$	$x_5$	$b$
	2	0	1	8
$x_4$		...		4
$x_2$		...		4

Somit ist  $\mathbf{x}^1 = (0, 4, 4)^T$ , da aus  $s_3 = 0$  jetzt  $x_3 = 4$  folgt. Damit wird  $\mathbf{x} := (0, 4, 4)^T$  und  $x_2 = x_4 = x_5 = 1, x_1 = x_3 = 0$  mit  $z = 12$ .

## **Gliederung**

### **Kurs 00855 Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung**

---

#### **Symbolverzeichnis**

#### **1. Grundlagen und Aufgabenstellungen einer Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung**

- 1.1 Beispiele
- 1.2 Aufgabenstellung eines Vektormaximumproblems
- 1.3 Aufgabenstellungen einer Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung

#### **2. Ermittlung funktionaleffizienter Lösungen eines Vektormaximumproblems**

- 2.1 Parametrische Programme zur Lösung von Vektormaximumproblemen
- 2.2 Ermittlung der vollständigen Lösung eines linearen Vektormaximumproblems

#### **3. Ermittlung einer Kompromisslösung mit Hilfe von Kompromissmodellen**

- 3.1 Kompromissmodelle mit skalarer Präferenzfunktion
- 3.2 Kompromissmodelle bei vorgegebenem Zielwertvektor

#### **4. Ermittlung einer Kompromisslösung unter Anwendung interaktiver Verfahren**

- 4.1 Allgemeine Charakterisierung interaktiver Verfahren
- 4.2 Steuerung des Suchprozesses durch sukzessive Vorgabe von Untergrenzen bezüglich der Zielwerte
- 4.3 Steuerung des Suchprozesses durch eine Bewertung ausgewählter Trade-off-Verfahren

#### **5. Software zur Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung**

#### **6. Lösungen zu den Übungsaufgaben**

#### **7. Glossar**

**Leseprobe 00855**

[...]

**1.2 Aufgabenstellung eines Vektormaximumproblems**

**Beispiel 1.1**

Betrachten wir das folgende LVMP:

$$\text{"max"} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

u.d.N.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 42 \\ x_1 + x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 30 \\ x_1 &\geq 3 \\ x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

In Abbildung 1.1 ist für dieses LVMP die Lösungsmenge, das Polyeder X, mit den 5 Eckpunkten  $x^1, \dots, x^5$ , dargestellt. Für die Eckpunkte sind die Werte der Variablen  $x_1$  und  $x_2$  und die der Zielfunktionen  $z_1(x)$  und  $z_2(x)$  in Tabelle 1.1 zusammengestellt.

