Univ.-Prof. Dr. Andreas Kleine
Univ.-Prof. Dr. Wilhelm Rödder
Univ.-Prof. Dr. Hermann Singer
Dr. Peter Zörnig
Dipl.-Stat. Anja Bittner
Sebastian Förster

Modul 32741 Vertiefung der Wirtschafts-mathematik und Statistik

Leseprobe

Fakultät für
Wirtschafts-wissenschaft

FernUniversität in Hagen

Vertiefung der Analysis und Linearen Algebra

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

Kapitel 1

Determinante

1.1 Die 2- und die 3-reihige Determinante

Determinante

Die *Determinante* eines 2 × 2 Zahlenschemas

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

oder eines 3 × 3 Zahlenschemas

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

ist jeweils eine reelle Zahl. Sie wird mit

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{bzw. mit}$$

det

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bezeichnet.

Geometrisch bedeutet die 2-reihige Determinante die Fläche des Parallelogramms der Zeilenvektoren

$$\mathbf{a}^{1\mathrm{T}} = (a_{11}, a_{12}),\ \mathbf{a}^{2\mathrm{T}} = (a_{21}, a_{22}).$$

Ebenso bedeutet die 3-reihige Determinante das Volumen des Parallelepipeds der Zeilenvektoren

$$\mathbf{a}^{1\mathrm{T}} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}),\ \ \mathbf{a}^{2\mathrm{T}} = (a_{21}, a_{22}, a_{23}),\ \ \mathbf{a}^{3\mathrm{T}} = (a_{31}, a_{32}, a_{33}).$$

Die folgende Abbildung trägt zur Visualisierung des bisher Gesagten bei.

i) $\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1;\quad \det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=-1\,;$

ii) $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=1;\quad \det\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=-1;\quad \det\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=1.$

Wie bei Einheitswürfeln wird nun auch allgemein bei Determinanten die Reihenfolge der *Zeilenvektoren* bestimmend für das Vorzeichen. So haben die Fläche bzw. das Volumen in Abb. 1.1.1 positives Vorzeichen. Die jeweils aufspannenden Vektoren folgen der Orientierung nach der „Rechte-Hand-Regel".

Zwei andere Eigenschaften der Determinante visualisieren wir im $\boldsymbol{R}^2$, im $\boldsymbol{R}^3$ wird das schon ein wenig unübersichtlich:

- die Determinante ist *homogen* in der ersten Zeile
- die Determinante ist *additiv* in der ersten Zeile.

Linearität von det

Homogenität und Additivität zusammen machen gerade die *Linearität* aus.

Homogenität bedeutet $\begin{vmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ und

Additivität bedeutet $\begin{vmatrix}a_1+b_1 & a_2+b_2\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}.$

λ ist hier eine reelle Zahl und $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{b}$ sind Vektoren, vgl. Abb. 1.1.2.

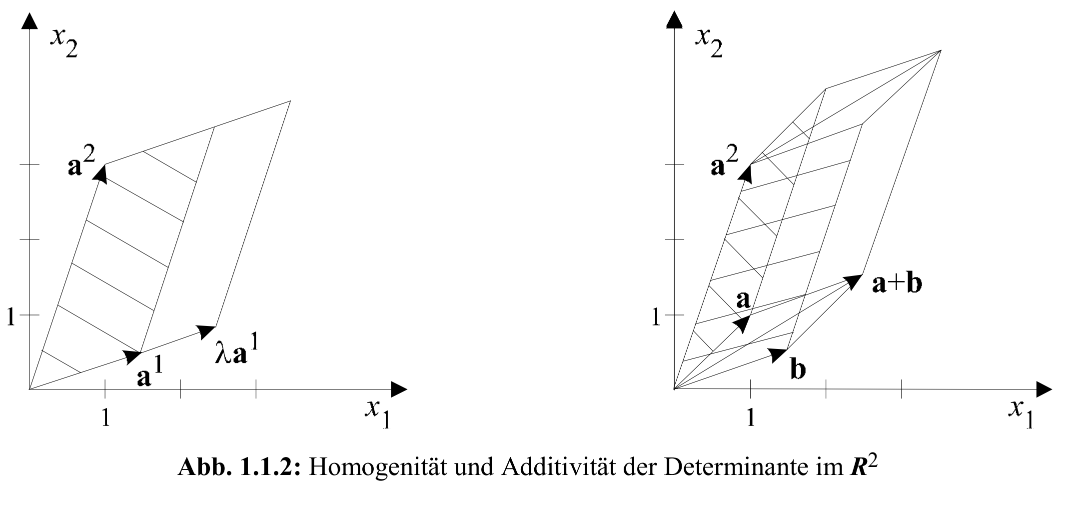


Abb. 1.1.2: Homogenität und Additivität der Determinante im $\boldsymbol{R}^2$

Kapitel 4

Grundlagen der linearen Planungsrechnung

4.1 Die Deckungsbeitragsrechnung

In Unternehmen der verarbeitenden Industrie werden Produkte erzeugt und auf den Markt gebracht. Für diesen Vorgang müssen Dinge, Werte, Kräfte, Dispositionen eingesetzt werden; sie alle fasst man in der Produktions- und Kostentheorie unter dem Begriff *Produktionsfaktoren* zusammen. Der Einsatz oder Verzehr von Produktionsfaktoren oder *Ressourcen* verursacht *Kosten*.

Produktionsfaktoren
Ressourcen
Kosten

Bei Veräußerung eines Produktes am Markt möchte das Unternehmen über den *Preis* diese Kosten vergolten haben und zusätzlich einen *Gewinn* erwirtschaften. Für eine Produkteinheit bezeichnet nun der *Stückdeckungsbeitrag* den Preis abzüglich der Kosten der Faktorverbräuche und zwar derjenigen Verbräuche, die dem Produkt direkt zugeordnet werden können wie etwa Materialien, Hilfsstoffe, Mannstunden, Maschinenstunden, Kilowattstunden etc. Da diese Kosten mit der Anzahl produzierter Stücke variieren, nennt man sie auch *variable* Kosten. Übrig bleibt ein Kostensatz für all die übrigen im Unternehmen eingesetzten Faktoren, die *Fixkosten*. In ihnen erscheinen Löhne und Gehälter für dispositive Tätigkeiten, Abschreibungen auf Grund und Boden sowie Gebäude, Versicherungsprämien und vieles andere mehr.

Preis, Gewinn
Stückdeckungsbeitrag
variable Kosten
Fixkosten

Das Unternehmen möchte nun seine Produktionsmengen x_j der Produkte $P_j,\ j=1,\ldots,n,$ so einrichten, dass

- nicht mehr Ressourcen verzehrt werden als es die Kapazitäten erlauben
- der Gesamtdeckungsbeitrag (als Summe aller Stückdeckungsbeiträge) maximal wird.

Aus der Produktionstheorie ist bekannt, dass bei *linearer Technologie* diese Aufgabe als *Lineares Programmierungsproblem* (LP) oder Lineares Optimierungsproblem (LOP) formulierbar ist. Es hat die Gestalt

lineare Technologie
Lineares Programmierungsproblem

$$\text{Max } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

unter den Nebenbedingungen (u.d.N.)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad &\leq \text{oder} = \text{oder} \geq b_i \quad i = 1,\ldots,m, \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1,\ldots,n. \end{aligned} \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

Hierbei dürfen Sie sich unter den c_j die Stückdeckungsbeiträge, unter den b_i die Kapazitäten der Ressourcen R_i und unter den a_{ij} die Ressourcenverbräuche von R_i pro Stück von P_j vorstellen. Bei $\leq$-Restriktionen liegt eine Verbrauchsbeschränkung nach oben, bei $\geq$-Restriktionen eine nach unten (Mindestverbrauch) vor.

technisch realisierbare Produktion

=- Restriktionen treten z. B. auf, wenn ein Faktor nicht lagerungsfähig ist und genau aufgebraucht werden muss. Ein Vektor $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (x_1,\ldots,x_n)$, der alle Restriktionen in (4.1.1) erfüllt, ist eine *technisch realisierbare* Produktion.

(4.1.1) kann heute auf Rechenanlagen für hunderte von Restriktionen und Variablen gelöst werden. Mehr über die Lösung solcher Probleme erfahren Sie im Modul 32621 „Optimierungsmethoden des Operations Research“ des Lehrstuhls für BWL, insb. Quantitative Methoden und Wirtschaftsmathematik.

Schlupfvariable

Durch einen Trick, nämlich das Einführen einer so genannten *Schlupfvariablen* s_i, kann man die i-te Restriktion von (4.1.1),

sollte sie vom Typ $\leq$ sein, in eine Gleichung überführen

- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0,$

sollte sie vom Typ $\geq$ sein, ebenfalls in eine Gleichung überführen

- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i, \quad s_i \geq 0.$

Die Schlupfvariable stellt im ersten Fall die nicht ausgeschöpften Ressourcen, im zweiten Fall den über den Mindestverbrauch hinausgehenden Verzehr dar. Die Schlupfvariablen liefern selbstverständlich keinen Beitrag zur Zielfunktion.

Kapitel 5

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variabler

5.1 Reelle Funktionen mehrerer Variabler

In der Ökonomie sowie in vielen anderen Anwendungsbereichen der Mathematik ist eine beobachtete Größe häufig von mehreren Variablen abhängig. Die mathematische Beschreibung derartiger Zusammenhänge führt unmittelbar zum Begriff der reellen Funktion in mehreren Variablen.

Definition 5.1.1

reelle Funktion in n (reellen) Variablen,

n-dimensionale Funktion

mehrdimensionale Funktion

(un)abhängige Variable

Es sei $n \in \boldsymbol{N}$ und $D_f \subset \boldsymbol{R}^n$. Wird jedem Punkt $(x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}} \in D_f$ durch eine Funktion f eindeutig eine Zahl $y = f(x_1,\ldots,x_n)$ zugeordnet, so heißt f eine *reelle Funktion in n (reellen) Variablen* bzw. eine *n-dimensionale* Funktion. Im Fall $n > 1$ spricht man auch von einer *mehrdimensionalen* Funktion. Dabei heißen $x_1,\ldots, x_n$ die *unabhängigen* und y die *abhängige* Variable.

Beispiel 5.1.1

Spezielle Funktionen in zwei bzw. drei Variablen sind

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \frac{\sin x_1}{e^{x_2}},$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 x_3^2 + \sin(x_1 x_2),$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{\sqrt{x_3}}{x_1}.$$

Dabei sind die ersten beiden Funktionen auf ganz $\boldsymbol{R}^2$ bzw. $\boldsymbol{R}^3$ definiert, und für den Definitionsbereich der letzten gilt

$$D_f = \left\{(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^3 | x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \geq 0\right\}.$$

Eine wichtige Klasse von Funktionen wird durch die Definition 5.1.2 und Definition 5.1.3 eingeführt.

Definition 5.1.2

Eine Funktion der Gestalt

$$f(x_1,\dots,x_n) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \qquad \textbf{(5.1.1)}$$

affinlineare Funktion
lineare Funktion

wobei die a_i beliebige reelle Zahlen sind, heißt eine *affinlineare Funktion*. Im Fall $a_0 = 0$ heißt sie eine *lineare Funktion*.

Beispiel 5.1.2

Eine affinlineare und eine lineare Funktion sind gegeben durch

i) $f(x_1, x_2, x_3) = 5 + 3x_1 - 7x_2 + \sqrt{2}x_3,$

ii) $f(x_1,\dots,x_4) = 2x_1 - \pi x_2 + \sqrt{2}x_3 + 25x_4.$

Bemerkung 5.1.1

i) Den Graphen der linearen Funktion

$$f(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

kann man in der Form

$$\begin{aligned} G_f &= \left\{(x_1,\dots,x_n,y)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \,\middle|\, y = a_1x_1 + \dots + a_nx_n\right\} \\ &= \left\{(x_1,\dots,x_n,y)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \,\middle|\, (a_1,\dots,a_n,-1)(x_1,\dots,x_n,y)^{\mathrm{T}} = 0\right\} \end{aligned} \qquad \textbf{(5.1.2)}$$

darstellen, denn es gilt

$$\begin{aligned} & y = a_1x_1 + \dots + a_nx_n \\ \Leftrightarrow\ & 0 = a_1x_1 + \dots + a_nx_n - y \\ \Leftrightarrow\ & 0 = (a_1,\dots,a_n,-1)\,(x_1,\dots,x_n,y)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

Beispiel 5.1.7

Die Folge von Punkten $(\mathbf{x}^{(m)})_{m\in \boldsymbol{N}}$ mit

$$\mathbf{x}^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)})^{\mathrm{T}} := \left(2+\frac{1}{m}, \frac{m+2}{m+5}\right)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^2$$

konvergiert gegen den Grenzwert $\mathbf{x}^{(\mathrm{o})} := (2, 1)^{\mathrm{T}}$, da

$$\lim_{m\to\infty}\left(2+\frac{1}{m}\right) = 2 \text{ und } \lim_{m\to\infty}\frac{m+2}{m+5} = 1$$

gilt. Die Punkte der Folge und der Grenzwert $\mathbf{x}^{(\mathrm{o})}$ sind in Abb. 5.1.4 veranschaulicht.