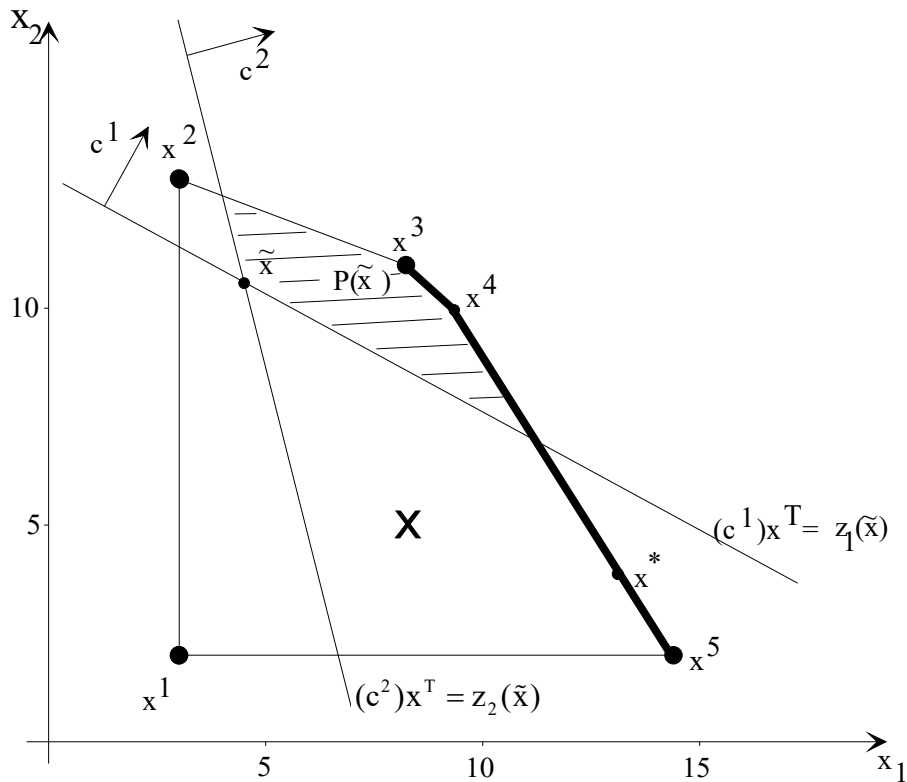
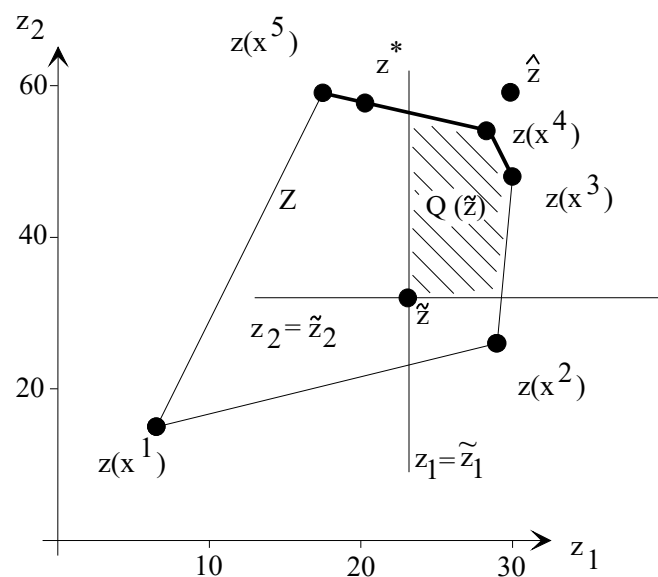


Abbildung 1.1 Graphische Darstellung und Menge X und  $X_E$

Tabelle 1.1: Ecken und Zielfunktionswerte

	$x^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$x^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix}$	$x^3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$	$x^4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$	$x^5 = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$
$z_1(x^k)$	7	29	31(max)	30	18
$z_2(x^k)$	14	25	47	50	58(max)

Indem wir zu jedem  $x \in X$  die zugehörigen Werte  $z_1(x)$  und  $z_2(x)$  berechnen, erhalten wir die in Abbildung 1.2 im  $z_1$  -  $z_2$  - Koordinatensystem dargestellte Menge der Zielwertvektoren  $Z = \{z(x) \mid x \in X\}$ .

Abbildung 1.2: Graphische Darstellung der Menge  $Z$  und  $Z_E$ 

[...]

### 3.1 Kompromißmodelle mit skalarer Präferenzfunktion

#### Satz 3.1

Ist  $\phi(z(x))$  eine in  $z$  für  $z \in Z$  streng monoton wachsende Funktion, dann ist jede optimale Lösung von (3.1) eine funktional-effiziente Lösung von (1.1).





Sofern  $\phi(z(x))$  eine in  $z$  für  $z \in Z$  *monoton wachsende* Funktion ist, ist mindestens eine optimale Lösung von (3.1) eine funktional-effiziente Lösung von (1.1) (vgl. z.B. KOSMOL, 1973, S.79). Hat (3.1) nur eine optimale Lösung, so ist sie auch eine funktional-effiziente Lösung von (1.1). Existieren mehrere optimale Lösungen von (3.1), so können unter ihnen auch nicht funktional-effiziente Lösungen von (1.1) sein. Dies illustriert das folgende Beispiel:

### Beispiel 3.1

Gegeben sei das LVMP

$$\text{"max"} \quad z(x) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

u.d.N.

$$6x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{sowie } \phi(z(x)) = (1, 0) \quad z(x) = 3x_1 + x_2.$$

$\phi(z(x))$  ist eine in  $z$  monoton wachsende Funktion.

Die Menge der bezüglich  $\phi(z(x))$  optimalen Lösungen lautet:

$$X^* = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}, 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

Wir erhalten  $X^* \cap X_E = (0, 6)^T$ , so daß  $x^* = (0, 6)^T$  jene bezüglich  $\phi(z(x))$  optimale Lösung ist, die gleichzeitig funktional-effiziente Lösung des LVMPs ist.



[...]