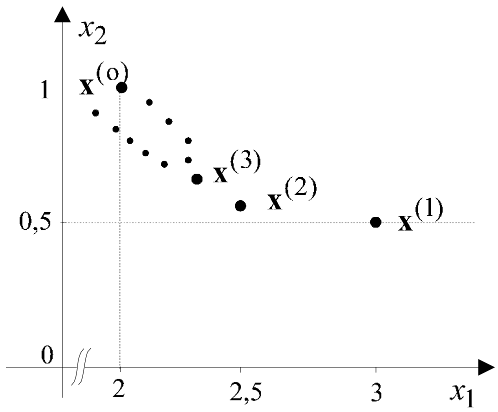


Abb. 5.1.4: Graphische Darstellung der Folge in Beispiel 5.1.7

Übungsaufgabe 5.1.2

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $(\mathbf{x}^{(m)})_{m\in \boldsymbol{N}}$ mit

$\mathbf{x}^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)})^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^2$ – falls diese existieren – für

i) $x_1^{(m)} = \dfrac{1}{m}$, $\quad x_2^{(m)} = cos\dfrac{m}{m+1}$,

ii) $x_1^{(m)} = sin\, m$, $\quad x_2^{(m)} = \dfrac{1}{m^2}$,

iii) $x_1^{(m)} = sin\dfrac{1}{m}$, $\quad x_2^{(m)} = \dfrac{1}{\sqrt{m}} + 3.$

Welche Folge(n) konvergieren nicht?

7 Differential- und Differenzengleichungen

Vorbemerkungen

Wenn sich eine Krankheit ungehindert ausbreitet, so wird häufig von einem exponentiellen Wachstum gesprochen. Die Ermittlung einer Funktion zur Bestimmung der Anzahl an erkrankten Personen zu jedem möglichen Zeitpunkt führt zur Theorie der Differentialgleichungen. Bei vielen ökonomischen Modellen sind Funktionen implizit in Form von Differential- oder Differenzengleichungen gegeben, insbesondere im Zusammenhang mit Produktions- und Nutzenfunktionen sowie Wachstums- und Marktprozessen. Dabei handelt es sich um Gleichungen, die eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen oder zwischen einer Folge und ihren Differenzenfolgen darstellen. Gesucht sind somit die Funktionen bzw. Folgen, die diesen Gleichungen genügen.

In diesem Kapitel wird in die Theorie der Differential- und Differenzengleichungen eingeführt und ihre Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften aufgezeigt. Weiterhin werden einige elementare Lösungsmethoden behandelt, die einen ersten allgemeinen Einblick vermitteln.

Differentialgleichungen dienen der Beschreibung stetiger ökonomischer Prozesse. Differenzengleichungen kommen hingegen bei diskreten Prozessen zur Anwendung, da ökonomische Größen häufig nur für konstante Zeitintervalle zur Verfügung stehen. Sobald bei Prozessen von der diskreten zur stetigen Betrachtungsweise gewechselt wird, gehen Differenzengleichungen in Differentialgleichungen über. Umgekehrt ergeben sich Differenzengleichungen durch die Diskretisierung von Differentialgleichungen. Der enge Zusammenhang von Differential- und Differenzengleichungen wird bereits an dieser Stelle deutlich und zeigt sich wiederholt in den Parallelen der Aufgabenstellungen und den Lösungsmethoden.

Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Eine weitere elementare Lösungsmethode existiert für Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen. Diese DGLn lassen sich in separable DGLn überführen und schließlich mit der Methode „Trennung der Variablen“ lösen. Bezeichnet werden diese DGLn in der Literatur auch häufig als *homogene* Differentialgleichungen.

Definition 7.4.
Eine gewöhnliche DGL erster Ordnung heißt ***Ähnlichkeitsdifferentialgleichung****, wenn sie sich in der Form*

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \textit{bzw.} \qquad y'(x) = g\left(\frac{y(x)}{x}\right) \tag{7.14}$$

darstellen lässt. Dabei ist g eine auf einem Intervall definierte, stetige Funktion.

Um Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen zu lösen, erfolgt zuerst die Substitution

$$z(x) := \frac{y(x)}{x} \qquad \text{bzw.} \qquad y(x) = x \cdot z(x) \tag{7.15}$$

mit der entsprechenden Ableitung gemäß der Produktregel:

$$y'(x) = z(x) + x \cdot z'(x). \tag{7.16}$$

Grundlagen 7.7. *(Produktregel)* [G: 2.3.3]

$$\Big(f(x) \cdot g(x)\Big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Im Folgenden wird zur besseren Übersichtlichkeit die Schreibweise ohne Argument verwendet, d.h. $y' = z + x \cdot z'$. Einsetzen von (7.15) und (7.16) in (7.14) ergibt die DGL $z + x \cdot z' = g(z)$.

Um die Lösungsmethode „Trennung der Variablen“ anwenden zu können, ist zunächst in Schritt T1) eine Substitution von $z = y/x$ notwendig, die dann in Schritt T5) wieder rückgängig gemacht werden muss (Resubstitution). Dieses Vorgehen wird im folgenden Beispiel veranschaulicht.

Beispiel 7.13
Gesucht sei die allgemeine Lösung der DGL $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3$.

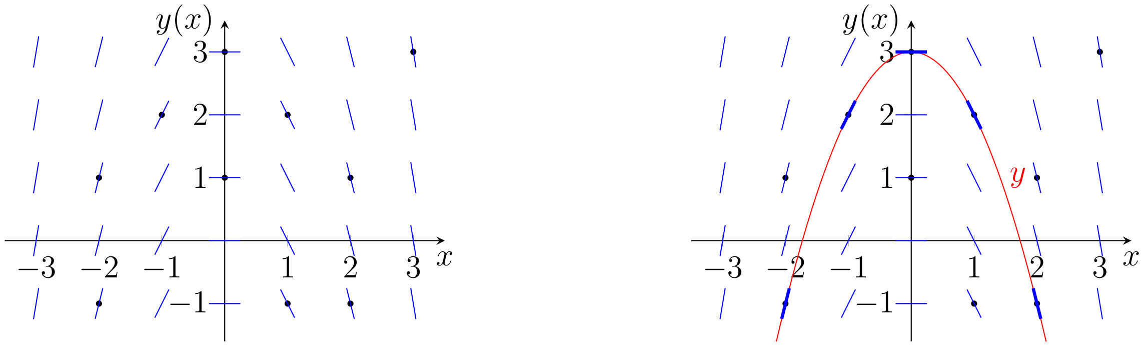
*0) Typus: Ähnlichkeitsdifferentialgleichung mit $g\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^3$.

Lösungen zu den Übungen

Lösung Übung 7.1 auf S. 10:

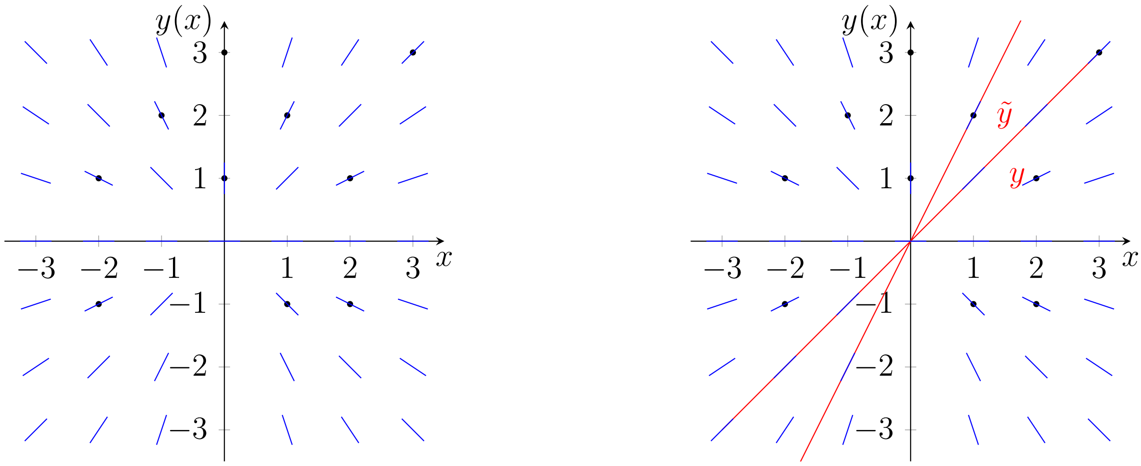
$(x, y(x))$	$(-2,\ -1)$	$(-2, 1)$	$(-1, 2)$	$(0, 1)$	$(0, 3)$
$y'(x) = -2 \cdot x$	4	4	2	0	0

$(x, y(x))$	$(1,\ -1)$	$(1, 2)$	$(2, 1)$	$(2,\ -1)$	$(3, 3)$
$y'(x) = -2 \cdot x$	-2	-2	-4	-4	-6



Richtungsfeld der expliziten DGL $y'(x) = -2 \cdot x$ mit Lösung $y(x) = 3 - x^2$

Lösung Übung 7.2 auf S. 10:



Richtungsfeld der expliziten DGL $y'(x) = \frac{y}{x}$ mit den Lösungen $y(x) = x$ und $\tilde{y}(x) = 2x$.

Aus dem Vergleich möglicher Lösungskurven folgt, dass die allgemeine Lösung die Form $y = c \cdot x$ mit $c \in \mathbb{R}$ besitzt.

Vertiefung der Statistik

Fakultät für
**Wirtschafts-
wissenschaft**

FernUniversität in Hagen

gegeben, wobei die Stichproben(ko)varianzen durch

$$S(X,Y) = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \bar{X})(Y_n - \bar{Y}) \tag{4.3}$$

$$S(X)^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \bar{X})^2 = S(X,X) \tag{4.4}$$

$$S(Y)^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(Y_n - \bar{Y})^2 = S(Y,Y) \tag{4.5}$$

definiert sind.
Explizit kann man auch

Korrelationskoeffizient (Stichprobe)

$$\boxed{R = \frac{\sum_{n=1}^{N}(X_n - \bar{X})(Y_n - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(X_n - \bar{X})^2 \sum_{n=1}^{N}(Y_n - \bar{Y})^2}}} \tag{4.6}$$

schreiben.

4.1.1 Signifikanztest $\rho = 0$

Bei bivariat normalverteilten Merkmalen (Abb. 4.1)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x\sigma_y\rho \\ \sigma_x\sigma_y\rho & \sigma_y^2 \end{bmatrix}\right). \tag{4.7}$$

ist unter

Test des Korrelationskoeffizienten

$$H_0 : \rho = 0 \tag{4.8}$$

$$H_1 : \rho \neq 0 \tag{4.9}$$

die Teststatistik

$$\boxed{T = \sqrt{N-2}\frac{R}{\sqrt{1-R^2}} \sim t(N-2).} \tag{4.10}$$

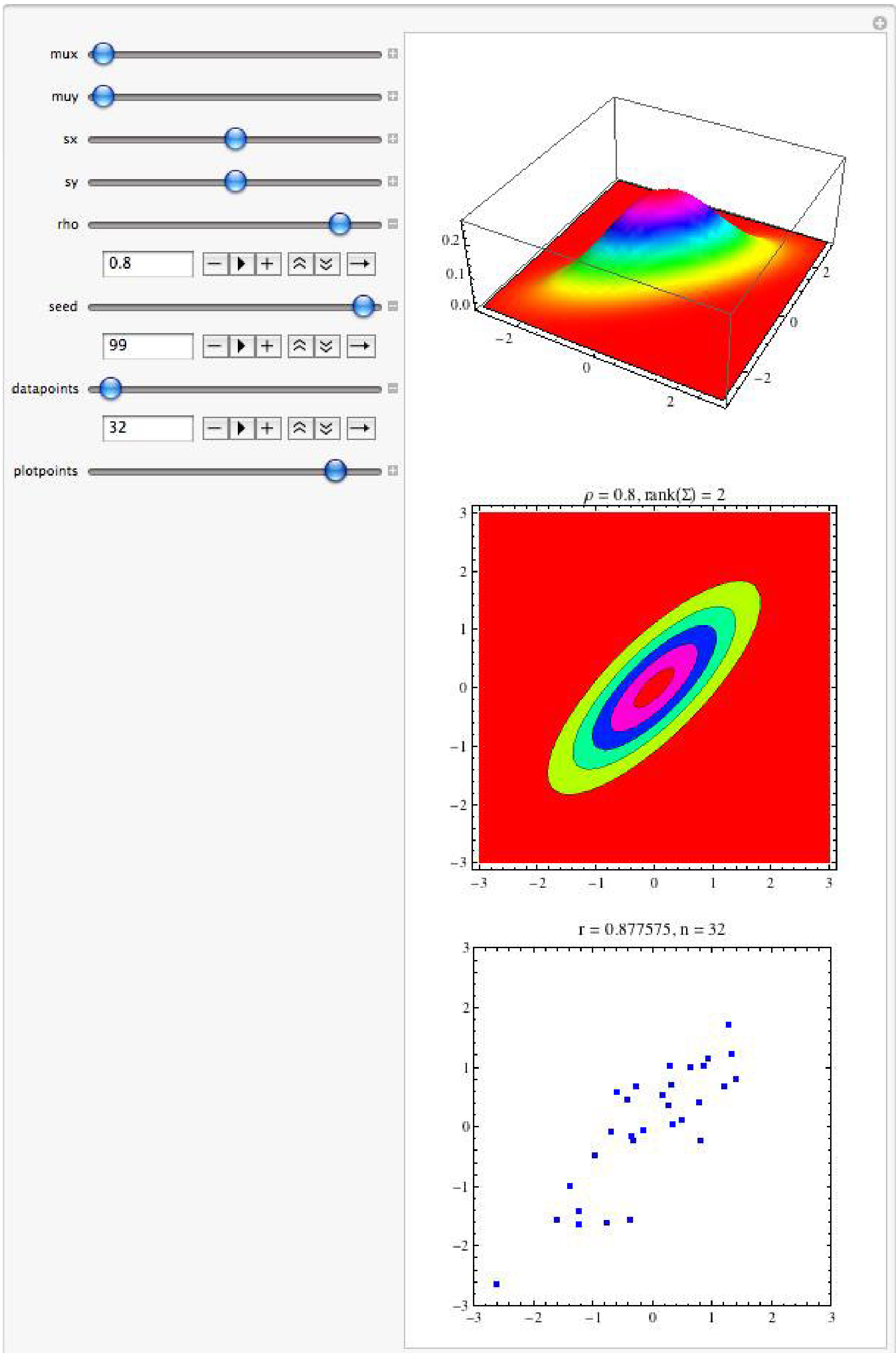


Abbildung 4.1: Bivariate Normalverteilung mit $\rho = 0.8$ und simulierten Daten (Streudiagramm; $r = .877, N = 32, seed = 99$).

Beispiel 5.3 (BIP 2007 und Inflationsrate (Konfidenzintervall))

Im Beispiel war

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha} &= -0.827 \\
\hat{\beta} &= 0.601 \\
\widehat{\sigma^2} &= .774 \\
\widehat{\sigma} &= \sqrt{.774} = .88 \\
\sum (x_n - \bar{x})^2 &= \sum x_n^2 - N\bar{x}^2 = 107.121.
\end{aligned}$$

Daraus findet man den Streuungsterm

$$\begin{aligned}
\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{E})} &= \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum_n (x_n - \bar{x})^2}} \\
&= 0.88\sqrt{\frac{1}{32} + \frac{(x - 5.5275)^2}{107.121}}.
\end{aligned}$$

Das 95%-KI ist damit

$$(-0.827 + 0.601\,x) \pm 1.7972\sqrt{1/32 + 0.00934(-5.5275 + x)^2}$$

mit dem Quantil $t(.975, 30) = 2.04227$. An der Stelle $x = \bar{x} = 5.5275$ ergibt sich der minimale Wert

$$2.497 \pm 0.318.$$

Abb. 5.5 zeigt das Konfidenz-Intervall als Konfidenz-Band für alle x-Werte zwischen 0 und 11.

■

5.3.2 Prognoseintervall für individuelles Y_0 (Fall 2)

Der individuelle zufällige Wert $Y_0 = \alpha + \beta X_0 + \epsilon_0 = E[Y_0|X_0] + \epsilon_0$ kann mit Hilfe von $\widehat{Y_0} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_0$ geschätzt werden. Der dabei zu erwartende quadrierte Prognose-Fehler ist (vgl. 5.91; alles folgende bedingt auf X_0)

$$E[Y_0 - \widehat{Y_0}]^2 = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{N} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_n (X_n - \bar{X})^2}\right). \tag{5.95}$$

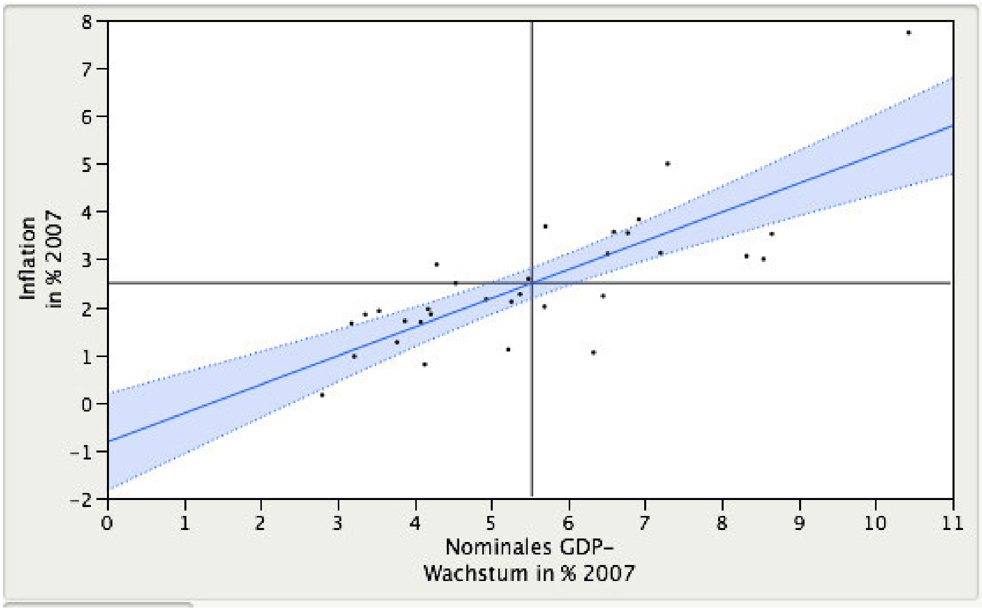


Abbildung 5.5: Geschätzte Gerade mit Konfidenzband $\hat{E}[Y|X] \pm t(1-\alpha/2, N-2)\sqrt{\widehat{\mathsf{Var}}(\hat{E})}$.

Man erhält also im Vergleich zu Glg. 5.91 einen zusätzlichen Term σ^2, der durch den Gleichungsfehler ϵ_0 im stochastischen $Y_0 = \alpha + \beta X_0 + \epsilon_0$ erzeugt wird.

Dies kann wie folgt gezeigt werden (bedingt auf X_0):
Da $E[Y_0] = \alpha + \beta X_0$ und $E[\widehat{Y_0}] = \alpha + \beta X_0$ (Erwartungstreue der KQ-Schätzer) gilt

$$E[Y_0 - \widehat{Y_0}]^2 = \text{Var}(Y_0 - \widehat{Y_0}) = \text{Var}(Y_0) + \text{Var}(\widehat{Y_0}). \tag{5.96}$$

Hierbei wurde $\text{Cov}(Y_0, \widehat{Y_0}) = \text{Cov}(\alpha + \beta X_0 + \epsilon_0, \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_0) = 0$ ausgenutzt, da die KQ-Schätzer unabhängig vom Gleichungsfehler ϵ_0 sind. Außerdem gilt ganz allgemein für Zufallsvariablen $E[Z^2] = \text{Var}(Z)$ für $E[Z] = 0$.
Setzt man noch $\text{Var}(Y_0) = \sigma^2$ und $\text{Var}(\widehat{Y_0}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{N} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_n (X_n - \bar{X})^2}\right)$ (Fall 1) ein und ersetzt wieder $\sigma \to \hat{\sigma}$, so ergibt sich das gesuchte Prognose-Intervall

Das F-Quantil $f(.95, 1, 30) = 4.17088$ ist wesentlich kleiner als die Teststatistik, sodaß die Nullhypothese verworfen wird. Dies stimmt mit dem Resultat des t-Tests überein (Bsp. 5.2). Die T-Statistik war 7.07611. Quadriert man diese, so ergibt sich $T^2 = 50.0713$, was mit der F-Statistik übereinstimmt. Dies ist kein Zufall, sondern folgt aus dem Zusammenhang $T(N-2)^2 = N(0,1)^2/\chi^2(N-2) = F(1, N-2)$ der T, χ^2 und F-Statistik (vgl. Abs. 1.3.4.2, Nummer 4).

■

Der F-Bruch läßt sich auch mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten ausdrücken, da

$$\frac{SQE}{SQR/(N-2)} = \frac{SQE}{SQT - SQE}(N-2) \tag{5.122}$$

$$= \frac{SQE/SQT}{1 - SQE/SQT}(N-2). \tag{5.123}$$

Somit gilt

$$F = \frac{R_{xy}^2}{1 - R_{xy}^2}(N-2). \tag{5.124}$$

Große (betragsmäßige) Korrelationen führen also zu großen F-Statistiken.

Im Beispiel ist $r_{xy}^2 = 0.625$ und somit $F = \frac{0.625}{1-0.625}30 = 50.07$.

5.4.4 Residualanalyse

Diagnose

Nach dem Schätzen der Parameter und dem Testen des Modells sollte auch eine Analyse der Residuen vorgenommen werden (Diagnose). Hiermit wird überprüft, ob die Annahmen des Modells (vgl. Abs. 5.1.2.2) zumindest approximativ erfüllt sind oder ob grobe Abweichungen vorliegen.

Beispielsweise sollten die Residuen $\hat{\epsilon}_n$ unsystematisch streuen und keine Abhängigkeit von den Regressoren X_n aufweisen. Dies zeigt sich im Streudiagramm Abb. 5.7. Die eingezeichnete Regressionslinie hat nur eine sehr kleine Steigung. Man hat allerdings den Eindruck, daß für große

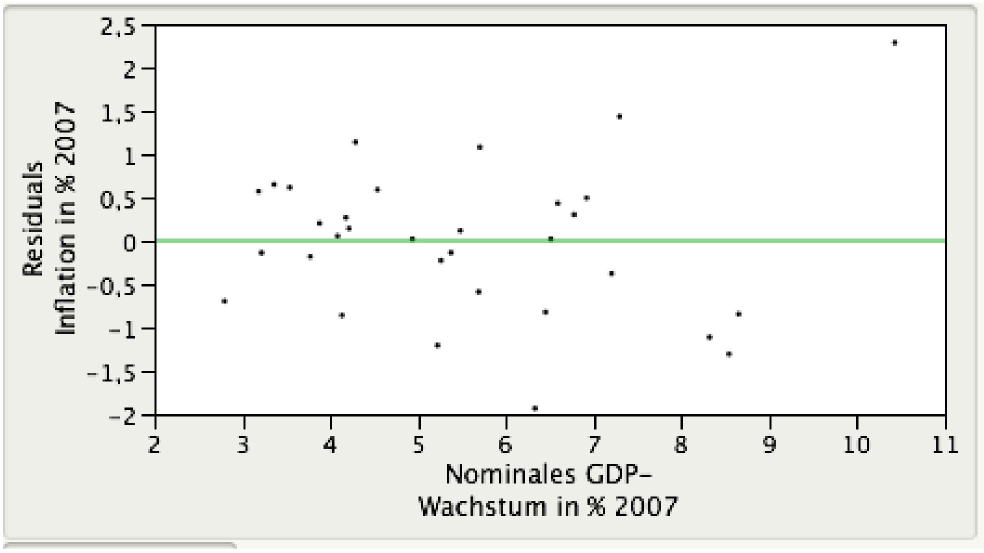


Abbildung 5.7: Streudiagramm der Residuen $\hat{\epsilon}_n$ mit den Regressoren X_n. Eingezeichnet ist auch eine geschätzte Regressionslinie.

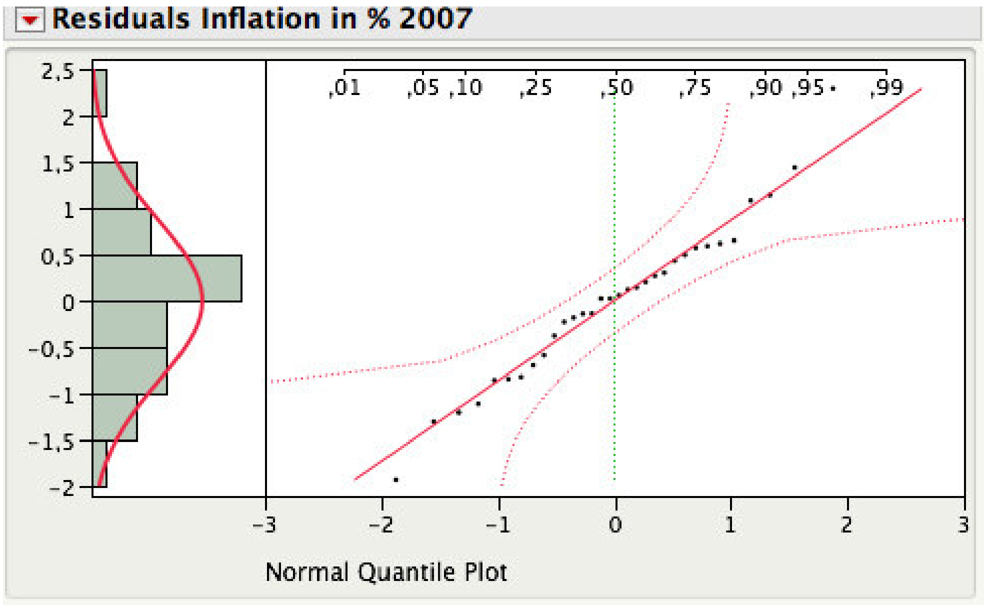


Abbildung 5.8: Histogramm und Normal-Quantil-Plot der Residuen $\hat{\epsilon}_n$. Es sind keine groben Abweichungen von der Normalverteilung zu erkennen.

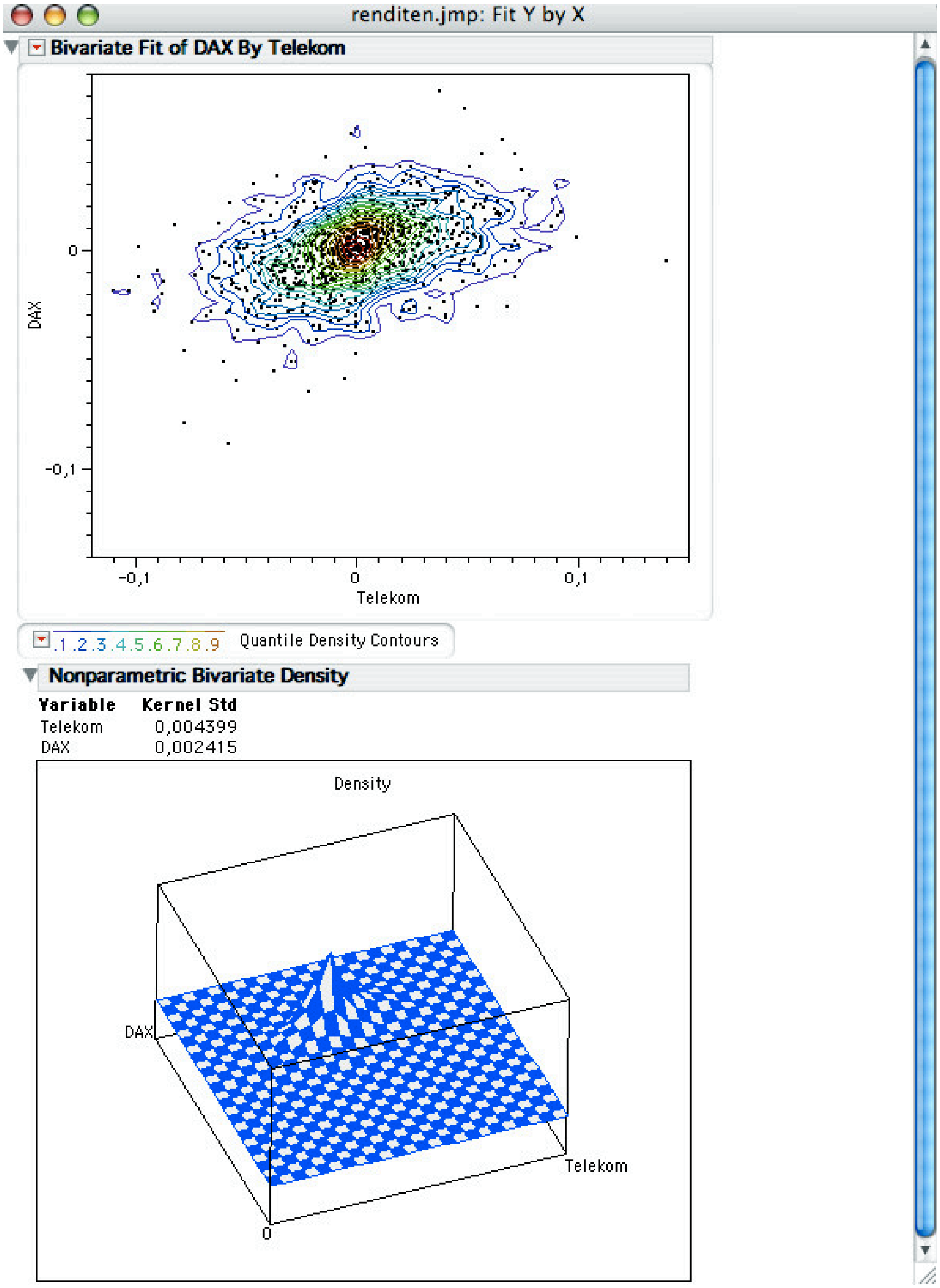


Abbildung 12.20: Streudiagramm, Dichte-Graphik (Höhenlinien) (oben) und 3-D-Darstellung der bivariaten empirischen Dichte (unten) von Dax und Telekom-Rendite (SAS/JMP).

$P = [\psi_1, \ldots, \psi_p] : p \times p, M = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_p) : p \times p$ (Diagonalmatrix).
Die Summendarstellung von Σ wird als **Eigenwertzerlegung** oder **Spektral-Darstellung** bezeichnet. Man spricht auch von **Diagonalisierung** ($P'\Sigma P = M$).

Eigenwert-zerlegung

Die Wichtigkeit dieser Formeln kann gar nicht überschätzt werden. Sie erlauben, eine Matrix als Überlagerung von Projektionen $\psi_i\psi_i'$ auf eindimensionale Unterräume darzustellen, mit den Eigenwerten (Spektrum) als Gewicht.

Ganz allgemein gilt für die Spur (= trace) der Matrix

Spur

$$\sum_i \sigma_{ii} \;:=\; \mathrm{tr}(\Sigma) = \sum_i \mu_i = \mathrm{tr}(M), \tag{14.318}$$

da $\mathrm{tr}(\Sigma) = \mathrm{tr}(PMP') = \mathrm{tr}(MP'P) = \mathrm{tr}(M)$.

Übung: Beweisen Sie die zyklische Eigenschaft $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ der Spur.

Beispiel 14.9 (Eigenwerte einer Korrelationsmatrix)
Für die (theoretische) Korrelationsmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \tag{14.319}$$

ergeben sich die Eigenwerte aus

$$\det(\begin{bmatrix} 1-\mu & \rho \\ \rho & 1-\mu \end{bmatrix}) = 0 = (1-\mu)^2 - \rho^2 \tag{14.320}$$

$$\mu_{1,2} = 1 \pm \rho \tag{14.321}$$

Die Summe der Eigenwerte ist also $2 = \mathrm{tr}(R)$ = Summe der Diagonale := Spur = trace. Ganz allgemein gilt

$$\sum_i R_{ii} \;:=\; \mathrm{tr}(R) = \sum_i \mu_i = p. \tag{14.322}$$

Die Eigenvektoren ergeben sich aus den Bedingungen

$$(R - \mu_1 I_2)\psi_1 = \begin{bmatrix} -\rho & \rho \\ \rho & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14.323}$$

$$(R - \mu_2 I_2)\psi_2 = \begin{bmatrix} \rho & \rho \\ \rho & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{14.324}$$

Etwa löst

$$\begin{bmatrix}\psi_{11}\\ \psi_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \tag{14.325}$$

$$\begin{bmatrix}\psi_{21}\\ \psi_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \tag{14.326}$$

$$\tag{14.327}$$

obige Gleichungen. Das Betrags-Quadrat der Vektoren ist $[1,1][1,1]' = 2, [1,-1][1,-1]' = 2$, sodaß man

$$\psi_1 = \begin{bmatrix}\psi_{11}\\ \psi_{12}\end{bmatrix} = 1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \tag{14.328}$$

$$\psi_2 = \begin{bmatrix}\psi_{21}\\ \psi_{22}\end{bmatrix} = 1/\sqrt{2}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \tag{14.329}$$

als orthonormierte Eigenvektoren findet.

Übung: Zeigen Sie, daß ψ_1, ψ_2 orthonormiert sind.

Es ist wichtig, daß die Eigenvektoren gar nicht von der Korrelation ρ abhängen. Sie zeigen in Richtung der Winkelhalbierenden der Quadranten. Abb. 14.29 zeigt simulierte Daten aus einer bivariaten Normalverteilung

$$N\left(0, R = \begin{bmatrix}1 & 0.9\\ 0.9 & 1\end{bmatrix}\right). \tag{14.330}$$

Die Eigenwerte von R sind $1 \pm 0.9 = 1.9, 0.1$ und die orthogonale Matrix der Eigenvektoren lautet

$$P = 2^{-1/2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \tag{14.331}$$

$$PP' = P'P = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I_2. \tag{14.332}$$

Im gedrehten Koordinatensystem gilt daher

$$\mathbf{y} = P'\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\psi_1'\mathbf{x}\\ \psi_2'\mathbf{x}\end{bmatrix} = 2^{-1/2}\begin{bmatrix}x_1 + x_2\\ x_1 - x_2\end{bmatrix} \tag{14.333}$$

und $\mathrm{Cov}(\mathbf{y}) = P'RP = M = \mathrm{diag}(1.9, 0.1)$.

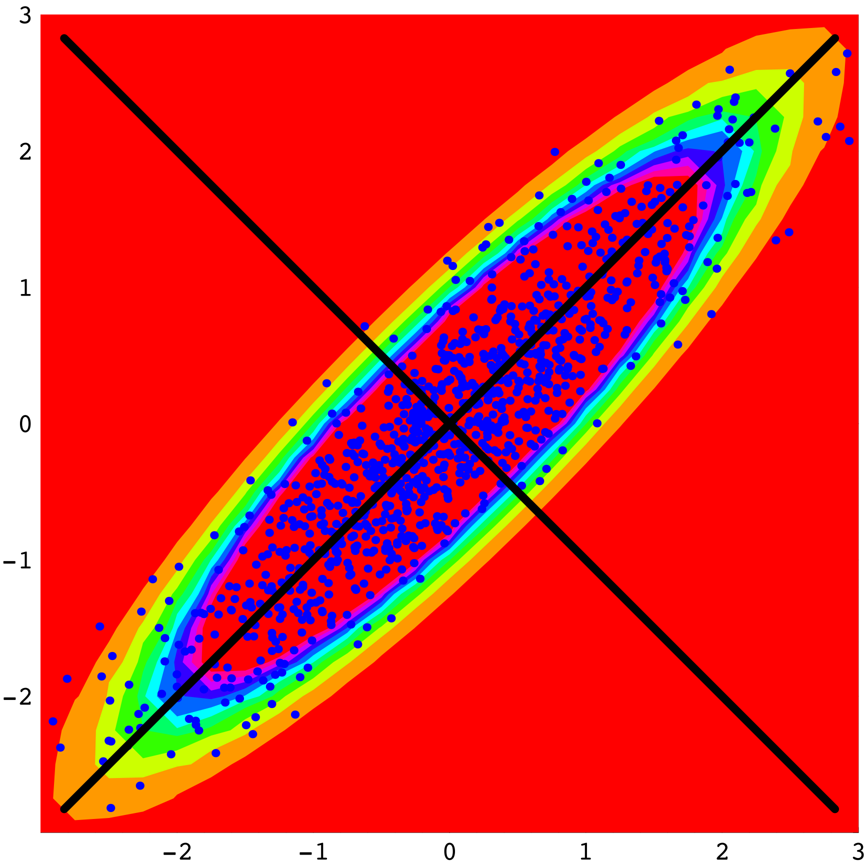


Abbildung 14.29: Simulierte normalverteilte Daten $\mathbf{x}_n, n = 1, ..., N = 1000$ mit Kovarianz-Matrix $R = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$. Die Hauptachsen zeigen in Richtung der Winkelhalbierenden.

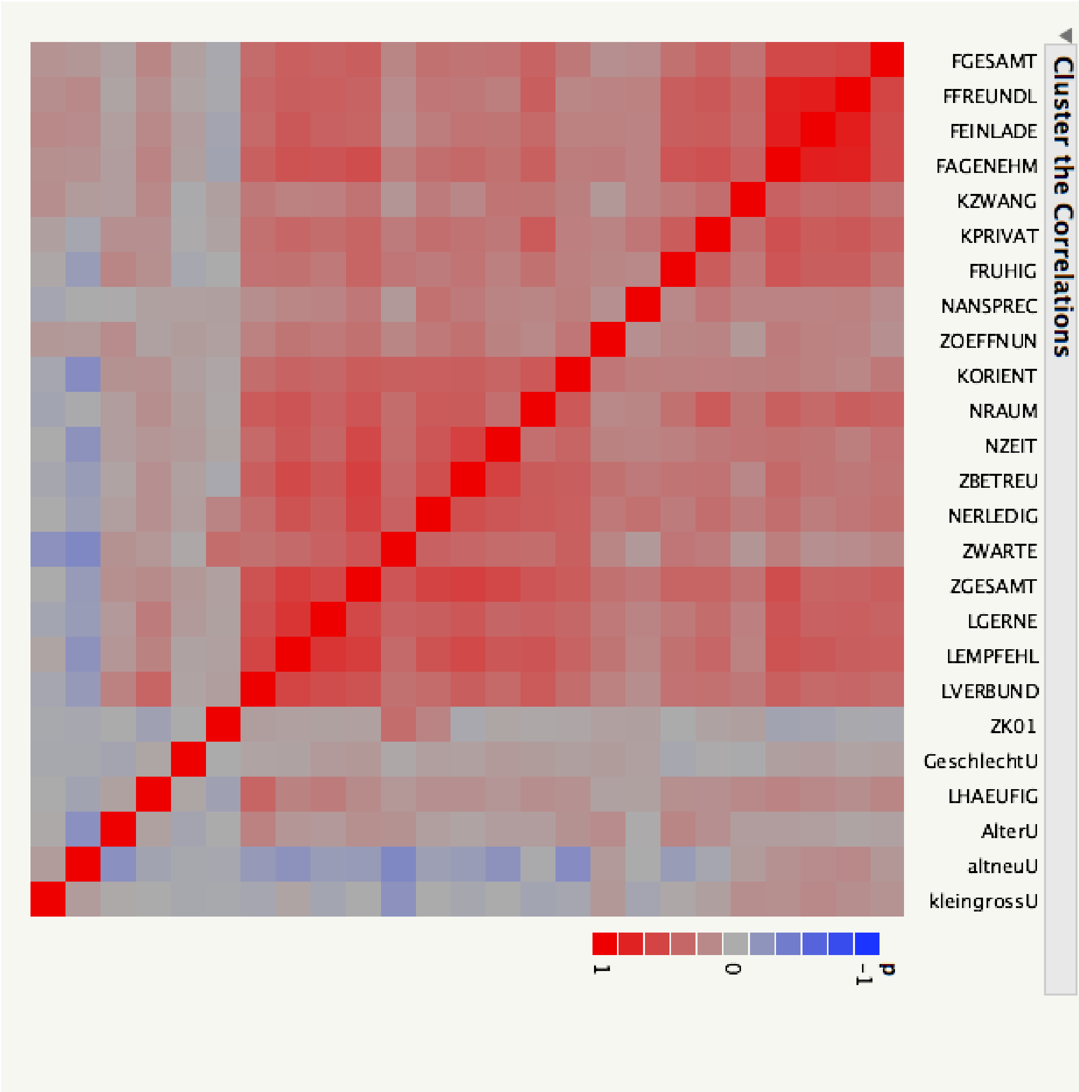


Abbildung 15.12: JMP: Korrelationsmatrix aller Variablen (Cluster der Korrelationen). Die Stärke der Korrelation ist durch die Farbe markiert (rot: $r > 0$, blau: $r < 0$. Die items der Konstrukte bilden einen positiv korrelierten Block.